N. BOGOEVICI

ELECTROTEHNICĂ ȘI MĂSURĂRI ELECTRICE

Editura didactică și pedagogică
București — 1979

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

Prof. dr. ing. NICOLAE BOGOEVICI

ELECTROTEHNICĂ ȘI MĂSURĂRI ELECTRICE

MANUAL PENTRU SUBINGINERI



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI

Referent științific: prof. dr. ing. **Marius Preda**

Redactor: ing. **Maria Beluri**
Tehnoredactor: **Sanda Dumitrașcu**
Grafician: **Nicolae Sirbu**

PREFAȚĂ

Ținînd seama de cerințele actuale ale pregătirii subinginerilor în specialitățile Mașini și aparate electrice și Electromecanică tehnologică, am elaborat cursul de ELECTROTEHNICĂ ȘI MĂSURĂRI ELECTRICE, care cuprinde lecțiile predate studenților din specialitățile respective de la Institutul de subingineri din Reșița. Conținutul și forma de prezentare a materialului sintetizează rezultatul activității desfășurate în acest sens timp de aproape cinci ani.

Pe fondul unei prezentări teoretice restrînse și accesibile, am urmărit cu atenție sublinierea aspectelor aplicative în diverse domenii a fenomenelor electrice, magnetice și electromagnetice, ținînd în același timp seama că disciplinele de Electrotehnică și Măsurări electrice fac parte din grupa disciplinelor de cultură tehnică generală.

În prima parte, cuprinzînd opt capitole, sînt prezentate cunoștințele despre electrostatică, electrocinetică, electrodinamică, circuite și rețele electrice de curent continuu și de curent alternativ, insistîndu-se asupra enunțării, explicării și aplicării legilor și teoremelor (în formă integrală) aferente acestui domeniu.

A doua parte, extinsă pe cinci capitole, cuprinde problemele referitoare la metodele și instrumentele de măsurare a mărimilor electrice și magnetice, incluzînd și instrumentele electronice și numerice, precum și verificarea și etalonarea instrumentelor electrice de măsurare.

Deși se adresează studenților subingineri de la secțiile cu specific electric, lucrarea poate fi folosită și de studenții de la secțiile neelectrice, în scopul aprofundării cunoștințelor despre problemele de bază ale electrotehnicii și măsurărilor electrice.

Țin să aduc pe această cale mulțumiri tov. asist. univ. ing. Iancu Tătucu care m-a ajutat la definitivarea formei de prezentare a părții referitoare la măsurări electrice.

Fiind la prima ediție, anumite părți sau aspecte ale lucrării sînt susceptibile de îmbunătățiri. Voi fi recunoscător tuturor acelora care au de făcut sugestii și observații în acest sens.

AUTORUL

CUPRINS

INTRODUCERE

1. OBIECTUL ŞI CONŢINUTUL CURSULUI

Electrotehnica ca disciplină ştiinţifică se ocupă cu studiul stărilor şi fenomeneor electrice, magnetice şi electromagnetice, iar ca disciplină tehnică, cu studiul aplicaţiilor practice ale acestor stări şi fenomene.

Pentru a sublinia importanţa însuşirii cunoştinţelor din domeniul electronicii, este necesar să se arate că forma de energie cea mai utilizată în diferite domenii este energia electromagnetică (în limbajul tehnic — energia electrică).

Energia electrică prezintă o serie de avantaje în comparaţie cu alte forme de energie şi anume :

— producerea energiei electrice în centrale electrice are loc în condiţii economice avantajoase ;

— energia electrică poate fi transmisă la distanţe mari prin intermediul cîmpului electromagnetic, fie direct prin mediul înconjurător, fie dirijat prin linii electrice ;

— la locul de consum, energia electrică poate fi transformată în condiţii economice în alte forme de energie ;

— energia electrică poate fi divizată şi utilizată în părţi oricît de mici, după necesităţi.

Dezavantajul pe care îl prezintă energia electrică în comparaţie cu alte forme ale energiei constă în aceea că nu poate fi înmagazinată. Energia electrică trebuie produsă în momentul cînd este cerută de consumatori.

Centralele electrice producătoare de energie sînt de mai multe tipuri : termoelectrice, hidroelectrice, atomoelectrice etc. În condiţiile actuale de dezvoltare ale tehnicii, centralele producătoare de energie electrică constituie unităţi puternice, cu puteri de ordinul a sute şi mii de megawatt, încadrate în sisteme energetice unice, naţionale sau internaţionale, permiţînd valorificarea avantajoasă a resurselor energetice naturale.

Centralele termoelectrice, amplasate în apropierea resurselor naturale de combustibili solizi şi fluizi, permit utilizarea raţională a acestora, mai ales a celor inferiori, care nu pot fi utilizaţi cu acelaşi randament în alte scopuri, economisindu-se totodată costul transportului lor. De asemenea, centralele termoelectrice amplasate în centre industriale permit realizarea în condiţii economice a instalaţiilor de termoficare atît a unităţilor de producţie, cît şi a clădirilor de locuit.

Centralele hidroelectrice folosesc energia inepuizabilă a căderilor de apă şi permit amenajarea hidrotehnică şi de navigaţie a cursurilor de apă.

Centralele atomoelectrice constituie unul din mijloacele eficiente de folosire în scopuri paşnice a imensei energii conţinute de atomul material. Întrucît sursele de combustibili fosili (cărbune şi ţiţei) ale pămîntului sînt epuizabile, energia atomică va fi cea căreia îi revine rolul de a asigura, în cea mai mare parte, consumul de energie al omenirii în viitor.

În prezent, în toate sectoarele de activitate se foloseşte, în cele mai diverse moduri, energia electrică. Motoarele electrice de acţionare a diferitelor utilaje, maşini şi mijloace de transport transformă energia electrică în energie mecanică, lămpile electrice o transformă în energie luminoasă, cuptoarele electrice o transformă în energie termică (căldură) pentru topit, încălzit sau uscat etc. Dacă se consideră şi utilizarea energiei electrice în telecomunicaţii, în automatizări, în aparatele electrocasnice etc., rezultă domeniul foarte vast în care această formă de energie îşi găseşte utilizare.

Politica marxist-leninistă a Partidului Comunist Român, bazată pe o profundă cunoaştere a necesităţilor economiei naţionale, a considerat întotdeauna electrificarea ţării ca una din pîrghiile principale ale construcţiei socialiste. Aplicarea acestei politici a fost concretizată în planul pe 10 ani de electrificare a ţării (1951—1960), în planul şesenal (1960—1965), în directivele Congresului al IX-lea al P.C.R. cu privire la valorificarea resurselor energetice şi electrificarea ţării în perioada 1966—1975, în directivele Congresului al X-lea al P.C.R. cu privire la dezvoltarea resurselor energetice şi a electrificării în perioada 1971—1980 şi în directivele congresului al XI-lea al P.C.R., referitoare la creşterea producţiei de energie electrică şi dezvoltarea industriei electrotehnicii şi electronicii.

Producţia de energie electrică, crescînd într-un ritm mai ridicat decît producţia industrială în ansamblu, va ajunge în Republica Socialistă România în 1980 la 75—80 miliarde kWh, cu o creştere de 33—42% faţă de 1975. Consumul de energie electrică pe locuitor va creşte de la 2 400—2 500 kWh în 1975 la 3 000—3 400 kWh în 1980. Puterea instalată în centralele electrice va fi mărită în perioada 1976—1980 cu 5 400—5 700 MW, din care circa 1 700 MW în centrale hidroelectrice şi circa 3 200 MW în centrale termoelectrice pe bază de cărbuni. Vor fi construite noi centrale hidroelectrice pe Dunăre, Lotru, Argeş, Olt, Someş, Sebeş, Siret şi Rîul Mare.

Industria electrotehnică şi electronică va deţine în 1980 peste 20% din totalul construcţiilor de maşini.

Scopul cursului în electrotehnică şi măsurări electrice îl constituie studiul calitativ şi cantitativ al stărilor şi fenomenelor electrice, magnetice şi electromagnetice, cu ajutorul mărimilor fizice, legilor şi teoremelor aferente, insistîndu-se în mod deosebit asupra aplicaţiilor concrete ale acestor stări şi fenomene.

Conţinutul cursului este împărţit în două părţi. În partea I-a se prezintă problemele de bază ale electromagnetismului, insistîndu-se mai mult asupra analizei şi calculului circuitelor electrice, iar în partea a II-a se prezintă problemele referitoare la măsurările electrice şi electronice.

Însuşirea cunoştinţelor din prezentul curs de către studenţi constituie piatra unghiulară a succesului în pregătirea profesională pentru obţinerea calificării superioare. De la început trebuie subliniată dificultatea legată de faptul că cele mai multe dintre manifestările cîmpului electromagnetic — formă a materiei distinctă de substanţă — nu sînt sesizabile direct de simţurile omului, ci indirect, prin efectele lor mecanice, termice etc. Legile şi teoremele electrotehnicii se exprimă şi se dezvoltă cu ajutorul unor noţiuni de matematici superi-

oare, necesitînd cunoaşterea temeinică a algebrei şi analizei vectoriale, a calculului diferenţial şi integral etc. În plus, trebuie remarcat faptul că relaţiile dintre mărimi nu sînt simple formule de reţinut prin memorare ci, prin intermediul lor, se exprimă stări şi fenomene ce trebuie înţelese prin raţionament logic, pe bază de judecată. Toate acestea pretind din partea studenţilor un studiu temeinic şi sistematic, efectuat zi de zi.

2. SCURT ISTORIC ASUPRA DEZVOLTĂRII CONCEPTELOR PRIVIND FENOMENELE ELECTRICE, MAGNETICE ŞI ELECTROMAGNETICE

Deşi unele stări şi fenomene electrice şi magnetice au fost cunoscute din cele mai vechi timpuri, explicaţia lor ştiinţifică a fost dată abia în ultimii o sută de ani, după descoperirea unor fenomene de natură electromagnetică. Fără o astfel de explicaţie ştiinţifică nu s-ar fi putut ajunge azi la aplicaţiile tehnice deosebit de valoroase ale acestor fenomene.

Pînă în prezent se cunosc cinci faze mai importante prin care, din punct de vedere istoric, a trecut acest studiu al fenomenelor electrice şi magnetice, respectiv electromagnetice.

Teoria acţiunii la distanţă. În prima etapă, studiul fenomenelor electrice şi magnetice a fost foarte mult influenţat de teoria fenomenelor mecanice, ale cărei baze au fost puse de *Newton* (mecanica clasică). Dintre legile stabilite de Newton, după care evoluează fenomenele mecanice, legea atracţiei universale (formulată în 1687) a influenţat cel mai mult cercetările în domeniul fenomenelor electrice şi magnetice. În 1785, Coulomb, pe baza generalizării experienţelor efectuate, stabileşte relaţia după care corpurile punctiforme încărcate cu sarcini electrice, precum şi magneţii punctiformi, interacţionează, forţa fiind invers proporţională cu patratul distanţei dintre corpuri (relaţie identică cu cea pentru forţa de interacţiune dintre masele inerte punctiforme).

Este cunoscut faptul că, în mecanica lui Newton, predomină concepţia acţiunilor ponderomotoare la distanţă, considerîndu-se că *forţele şi momentele se transmit instantaneu prin spaţiu*, de la corpul ce acţionează pînă la corpul asupra căruia se exercită acţiunea, *oricare ar fi distanţa dintre corpuri*. Cu alte cuvinte, aceste acţiuni ponderomotoare nu au nevoie de un timp de propagare, *viteza de propagare* a acestora fiind considerată *infinită*. În acelaşi sens a fost interpretată în această etapă şi legea lui Coulomb.

Experienţa a arătat însă că acţiunile fizice nu se transmit instantaneu, că nu există acţiuni la distanţă, ceea ce face ca toate concepţiile bazate pe teoria acţiunii la distanţă să fie greşite. Concepţia acţiunii la distanţă a condus pe unii fizicieni la concluzia greşită că în spaţiul înconjurător corpurilor încărcate cu sarcini electrice nu se produc procese materiale, că poate deci exista un spaţiu lipsit de materie.

Teoria acţiunii la distanţă nu mai prezintă interes decît sub aspect istoric, ea fiind înlocuită, la timpul său, cu teoria acţiunii din aproape în aproape.

Teoria acţiunii prin contiguitate *(din aproape în aproape)*. Conform acestei teorii, se consideră că *acţiunile ponderomotoare electrice şi magnetice se transmit din aproape în aproape, prin spaţiu şi în timp, cu o viteză foarte mare, dar finită*.

Purtătorul acțiunilor electrice și magnetice este cîmpul electromagnetic, formă a materiei distinctă de substanța corpurilor și ireductibilă la aceasta, care poate exista atît în corpuri, cît și în afara lor și a cărui existență locală este pusă în evidență cu ajutorul forțelor și momentelor pe care le exercită asupra unor mici corpuri electrizate sau magnetizate. Legea acțiunii ponderomotoare în cîmpul electromagnetic se exprimă prin relația :

$$\bar{F}=Q\bar{E}+Q\bar{v}\times\bar{B}, \tag{1}$$

unde $\bar{F}$ este forța ce se exercită de cîmp asupra unui mic corp încărcat cu sarcina electrică Q ce se mișcă în cîmp cu viteza $\bar{v}$, $\bar{E}$ este intensitatea cîmpului electric, iar $\bar{B}$ este inducția magnetică.

În această fază de dezvoltare a teoriei fenomenelor electrice și magnetice, inițiată de *Faraday* și desăvîrșită de *Maxwell*, corpurile au fost aproximate ca medii continui, motiv pentru care poartă denumirea de *teoria macroscopică clasică a electromagnetismului*. Ea mai poartă și denumirea de teoria lui Maxwell cînd se aplică corpurilor în repaus în raport cu sistemul de referință ales și teoria Maxwell-Hertz, cînd se aplică corpurilor mobile.

Experiențele ce au fost făcute de oameni de știință au scos însă în evidență unele laturi ale fenomenelor electrice și magnetice care nu pot fi explicate în lumina teoriei macroscopice, pentru că ele sînt strîns legate de structura corpurilor (descărcările electrice în gaze, fenomenele legate de electroliză etc). Asemenea experiențe au dat indicații asupra structurii discontinue a materiei, în opoziție cu concepția de continuitate admisă de teoria macroscopică.

Teoria microscopică clasică (teoria electronilor). Această nouă teorie, a cărei baze au fost puse de *Lorentz*, păstrează conceptul de cîmp, dar, în același timp, *admite și o structură discontinuă a corpurilor, recunoscîndu-se și caracterul discontinuu al sarcinii electrice.* Cuanta elementară de sarcină electrică negativă este atribuită particulei elementare numită electron :

$$q=-1{,}602\cdot 10^{-19}\text{C}. \tag{2}$$

În această teorie, electronul ocupă o poziție centrală, determinînd prin mișcarea sa o serie de fenomene electrice și magnetice. În formularea legilor intervine viteza cu care se mișcă particulele elementare încărcate electric.

Pentru că viteza este o mărime ce trebuie dată în raport cu un sistem de referință, a fost necesară introducerea unui singur sistem de referință, numit *sistem de referință inerțial, Lorentzian*. În raport cu acest sistem se definesc mărimile microscopice de stare ale cîmpului și corpurilor, precum și legile ce guvernează fenomenele electromagnetice.

Deoarece teoria electronilor se referă la scara microscopică, în legile sale nu intervin constante fizice de material.

Un mare număr de fenomene stabilite experimental și în special o serie de proprietăți electrice și magnetice de material au fost explicate în cadrul teoriei electronilor. Teoria electronilor a explicat în parte și unele fenomene privitoare la electrodinamica corpurilor încărcate electric ce sînt în mișcare, care contraziceau teoria lui Maxwell-Hertz.

Teoria relativității restrînse (electrodinamica relativistă). Experiența a arătat că în cazul corpurilor în mișcare, cu viteze relative foarte mari, comparabile cu viteza de propagare a luminii în vid, legile stabilite în teoria clasică

macroscopică și în teoria clasică a electronilor nu sînt valabile cu destulă precizie. Necesitatea de a încadra teoretic și aceste noi experiențe a dus la o nouă teorie, numită electrodinamica relativistă, care *se bazează pe legile mecanicii relativiste.* În mecanica relativistă, unele mărimi ca lungimea, masa, timpul sînt „relative" și nu „absolute", cum sînt considerate în mecanica clasică a lui Newton. Ele depind de starea cinematică a sistemului de referință.

De remarcat că *legile acestei teorii sînt valabile în raport cu oricare sistem de referință inerțial.*

Teoria cuantică. Experiențele au arătat că nici legile electrodinamicii relativiste nu sînt valabile cu destulă precizie în cazul fenomenelor legate de schimbul de energie și impuls ce au loc între microparticulele ce constituie corpurile materiale, cînd acest schimb se face în cantități extrem de mici (cuante de energie). Pentru a explica și aceste fenomene, se elaborează în prezent electrodinamica cuantică, care *folosește conceptele fundamentale ale fizicii cuantice.*

În stadiul actual al tehnicii industriale, cunoștințele date de teoria clasică macroscopică, completate în parte cu cunoștințe din teoria electronilor, sînt suficiente pentru a interpreta și înțelege fenomenele electrice, magnetice și electromagnetice, precum și aplicațiile lor tehnice.

În decursul timpului, numeroși oameni de știință au adus contribuții de seamă la dezvoltarea cunoștințelor din domeniul electrotehnicii.

Lomonosov și *Franklin* au efectuat în secolul al XVIII-lea studii asupra electricității atmosferice.

Coulomb a stabilit în 1785 forțele de interacțiune exercitate între corpuri încărcate cu sarcini electrice.

Galvani și *Volta* descoperă la sfîrșitul secolului al XVIII-lea pilele electrice.

Oersted descoperă în 1819 forțele exercitate de un conductor străbătut de curent asupra acului magnetic.

Ampère studiază cîmpul magnetic produs de un solenoid și explică starea de magnetizare a corpurilor prin curenții moleculari (1820).

Faraday descoperă în 1831 fenomenul inducției electromagnetice și introduce conceptul de cîmp.

Maxwell elaborează teoria macroscopică a cîmpului electromagnetic, expusă în lucrarea clasică „Tratat despre electricitate și magnetism" (1873).

Hertz confirmă experimental existența undelor electromagnetice (1887—1889).

Lebedeev pune în evidență experimental presiunea luminii (1900—1910).

La baza teoriei circuitelor electrice stau lucrările lui *Ohm* (1827) și *Kirchhoff* (1845).

Și oameni de știință din țara noastră au adus contribuții importante la studiul teoretic și experimental al electrotehnicii. În acest sens se remarcă lucrările profesorilor D. Hurmuzescu, Șt. Procopiu, Vasilescu Carpen, C. Budeanu, etc.

La Institutul politehnic din Timișoara, sub conducerea profesorului Pl. Andronescu, s-a creat o adevărată școală de studiu a electrotehnicii moderne.

Merite deosebite, recunoscute pe plan internațional, le are școala condusă de acad. R. Răduleț de la Institutul politehnic din București, care a adus contribuții importante la progresul teoriei macroscopice a cîmpului electromagnetic și la studiul parametrilor circuitelor electrice în regim tranzistoriu.

3. MĂRIMI FIZICE

Stările și fenomenele fizice, care înglobează și fenomenele electrice și magnetice, se caracterizează și se studiază cu ajutorul mărimilor fizice. Mărimea fizică caracterizează o proprietate a unei stări sau fenomen fizic.

Introducerea unei mărimi fizice implică precizarea unității sale de măsură și indicarea explicită a procedeului univoc și invariant de măsurare.

Procedeul de măsurare este o operație experimentală reproductibilă, efectuată în anumite condiții, prin care se asociază fiecărei mărimi fizice o „valoare" sau „măsură", în raport cu unitatea de măsură a mărimii fizice respective. Valoarea unei mărimi se exprimă cantitativ printr-un număr care arată de cîte ori unitatea de măsură aleasă se cuprinde în mărimea dată.

O mărime fizică este complet determinată cînd se cunosc : unitatea sa de măsură, procedeul de măsurare și valoarea sa ca rezultat al măsurării. În acest sens, se precizează că în cadrul cursului de electrotehnică și măsurări electrice se folosesc unitățile de măsură din sistemul de unități MKSA raționalizat, care constituie partea pentru electromagnetism a sistemului de unități internațional (S.I.).

Relațiile dintre mărimile fizice se deosebesc de relațiile dintre mărimile matematice prin aceea că trebuie să fie satisfăcute atît din punct de vedere al valorilor numerice, cît și din punct de vedere al dimensiunilor.

După felul cum mărimile fizice se introduc în fizică, acestea se împart în două categorii : *mărimi derivate*, care se pot defini cu ajutorul altor mărimi presupuse cunoscute, și *mărimi primitive*, care se introduc direct, pe cale experimentală, indicînd în concret unitatea de măsură și procedeul de măsurare. Într-o teorie a unui domeniu al fizicii, mărimile primitive se aleg în așa fel ca numărul lor să fie minim. Această alegere este relativă în sensul că, într-o anumită formă a teoriei, se pot considera anumite mărimi ca primitive, iar, în altă formă, ele ar putea apare ca derivate. Odată cu progresul științei, numărul mărimilor primitive poate să scadă.

În teoria macroscopică a fenomenelor electromagnetice este nevoie de șase mărimi primitive specifice electromagnetismului, pe lîngă mărimile primitive specifice altor domenii ale fizicii (exemplu : lungime, masă, timp, temperatură etc.). Dintre aceste șase mărimi, patru caracterizează starea electromagnetică a corpurilor, iar două caracterizează starea cîmpului electromagnetic.

Starea electromagnetică a corpurilor se caracterizează cu următoarele *mărimi primitive* :

— sarcina electrică, q ;

— momentul electric, $\bar{p}$;

— intensitatea curentului electric de conducție, i ;

— momentul magnetic, $\bar{m}$.

Starea locală (punctuală) *a cîmpului electromagnetic* se caracterizează macroscopic cu ajutorul următoarelor *mărimi vectoriale* :

— intensitatea cîmpului electric, $\bar{E}$;

— inducția electrică, $\bar{D}$;

— intensitatea cîmpului magnetic, $\bar{H}$;

— inducția magnetică, $\bar{B}$,

din care, ca *mărimi primitive* se poate alege perechea $\bar{E}$ și $\bar{B}$, întrucît între cele două mărimi electrice ($\bar{E}$, $\bar{D}$), respectiv cele două mărimi magnetice ($\bar{H}$, $\bar{B}$) exista cîte o relație de legătură.

În afară de mărimile primitive menționate mai sus, în teoria fenomenelor electromagnetice se folosesc și mărimi derivate, dintre care menționăm : fluxul electric, tensiunea electrică, fluxul magnetic, capacitatea electrică, rezistența electrică, inductanța etc.

Trebuie atrasă atenția asupra faptului că mărimile fizice reprezintă proprietăți ale materiei care sînt reproductibile experimental și că nu este necesar și nici admisibil să li se asocieze nici o substanță sau fluid străin de sistemul fizic descris prin mărimile considerate. Sarcina electrică, spre exemplu, nu este o substanță specială, ci o mărime de stare a corpurilor, ca și temperatura sau alte mărimi.

Mărimile fizice pot fi scalare, vectoriale sau tensoriale. În studiul electrotehnicii este necesar să se facă o distincție clară între mărimile scalare și cele vectoriale, anumite mărimi ca : masa, sarcina electrică, potențialul electric sînt mărimi scalare, iar altele ca : forța, viteza, intensitatea cîmpului sînt mărimi vectoriale. Mărimile scalare se caracterizează prin valoarea lor numerică, iar cele vectoriale au, pe lîngă valoare, o direcție și un sens. O mărime vectorială se exprimă prin produsul dintre valoarea sa (scalară) și *vectorul unitar* (*versorul*) :

$$\bar{A} = A\bar{u}_A. \tag{3}$$

Se numesc *mărimi fizice fundamentale* cele ale căror unități sînt alese fundamentale — independente de altele — în cadrul unui sistem de unități. Mărimile fizice fundamentale fac parte, de obicei, din grupa mărimilor primitive. Numărul mărimilor fundamentale este mai mic, cel mult egal, cu cel al mărimilor primitive.

4. LEGI ȘI TEOREME

Se numesc *legi*, în fizică, relațiile exprimate între mărimi fizice prin propoziții sau analitic, care descriu sub forma cea mai generală cunoștințele despre fenomenele domeniului la care se referă. Relațiile ce exprimă legile sînt fundamentate experimental și nu pot fi stabilite printr-o deducție logică din alte relații.

Unele relații între mărimile fizice, care se pot deduce prin analiză logică din altele, în ultimă instanță din legi, se numesc *teoreme*.

Există relații care la data enunțării lor au avut rol de legi, ulterior devenind teoreme datorită descoperirii unor legi mai generale, din care relațiile inițiale au putut fi deduse (exemplu : legea lui Coulomb, devenită teoremă).

În electrotehnică, legile se exprimă fie sub formă integrală, fie sub formă diferențială (locală). În cadrul prezentului curs se va folosi forma integrală a legilor.

Studiul fenomenelor electromagnetice, ca de altfel al fenomenelor oricărui domeniu al fizicii, se face în următoarea succesiune :

— se introduc mărimile primitive și principalele mărimi derivate ;

— se expun legile și teoremele aferente acestor fenomene ;

— se verifică practic consecințele legilor, în limitele aproximației dată de teoria adoptată.

5. REGIMURILE MĂRIMILOR ELECTRICE ŞI MAGNETICE

În teoria macroscopică fenomenologică, mărimile primitive sau derivate ce intervin în studiul fenomenelor electromagnetice sînt, în general, funcţii de spaţiu şi de timp. După modul de variaţie în raport cu timpul a acestor mărimi se disting mai multe regimuri.

Regimul static se caracterizează, pe de o parte, prin particularitatea că toate mărimile sînt constante în timp, adică derivatele lor în raport cu timpul sînt nule, iar, pe de altă parte, prin lipsa posibilităţii de a transforma energia din formele electrică sau magnetică, în alte forme de energie. De asemenea, acest regim se caracterizează prin starea de imobilitate relativă a corpurilor. Există un regim static pentru cîmpul electric, numit *regim electrostatic*, şi un regim static pentru cîmpul magnetic, produs de magneţii permanenţi, numit *regim magnetostatic*.

Regimul staţionar presupune toate mărimile constante în timp, dar cu posibilitatea transformării energiei cîmpului electric şi magnetic în alte forme de energie.

Regimul cvazistaţionar se caracterizează prin variaţii suficient de lente ale mărimilor în raport cu timpul, în aşa fel încît curentul de deplasare este neglijabil faţă de curentul de conducţie, peste tot, cu excepţia dielectricului condensatoarelor.

Regimul nestaţionar corespunde situaţiei în care mărimile electrice şi magnetice variază rapid în timp.

Partea I

ELECTROSTATICA
ELECTROCINETICA
ELECTRODINAMICA
CIRCUITE ŞI REŢELE ELECTRICE

Capitolul 1

ELECTROSTATICA

Electrostatica se ocupă cu studiul stărilor şi fenomenelor determinate de prezenţa sarcinilor electrice constante în timp, situate pe corpuri în stare de repaus în raport cu un sistem de referinţă. Cu alte cuvinte, electrostatica este partea electrotehnicii care se referă la regimul static al cîmpului electromagnetic, caracterizat, pe de o parte, prin particularitatea că *toate mărimile electrice de stare sînt constante în timp* (derivatele lor în raport cu timpul sînt nule) iar *mărimile magnetice sînt nule* şi, pe de altă parte, prin *lipsa posibilităţii de transformare a energiei electrice în alte forme de energie.*

Mărimile fizice primitive necesare şi suficiente pentru caracterizarea stării electrice a corpurilor sînt : sarcina electrică Q şi momentul electric $\bar{p}$. Mărimile de stare locală (punctuală) ale cîmpului electric sînt : intensitatea cîmpului electric $\bar{E}$ şi inducţia electrică $\bar{D}$, dintre care numai una este mărime primitivă.

Pe lîngă mărimile primitive, se folosesc în cadrul electrostaticii şi anumite mărimi derivate ca : densitatea de sarcină electrică, potenţialul electric, capacitatea electrică etc.

1.1. SARCINA ELECTRICĂ

1.1.1. EXISTENŢA ŞI NATURA SARCINILOR ELECTRICE

Sarcina electrică este o mărime fizică scalară ce intervine în studiul stării de electrizare a corpurilor.

Starea de electrizare a corpurilor prin încărcarea lor cu sarcini electrice poate fi pusă în evidenţă prin experienţe simple. Astfel, dacă se freacă o vergea de sticlă sau o bară de ebonită cu o bucată de postav din lînă şi apoi se separă cele două corpuri frecate, se constată că între ele, precum şi asupra altor copuri uşoare din apropiere, se exercită forţe şi cupluri (acţiuni ponderomotoare) care înainte de frecare nu existau. Sistemul format din cele două corpuri frecate se spune că se găseşte în *stare de electrizare*, respectiv că, în urma frecării, corpurile s-au încărcat cu sarcini electrice. Vergeaua de sticlă se încarcă cu sarcini electrice pozitive, iar bara de ebonită se încarcă cu sarcini electrice negative.

Experienţa arată că, în afară de frecare, corpurile mai pot fi aduse în stare de electrizare şi prin alte metode, cum ar fi : prin atingerea (contactul) corpului

neelectrizat de un corp electrizat, prin apropierea corpului neelectrizat de un corp electrizat (influență electrostatică), prin acțiuni electrochimice (pile electrice), prin iradiere cu radiații luminoase sau alte radiații (efect fotoelectric, ionizare etc.), prin încălzirea conductoarelor (emisiune electronică) etc.

Pentru a înțelege trecerea corpurilor în stare de electrizare, respectiv încărcarea lor cu sarcini electrice, este necesar să ne referim la structura atomului material.

Sarcina electrică negativă elementară (cuanta de sarcină electrică) aparține electronului, avînd valoarea : $q=-1{,}602\cdot 10^{-19}$ C. Protonul din nucleu conține sarcina electrică pozitivă elementară, egală ca valoare cu sarcina electronului.

Un corp este încărcat cu sarcini electrice negative atunci cînd are un surplus de electroni și, este încărcat cu sarcini electrice pozitive cînd are un deficit de electroni. Acest surplus sau deficit de electroni se obține prin oricare din mijloacele de electrizare amintite mai sus.

Ionii pozitivi, sau negativi sînt molecule electrizate, care au lipsă un număr de electroni sau care au un surplus de electroni.

În teoria macroscopică a fenomenelor electrice și magnetice se admite că *sarcina electrică* a unui corp are *structură continuă*, ceea ce înseamnă că poate obține orice valoare pozitivă sau negativă. În schimb, *în teoria microscopică* (teoria electronilor) se ține seama de *structura discontinuă* a sarcinii electrice, valoarea absolută a acesteia fiind egală cu un multiplu al cuantei de sarcină electrică (sarcina electronului).

Unitatea de măsură a sarcinii electrice, în sistemul de unități MKSA, se numește *coulomb* (simbolul C) și nu depinde de operația de raționalizare a sistemului de unități.

Subliniem faptul că *sarcina electrică este o mărime fizică de stare a corpurilor* și nicidecum un „fluid“ care ar putea exista în corpuri sau în afara lor.

1.1.2. REPARTIȚIA SARCINILOR ELECTRICE

Repartiția sarcinii electrice în corpuri și pe corpuri se descrie cu ajutorul unei mărimi fizice derivate, denumită densitatea de sarcină electrică. Se deosebesc următoarele densități ale sarcinilor electrice :

Densitatea de volum a sarcinilor electrice, corespunzătoare situației cînd sarcinile au o repartiție volumetrică, se definește prin relația :

$$\rho_v=\lim_{\Delta v\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta v}=\frac{dQ}{dv}\left[\frac{C}{m^3}\right], \tag{1-1}$$

unde ΔQ este sarcina electrică cuprinsă în volumul Δv.

Cunoscînd densitatea de volum a sarcinii electrice, sarcina conținută de volumul V al întregului corp este :

$$Q=\int_V \rho_v\, dv. \tag{1-2}$$

Densitatea de suprafață a sarcinilor electrice se referă la situația cînd sarcinile sînt distribuite pe suprafața corpurilor :

$$\rho_s=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta s}=\frac{dQ}{ds}\left[\frac{C}{m^2}\right], \tag{1-3}$$

unde ΔQ este sarcina electrică de pe suprafața Δs.

Sarcina electrică existentă pe toată suprafaţa S a corpului este :

$$Q=\int_S \rho_s \, ds. \tag{1-4}$$

Densitatea de linie a sarcinilor electrice se defineşte prin relaţia :

$$\rho_l=\lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{dQ}{dl} \left[\frac{C}{m}\right]. \tag{1-5}$$

Această mărime se foloseşte atunci cînd sarcinile electrice sînt repartizate pe *corpuri filiforme* (fire subţiri). Un corp este filiform atunci cînd raza r_0 a secţiunii sale transversale este foarte mică (neglijabilă) în raport cu distanţa r de la care se priveşte corpul (fig. 1-1).

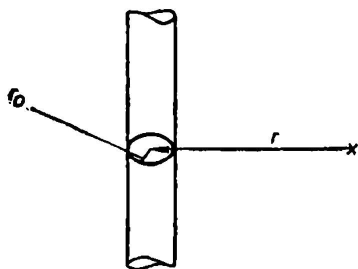


Fig. 1-1. Corp filiform.

Cantitatea totală de sarcină electrică conţinută de un corp filiform de lungime l este :

$$Q=\int_l \rho_l \, dl. \tag{1-6}$$

Sarcina electrică poate fi situată şi pe corpuri a căror dimensiuni geometrice sînt neglijabile în raport cu distanţa ce le separă de alte corpuri, sau în raport cu distanţa de la care sînt privite. Astfel de corpuri se numesc *punctiforme*, iar sarcinile respective se numesc uneori, impropriu, *sarcini electrice punctiforme*.

Dacă într-un domeniu oarecare se găseşte un sistem de corpuri încărcate cu sarcini electrice volumetrice, superficiale, lineiforme şi punctiforme, sarcina electrică totală din acest domeniu este :

$$Q=\int_O \rho_o do+\int_S \rho_s ds+\int_l \rho_l dl+ \sum_{\nu=1}^{n} Q_\nu, \tag{1-7}$$

unde n este numărul de corpuri cu sarcini punctiforme. Sarcina electrică totală a unui sistem izolat de corpuri (sistem de corpuri înconjurat de medii izolatoare) este constantă.

Sarcinile electrice pozitive, respectiv negative, se însumează algebric. Un corp este în stare neutră dacă suma algebrică a sarcinilor electrice pe care le posedă este egală cu zero.

1.1.3. DIPOLUL ELECTRIC

Prin dipol electric (sau dublet electric) se înţelege sistemul format din două corpuri mici, încărcate cu sarcini electrice punctiforme egale şi de semne contrare, $+Q$ şi $-Q$, situate la o distanţă Δl foarte mică (fig. 1-2). Mărimea fizică vectorială care caracterizează dipolul electric este *momentul electric* al dipolului :

$$\bar{p}=Q\Delta\bar{l}, \tag{1-8}$$

unde $\Delta\bar{l}$ este vector orientat de la sarcina negativă spre sarcina pozitivă.

Sarcinile electrice ale dipolului se numesc sarcini dipolare (duble) şi pot apare în volumul unui dielectric sau pe anumite suprafeţe de discontinuitate,

așa cum este cazul suprafețelor de separație dintre electrozi și electroliți la elementele galvanice. În acest ultim caz (fig. 1-3), se folosește mărimea *densitatea de suprafață a momentelor electrice*, definită prin relația :

$$\bar{\tau}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Sigma\bar{p}}{\Delta S}=\tau\bar{n}, \qquad (1\text{-}9)$$

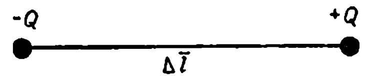


Fig. 1-2. Dipolul electric.

unde $\bar{n}$ este vectorul unitar, normal la suprafață, orientat de la sarcinile negative spre cele pozitive.

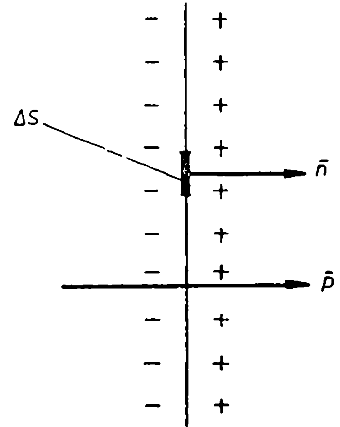


Fig. 1-3. Sarcini electrice duble repartizate pe o suprafață.

1.2. TEOREMA LUI COULOMB

Folosind balanța electrică de torsiune și generalizînd datele experiențelor efectuate, Coulomb a stabilit forța de interacțiune dintre două sarcini electrice punctiforme, Q_1 și Q_2, imobile, situate în vid la distanța r, care este direct proporțională cu produsul sarcinilor și invers proporțională cu pătratul distanței :

$$F=\frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \qquad (1\text{-}10)$$

factorul de proporționalitate fiind $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, unde ε_0 este *constanta dielectrică* (permitivitatea) vidului, o constantă fizică cu dimensiuni, a cărei valoare depinde de sistemul de unități folosit. În sistemul de unități MKSA raționalizat

$$\varepsilon_0=\frac{1}{4\pi\, 9\cdot 10^9}\,[\mathrm{F/m}].$$

Experiențele efectuate au arătat că corpurile încărcate cu sarcini electrice de același semn se resping iar cele încărcate cu sarcini de semne contrarii se atrag.

Forma vectorială de exprimare a teoremei lui Coulomb rezultă din fig. 1-4 :

$$\bar{F}_{12}=\frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}^2}\,\bar{u}_{r12}, \qquad \bar{F}_{21}=\frac{Q_2Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}^2}\,\bar{u}_{r21}, \qquad (1\text{-}11)$$

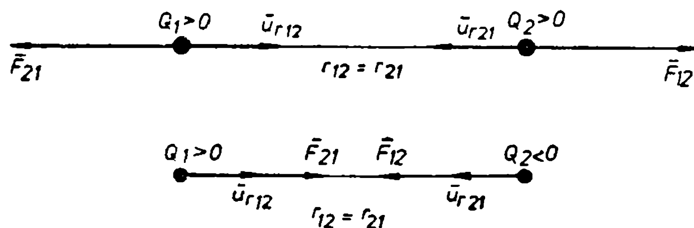


Fig. 1-4. Forțe coulombiene.

unde $\bar{u}_{r12}$ şi $\bar{u}_{r21}$ sînt vectorii unitari (versorii). Avînd în vedere că $r_{12}=r_{21}$ şi că $\bar{u}_{r12}=-\bar{u}_{r21}$, rezultă $\bar{F}_{12}=-\bar{F}_{21}$, iar ca valoare $F_{12}=F_{21}$, ceea ce ne permite să exprimăm cele două forţe din (1-11) printr-o relaţie vectorială unică :

$$\bar{F}=\frac{Q_1Q_2}{4\,\pi\varepsilon_0 r^2}\,\bar{u}_r. \tag{1-12}$$

În cazul cînd interacţionează între ele mai mult decît două sarcini electrice punctiforme, situate pe corpuri în vid, pentru a determina cu ajutorul teoremei lui Coulomb forţa rezultantă ce acţionează asupra unui corp, se aplică *princi-*

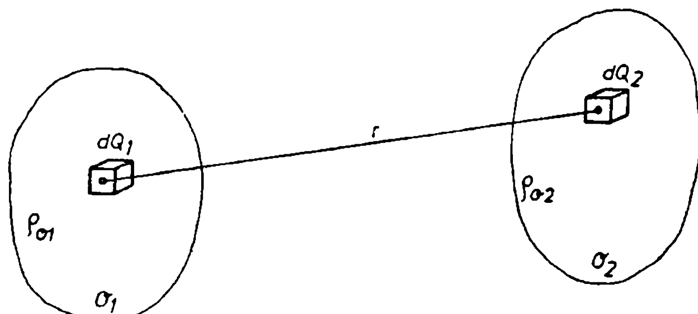


Fig. 1-5. Figură explicativă pentru teorema lui Coulomb generalizată.

piul superpoziţiei, adică se determină forţele dintre toate perechile posibile de sarcini electrice, apoi se însumează geometric (vectorial) forţele ce acţionează asupra unui corp.

Generalizarea teoremei lui Coulomb pentru sarcini electrice care nu sînt punctiforme, ci repartizate cu densităţile ρ_{o1} şi ρ_{o2} în corpurile de volum O_1 şi O_2 (fig. 1-5) se obţine considerînd sarcinile elementare punctiforme $dQ_1=\rho_{o1}do_1$, $dQ_2=\rho_{o2}\,do_2$ între care se exercită forţa

$$d^2\bar{F}=\frac{dQ_1\,dQ_2}{4\,\pi\varepsilon_0 r^2}\,\bar{u}_r=\frac{\rho_{o1}\rho_{o2}\,do_1\,do_2}{4\,\pi\varepsilon_0\,r^2}\,\bar{u}_r, \tag{1-13}$$

de unde rezultă formula generalizată :

$$\bar{F}=\int_{O_1}\int_{O_2}\frac{\rho_{o1}\rho_{o2}\,do_1\,do_2}{4\,\pi\varepsilon_0 r^2}\,\bar{u}_r. \tag{1-14}$$

Teorema lui Coulomb prezentată mai sus se încadrează în teoria acţiunii la distanţă asupra fenomenelor electrice, care nu presupune existenţa cîmpului electric în spaţiul înconjurător sarcinilor electrice. Azi este unanim acceptată existenţa cîmpului electric ca o formă obiectivă a materiei, iar acţiunile ponderomotoare se transmit, nu instantaneu, ci prin intermediul cîmpului, din aproape în aproape.

Aplicaţia 1-1. Două sarcini electrice punctiforme şi pozitive, de valori egale, $Q_1=Q_2=$ 4 C, sînt situate în vid la distanţa de 2 m. Să se determine sarcina punctiformă Q_3 ce trebuie aşezată la jumătatea distanţei dintre sarcinile Q_1 şi Q_2, astfel ca sistemul celor trei sarcini să fie în echilibru (forţele rezultante ce acţionează asupra lor să fie nule).

Rezolvare. Forţa ce acţionează asupra sarcinii Q_1 este :

$$\bar{F}_1=\bar{F}_{21}+\bar{F}_{31}=\frac{Q_1Q_2}{4\,\pi\varepsilon_0 r_{21}}\,\bar{u}_{r21}+\frac{Q_1Q_3}{4\,\pi\varepsilon_0 r_{31}}\,\bar{u}_{r31}=0,$$

de unde, ținînd seama că $\bar{u}_{r21}=\bar{u}_{r31}$, rezultă :

$$Q_3=-\frac{r_{31}}{r_{21}}Q_2=-2\ \text{C}.$$

Aceeași valoarea se obține pentru Q_3 punînd condiția ca $\bar{F}_2=\bar{F}_{12}+\bar{F}_{32}=0$. De asemenea, în aceste condiții rezultă : $\bar{F}_3=\bar{F}_{13}+\bar{F}_{23}=0$

Aplicația 1-2. Se suspendă în același punct, cu ajutorul a două fire de mătase inextensibile, de greutate neglijabilă și de lungime $l=10$ cm fiecare, două corpuri punctiforme de aceeași masă $m=10^{-3}$ kg, încărcate cu sarcini electrice egale și de același semn, $Q=1{,}5\cdot10^{-7}$ C. Să se determine unghiul de deviație α dintre un fir și verticală, corespunzător poziției de echilibru a corpurilor (fig. 1-6).

Rezolvare. Asupra fiecărui corp acționează două forțe : forța electrică de respingere dintre sarcini $\bar{F}_e=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0(2a)^2}\bar{u}_a$ și forța gravitației $\bar{F}_g=m\bar{g}$. Corpul este în echilibru dacă forța rezultantă $\bar{F}=\bar{F}_e+\bar{F}_g$ are direcția firului de suspensie, cînd este echilibrată de forța $\bar{T}$ din fir. Din figură rezultă :

$$F_e=F_g\,\text{tg}\,\alpha,$$

adică

$$\frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0 l^2\sin^2\alpha}=mg\,\text{tg}\,\alpha,$$

în care s-a înlocuit $a=l\sin\alpha$.

Înlocuind valorile numerice date, se obține o ecuație trigonometrică care, rezolvată în raport cu α, are soluția : $\alpha=45°$.

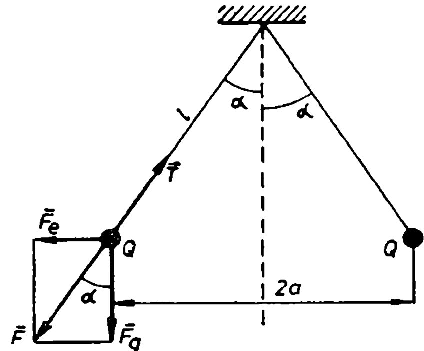


Fig. 1-6. Poziția de echilibru a două corpuri punctiforme suspendate și încărcate cu sarcini electrice egale.

1.3. CÎMPUL ELECTRIC ÎN VID

1.3.1. NOȚIUNEA DE CÎMP

În sens general, prin noțiunea de cîmp se înțelege o formă obiectivă de existență a materiei în mișcare, deosebită față de forma substanță. În urma studiului efectuat la scară macroscopică și microscopică asupra diverselor stări și fenomene din natură, s-a stabilit existența obiectivă a unor forme de cîmp total deosebite între ele și anume : cîmpul gravitațional, cîmpul electromagnetic, cîmpul unor particule elementare etc. Existența acestor forme de cîmp se pune în evidență prin intermediul acțiunilor ponderomotoare exercitate, în anumite condiții, asupra unor corpuri situate în zona de manifestare a cîmpului.

Cîmpul electromagnetic constituie o unitate între cîmpul electric variabil în timp și cîmpul magnetic variabil în timp. Experiența a dovedit că, în cazul stărilor variabile în timp, variația în timp a cîmpului magnetic determină un cîmp electric variabil în timp și, de asemenea, variația în timp a cîmpului elec-

tric determină un cîmp magnetic variabil în timp (v. legea inducției electromagnetice).

Cîmpul electrostatic este una din stările limită ale cîmpului electromagnetic, determinată de sarcini electrice invariabile în timp, situate pe corpuri în repaus. *Cîmpul magnetostatic* constituie o altă stare limită a cîmpului electromagnetic, determinată de magneți permanenți în repaus.

Studiul unui cîmp de o natură sau alta se face cu ajutorul unor mărimi fizice de stare ale cîmpului care, în general, sînt mărimi vectoriale dependente de spațiu și timp. Astfel, starea locală și instantanee a cîmpului electromagnetic este descrisă complet de patru mărimi vectoriale : intensitatea cîmpului electric $\bar{E}$, inducția electrică $\bar{D}$, intensitatea cîmpului magnetic $\bar{H}$ și inducția magnetică $\bar{B}$. Primele două mărimi $\bar{E}$ și $\bar{D}$ descriu cîmpul electromagnetic din punctul de vedere al proprietăților sale electrice, adică cîmpul electric, iar ultimele două mărimi $\bar{H}$ și $\bar{B}$ descriu cîmpul electromagnetic din punctul de vedere al proprietăților sale magnetice, adică cîmpul magnetic.

Cîmpul electric și cîmpul magnetic, respectiv cîmpul electromagnetic, pot exista atît în interiorul corpurilor, cît și în exteriorul lor (în vid). Aceste cîmpuri sînt sediul unor forme ale energiei și anume : energia electrică, energia magnetică și energia electromagnetică. Forțele și cuplurile cu care aceste cîmpuri acționează asupra unor corpuri arată posibilitatea transformării energiei conținute de ele în alte forme de energie, prin intermediul lucrului mecanic.

1.3.2. INTENSITATEA CÎMPULUI ELECTRIC ÎN VID

Cauzele care produc cîmpul electric în sens larg sînt sarcinile electrice ale corpurilor și cîmpul magnetic variabil în timp. Cîmpul electric produs de sarcinile electrice se mai numește și cîmp electric columbian.

În cele ce urmează, ne referim la cîmpul electrostatic în vid pe care, pentru omogenitatea exprimării, îl numim și cîmp electric în vid.

Mărimea fizică vectorială denumită *intensitatea cîmpului electric în vid*, notată cu $\bar{E}_0$, se definește cu ajutorul legii acțiunii ponderomotoare, adică a forței exercitate asupra unui „corp de probă“ situat în cîmpul electric.

Corpul de probă este un mic corp electrizat, care îndeplinește următoarele calități :

— starea de electrizare a corpului de probă trebuie să fie invariabilă, astfel încît, în condiții exterioare date, forța ce acționează asupra lui să nu se modifice. Aceasta înseamnă o izolare perfectă a corpului de probă față de alte corpuri ;

— sarcina electrică Q_p a corpului de probă trebuie astfel aleasă încît, prin introducerea lui în cîmpul electric, să nu aibă loc o modificare a acestui cîmp ;

— dimensiunile corpului de probă trebuie să fie mici (corp punctiform), astfel încît forța ce acționează asupra lui să nu fie rezultanta forțelor din diferite puncte ale corpului, ci forța din centrul său.

Forma adecvată a corpului de probă este o mică sferă metalică sau metalizată, electrizată și suspendată de un fir izolant.

Experiența a dovedit că forța $\bar{F}$, ce acționează asupra corpului de probă, este direct proporțională cu sarcina Q_p a acestui corp. De asemenea, s-a constatat că modificînd poziția corpului de probă în cîmp, forța ce acționează asupra lui se schimbă atît ca valoare, cît și ca orientare, ceea ce înseamnă că această

forță depinde și de o mărime vectorială ce caracterizează starea cîmpului electric în punctul respectiv, numită *intensitatea cîmpului electric în vid.* Deci :

$$\bar{F}=Q_p\bar{E}_0, \qquad (1\text{-}15)$$

unde sarcina electrică Q_p este o mărime scalară pozitivă sau negativă.

Din relația (1-15), cunoscută și sub denumirea de *legea acțiunii ponderomotoare în cîmpul electric*, rezultă că intensitatea cîmpului electric în vid este numeric egală cu forța ce acționează asupra unității de sarcină electrică pozitivă :

$$\bar{E}_0=\frac{\bar{F}}{Q_p}. \qquad (1\text{-}16)$$

Deoarece sarcina electrică Q_p a corpului de probă trebuie să fie mică, este mai corect ca intensitatea cîmpului electric să se definească prin limita raportului dintre forță și sarcină, cînd sarcina tinde către zero :

$$\bar{E}_0=\lim\frac{\bar{F}}{Q_p\to 0}=\frac{d\bar{F}}{dQ_p}. \qquad (1\text{-}17)$$

Unitatea de măsură a intensității cîmpului electric în sistemul de unități MKSA se numește volt pe metru [V/m].

Folosind teorema lui Coulomb (relația 1-12) și legea acțiunii ponderomotoare în cîmpul electrostatic (relația 1-15) se poate stabili relația de calcul a intensității cîmpului electric determinat într-un punct din spațiu de o sarcină electrică punctiformă. În acest scop se consideră sarcina punctiformă Q care produce cîmpul (fig. 1-7) și Q_p sarcina corpului de probă situat în punctul P din spațiu. Se obține :

$$\bar{F}=\frac{QQ_p}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\bar{u}_r=Q_p\bar{E}_0,$$

de unde rezultă :

$$\bar{E}_0=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\bar{u}_r. \qquad (1\text{-}18)$$

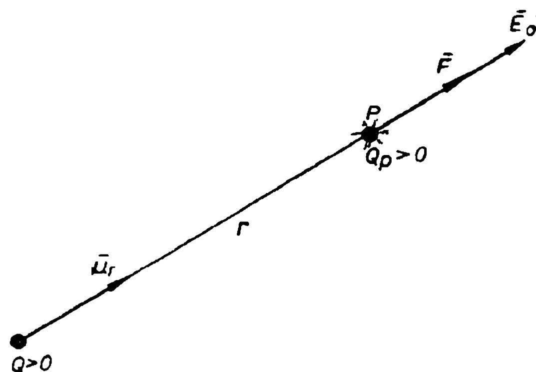


Fig. 1-7. Figură explicativă pentru calculul intensității cîmpului electric produs în vid de un corp punctiform încărcat cu sarcină electrică pozitivă.

Se reține faptul că vectorul de poziție $\bar{r}=r\bar{u}_r$ este orientat de la sarcina Q spre punctul P din spațiu și că valoarea intensității cîmpului electric este invers proporțională cu patratul distanței de la sarcină la punct. În punctele de la infinit, intensitatea cîmpului electric rezultă egală cu zero.

1.3.3. INDUCȚIA ELECTRICĂ ÎN VID

Inducția electrică $\bar{D}$ este o mărime fizică vectorială care, alături de intensitatea $\bar{E}$ a cîmpului electric, caracterizează starea locală a cîmpului electric.

În cazul cînd cîmpul electric are loc în vid, adică într-un spațiu în care nu apare fenomenul de polarizare electrică, inducția electrică se exprimă în funcție de intensitatea cîmpului electric prin relația :

$$\bar{D}_0 = \varepsilon_0 \bar{E}_0, \tag{1-19}$$

unde ε_0 este constanta dielectrică sau permitivitatea vidului.

Unitatea de măsură pentru inducția electrică, în sistemul de unități MKSA, este coulomb pe metru patrat [C/m²], adică aceeași ca și unitatea de măsură pentru densitatea de suprafață a sarcinii electrice.

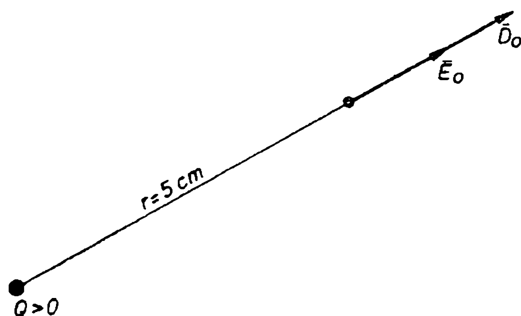


Fig. 1-8. Intensitatea cîmpului electric și inducția electrică în vid produse de un corp punctiform încărcat cu sarcină electrică pozitivă.

Aplicația 1-3. Să se determine intensitatea cîmpului electric și inducția electrică produse de sarcina electrică punctiformă $Q=2,5\cdot10^{-8}$ C într-un punct P situat în vid la distanța $r=5$ cm de sarcină.

Rezolvare. Sarcina electrică care produce cîmpul fiind pozitivă, vectorii $\bar{E}_0$ și $\bar{D}_0$ au orientarea de la sarcină spre infinit (fig. 1-8). Folosind relațiile (1-18) și (1-19) se obțin valorile :

$$E_0 = \frac{2,5\cdot10^{-8}}{4\cdot3,14\,\dfrac{1}{4\cdot3,14\cdot9\cdot10^9}\,5^2\cdot10^{-4}} = 9\cdot10^4 \text{ V/m},$$

$$D_0 = \frac{1}{4\cdot3,14\cdot9\cdot10^9}\,9\cdot10^4 = 8\cdot10^{-7} \text{ C/m}^2.$$

1.3.4. LINIILE CÎMPULUI ELECTRIC

Liniile cîmpului electric sînt acele linii fictive din spațiu, drepte sau curbe, la care vectorul intensității cîmpului electric este tangent în orice punct.

Sensul liniilor de cîmp este același cu sensul vectorului intensității cîmpului electric, adică sensul în care se deplasează în cîmp corpul de probă încărcat cu sarcină electrică pozitivă.

În cîmpul electrostatic liniile de cîmp sînt deschise, adică au un început și un sfîrșit ; liniile cîmpului electrostatic încep din punctele unde sînt situate sarcini electrice pozitive și se sfîrșesc în punctele unde sînt situate sarcini electrice negative. Un astfel de cîmp, care are liniile de cîmp deschise, se numește *cîmp potențial.*

Există și cîmpuri cu liniile de cîmp închise, de exemplu cîmpul magnetic din jurul conductoarelor parcurse de curent. Un astfel de cîmp se numește *cîmp solenoidal* (rotațional).

În vid și în alte medii izotrope (la care constanta dielectrică nu se modifică de la o direcție la alta) vectorul inducției magnetice $\bar{D}$ este coliniar cu vectorul intensității cîmpului electric $\bar{E}$. În acest caz, liniile cîmpului $\bar{E}$ sînt aceleași cu liniile cîmpului $\bar{D}$.

Reprezentînd totalitatea liniilor de cîmp dintr-un plan, se obține *spectrul cîmpului*, care permite formarea unei imagini intuitive asupra cîmpului respectiv. În zonele unde liniile de cîmp sînt mai apropiate între ele, intensitatea cîmpului este de valoare mai mare în raport cu valoarea intensității din zonele unde liniile de cîmp sînt mai îndepărtate.

Liniile cîmpului electric nu se intersectează între ele deoarece ar însemna ca, în punctul de intersecție, să existe două intensități distincte ale cîmpului electric, ceea ce nu ar corespunde realității, intensitatea cîmpului electric fiind univoc determinată în fiecare punct din cîmp.

Spectrele cîmpurilor electrostatice se pot obține experimental cu ajutorul unor cristale mici de gips care, presărate pe o coală de hîrtie ce se scutură încet în cîmp, se distribuie în oarecare măsură după liniile de cîmp.

În fig. 1-9 sînt reprezentate cîteva exemple de spectre ale cîmpului electrostatic.

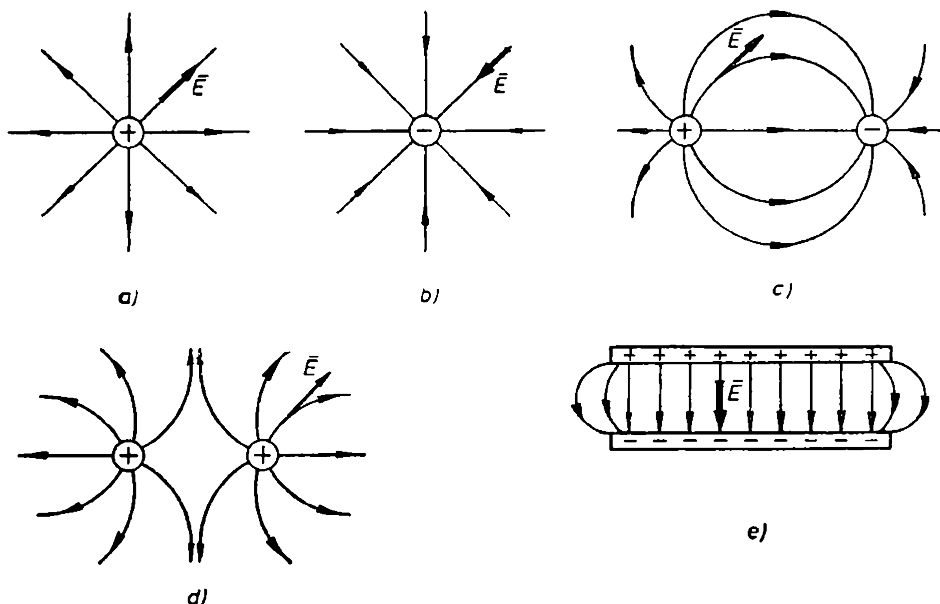


Fig. 1-9. Liniile intensității cîmpului electric :

a și *b* — corp punctiform încărcat cu sarcină electrică pozitivă, respectiv negativă; *c* — două corpuri punctiforme încărcate cu sarcini electrice de semne opuse; *d* — două corpuri punctiforme încărcate cu sarcini electrice de același semn (pozitive); *e* — condensatorul plan.

Dependent de forma liniilor cîmpului electric se disting :

Cîmpul electric complet este acel cîmp determinat de sarcini electrice egale ca valoare dar de semne contrarii, situate pe două corpuri, astfel încît toate liniile cîmpului încep de pe corpul cu sarcini electrice pozitive și se sfîrșesc pe corpul cu sarcini electrice negative.

Cîmpul electric este *omogen* (uniform) atunci cînd intensitatea sa este aceeași în toate punctele (ca valoare și ca orientare). Liniile cîmpului electric omogen sînt drepte paralele echidistante. Un astfel de cîmp există între armăturile unui condensator plan (fig. 1-9, *e*), excluzînd părțile marginale. Cîmpurile care nu îndeplinesc această condiție sînt *neomogene* (neuniforme).

Cîmpul electric este *plan-paralel* dacă spectrul său este același în diverse planuri paralele, așa cum este, de exemplu, cîmpul determinat de sarcinile

electrice uniform distribuite în lungul unui conductor drept situat în vid (sau aer) la distanţă mare de alte corpuri.

Cîmpul electric este *plan-meridian* dacă spectrul său este acelaşi în diverse planuri meridiane, aşa cum este, de exemplu, cîmpul determinat de sarcinile electrice uniform distribuite pe o sferă situată în vid (sau aer) departe de alte corpuri.

Tubul de cîmp este constituit din totalitatea liniilor de cîmp cuprinse în interiorul unei suprafeţe ce se sprijină pe un contur închis şi are o anumită secţiune transversală ΔS (fig. 1-10). Tubul de cîmp este elementar dacă secţiunea sa transversală ΔS este atît de mică încît în toate punctele acestei sec-

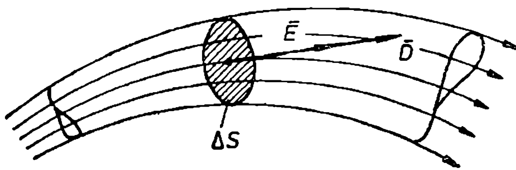


Fig. 1-10. Tubul de cîmp electric.

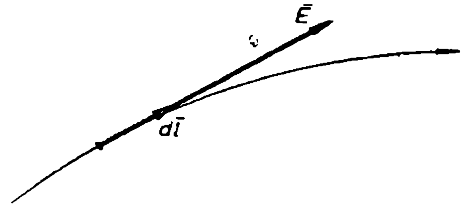


Fig. 1-11. Coliniaritatea între $\bar{E}$ şi $d\bar{l}$.

ţiuni vectorul intensităţii cîmpului electric $\bar{E}$ şi vectorul inducţiei electrice $\bar{D}$ sînt constanţi, adică au aceeaşi valoare şi aceeaşi orientare.

Ecuaţia diferenţială a liniilor de cîmp se obţine avînd în vedere că vectorii $\bar{E}$ şi $d\bar{l}$ sînt coliniari (fig. 1-11), ceea ce înseamnă că produsul lor vectorial este nul : $\bar{E}\times d\bar{l}=0$. În coordonate carteziene avem :

$$\bar{E}=E_x\bar{i}+E_y\bar{j}+E_z\bar{k},$$

$$d\bar{l}=dx\bar{i}+dy\bar{j}+dz\bar{k},$$

$$\bar{E}\times d\bar{l}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ E_x & E_y & E_z\\ dx & dy & dz\end{vmatrix}=(E_y\,dz-E_z\,dy)\,\bar{i}+(E_z\,dx-E_x\,dz)\,\bar{j}+(E_x\,dy-$$

$$-E_y dx)\,\bar{k}=0.$$

Avînd în vedere că un vector este nul cînd sînt nule componentele sale după cele trei axe, rezultă :

$$E_y\,dz-E_z\,dy=0\;;\;E_z\,dx-E_x\,dz=0\;;\;E_x\,dy-E_y\,dx=0,\ \text{adică :}$$

$$\frac{dx}{E_x}=\frac{dy}{E_y}=\frac{dz}{E_z}, \qquad (1\text{-}20)$$

care reprezintă ecuaţia diferenţială a liniilor cîmpului electric în spaţiu (intersecţia a două suprafeţe).

În plan, ecuaţia diferenţială a liniilor de cîmp este :

$$\frac{dx}{E_x}=\frac{dy}{E_y}. \qquad (1\text{-}21)$$

În relațiile de mai sus nu s-a mai pus și indicele zero la vectorul $\bar{E}$, deoarece explicațiile prezentate sînt valabile atît pentru cazul cînd cîmpul electric are loc în vid, cît și într-un mediu dielectric izotrop și fără polarizare electrică permanentă.

1.3.5. FLUXUL INTENSITĂȚII CÎMPULUI ELECTRIC

Fluxul ψ_{E0} al vectorului intensității cîmpului electric în vid se definește prin integrala de suprafață a acestui vector:

$$\psi_{E0}=\int_S \bar{E}_0\, d\bar{s}. \tag{1-22}$$

Acest flux poate fi calculat pentru o suprafață S deschisă, ce se sprijină pe un contur Γ (fig. 1-12, *a*), sau pentru o suprafață închisă S_i (fig. 1-12, *b*). În ambele cazuri trebuie precizat sensul elementului de suprafață ca vector, $d\bar{s}$.

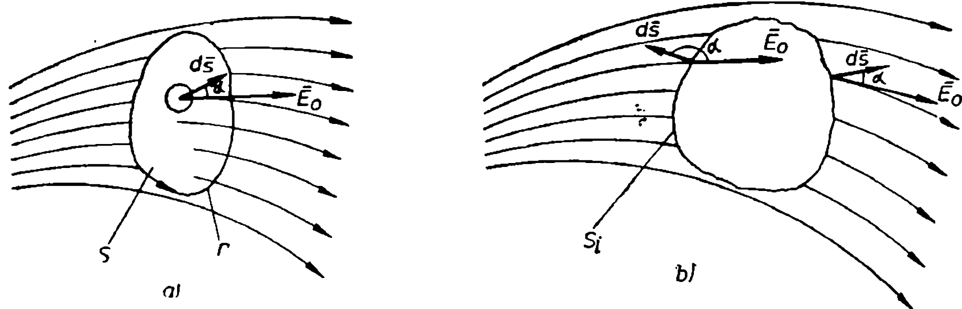


Fig. 1-12. Fluxul intensității cîmpului electric în vid:
a — prin suprafața deschisă; *b* — prin suprafața închisă.

Pentru suprafețele deschise, sensul lui $d\bar{s}$ se stabilește cu regula burghiului drept, în funcție de sensul pozitiv ales arbitrar pe conturul Γ. În cazul suprafețelor închise, sensul lui $d\bar{s}$ se alege întotdeauna orientat spre exteriorul suprafeței, normal la suprafață.

Unghiul α dintre vectorii $\bar{E}_0$ și $d\bar{s}$ poate fi mai mic sau mai mare decît 90°, conducînd la valori pozitive sau negative ale produsului scalar $\bar{E}_0\, d\bar{s}$, respectiv la valori pozitive sau negative ale fluxului ψ_{E0}.

1.3.6. TEOREMA LUI GAUSS

Teorema lui Gauss se referă la fluxul vectorului intensității cîmpului electric în vid calculat pentru o suprafață închisă (forma integrală a teoremei). Conform acestei teoreme, fluxul lui $\bar{E}_0$ printr-o suprafață închisă este proporțional cu suma algebrică a sarcinilor electrice existente pe corpuri în interiorul acestei suprafețe, factorul de proporționalitate fiind $\frac{1}{\varepsilon_0}$, adică:

$$\int_{S_i} \bar{E}_0\, d\bar{s}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum Q. \tag{1-23}$$

Dacă în interiorul suprafeței închise nu există corpuri încărcate cu sarcini electrice, teorema lui Gauss se exprimă prin relația:

$$\int_{S_i} \bar{E}_0 \, d\bar{s} = 0, \qquad (1\text{-}24)$$

care se explică intuitiv prin aceea că numărul liniilor de cîmp ce intră în interiorul suprafeței închise este egal cu numărul liniilor de cîmp ce ies din aceeași suprafață. Cu alte cuvinte, în interiorul suprafeței nu se găsesc sarcini electrice unde să se termine sau de unde să înceapă linii de cîmp.

Aplicația 1-4. Folosind teorema lui Gauss, să se determine intensitatea cîmpului electric produs de o sarcină punctiformă $Q > 0$, într-un punct P situat în vid la distanța r de sarcină.

Rezolvare. Se consideră suprafața sferică (închisă) de raza r în centrul căreia se găsește sarcina Q (fig. 1-13). Datorită simetriei punctelor sferei față de sarcina Q, în toate aceste puncte vectorii $\bar{E}_0$ și $d\bar{s}$ sînt coliniari, iar $E_0 = \text{const.}$ Rezultă:

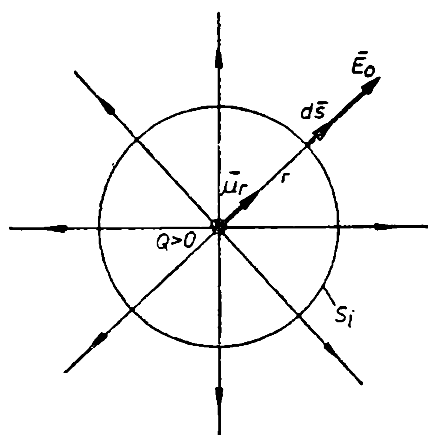


Fig. 1-13. Suprafață sferică de rază r în jurul corpului punctiform încărcat cu sarcina Q.

$$\int_{S_i} \bar{E}_0 \, d\bar{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

adică

$$\int_{S_i} E_0 \, ds = E_0 \int_{S_i} ds = E_0 \, 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

de unde se obține valoarea intensității cîmpului electric:

$$E_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Sau, sub formă vectorială:

$$\bar{E}_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \bar{u}_r,$$

unde $\bar{u}_r$ este versorul vectorului de poziție r orientat de la sarcina Q spre punctul P.

Se remarcă identitatea dintre această ultimă relație, dedusă cu ajutorul teoremei lui Gauss, și relația (1-18), obținută pentru intensitatea cîmpului electric în vid pe baza teoremei lui Coulomb și a legii acțiunii ponderomotoare în cîmpul electric.

Aplicația 1-5. O sferă metalică situată în vid, departe de alte corpuri și de pămînt, are raza $R = 0{,}1$ m și este încărcată cu sarcina electrică superficială Q uniform distribuită, cu densitatea $\rho_s = 10^{-6}$ C/m^2. Folosind teorema lui Gauss, să se determine intensitatea cîmpului electric într-un punct situat la distanța $r = 0{,}2$ m de centrul sferei.

Rezolvare. Se consideră suprafața sferică S_i de rază r concentrică cu sfera metalică (figura 1-14). În baza teoremei lui Gauss avem:

$$\int_{S_i} \bar{E}_0 \, d\bar{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

unde

$$Q = 4\pi R^2 \rho_s.$$

Avînd în vedere că vectorii $\bar{E}_0$ și $d\bar{s}$ sînt coliniari și că valoarea E_0 a intensității cîmpului electric este aceeași în toate punctele suprafeței S_i, rezultă:

$$E_0\, 4\,\pi r^2 = Q,$$

adică

$$E_0 = \frac{Q}{4\,\pi\varepsilon_0 r^2},$$

de unde se observă că intensitatea cîmpului electric are aceeași relație de calcul ca și cum sarcina Q ar fi punctiformă, situată în centrul sferei metalice.

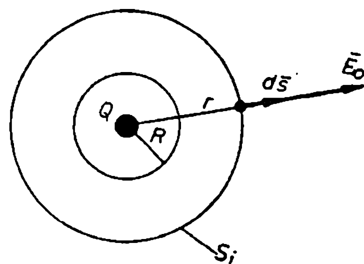


Fig. 1-14. Sferă metalică de rază R încărcată cu sarcină electrică superficială uniform distribuită.

Înlocuind valorile, se obține:

$$E_0 = \frac{R^2\rho_s}{\varepsilon_0 r^2} = \frac{10^{-2}10^{-6}}{\frac{1}{4\cdot 3{,}14\cdot 9\cdot 10^9}\,4\cdot 10^{-2}} = 28{,}26\cdot 10^3 \text{ V/m}.$$

1.3.7. POTENȚIALUL ELECTRIC ȘI TENSIUNEA ELECTRICĂ

Potențialul electric, notat cu V, este o mărime fizică de natură scalară ce caracterizează nivelul local (punctual) de electrizare, a cărei valoare, în cazul general al regimului nestaționar, se modifică atît de la un punct la altul al cîmpului electric, cît și în timp. În regimul electrostatic potențialul electric (electrostatic) este funcție numai de spațiu, $V(x, y, z)$, deci invariabil în timp.

Este cunoscut că în cîmpul gravitațional energia potențială a unui corp se stabilește în funcție de poziția corpului în raport cu o cotă de referință, de exemplu, față de nivelul mării (cota zero). Tot așa, valoarea potențialului într-un punct din cîmpul electric se poate stabili numai în raport cu un potențial electric de referință. Se consideră ca potențiale electrice de referință potențialul pămîntului sau potențialul în punctele situate la distanță foarte mare de corpurile electrizate (la infinit). Valoarea potențialului pămîntului, precum și a tuturor corpurilor metalice legate la pămînt se consideră convențional egală cu zero. De asemenea, este convențional egal cu zero și potențialul în punctele situate la infinit.

Diferența de potențial $V_1 - V_2$ între puncte P_1 și P_2 din cîmpul electrostatic în vid (aer), sau din alt mediu, se poate defini prin intermediul lucrului mecanic corespunzător forței exercitate exclusiv de cîmp asupra corpului de probă ce se deplasează lent, după o traiectorie oarecare, din punctul P_1 în punctul P_2 (fig. 1-15). Deci, $\bar{F} = Q_p\bar{E}_0$ și $dL = \bar{F}\, d\bar{l} = Q_p\bar{E}_0\, d\bar{l}$,

$$L_{1-2} = \int_{P_1}^{P_2} Q_p\bar{E}_0\, d\bar{l},$$

unde $d\bar{l}$ este elementul de traiectorie luat în sensul deplasării. Raportînd acest lucru mecanic la sarcina Q_p a corpului de probă, care se menține constantă tot timpul deplasării, se obține diferența de potențial între cele două puncte:

$$V_1 - V_2 = \frac{L_{1-2}}{Q_p} = \int_{P_1}^{P_2} \bar{E}_0\, d\bar{l}. \qquad (1\text{-}25,\,a)$$

Evident, diferența de potențial între cele două puncte P_1 și P_2 din cîmp nu depinde de drumul (traiectoria) parcursă de la un punct la celălalt, ci numai de coordonatele celor două puncte și de sensul de parcurgere al traiectoriei (sensul pozitiv de integrare), precizat prin sensul elementului de linie $d\bar{l}$. În cazul considerat, sensul pozitiv de integrare este de la punctul P_1 la punctul P_2 (fig. 1-16).

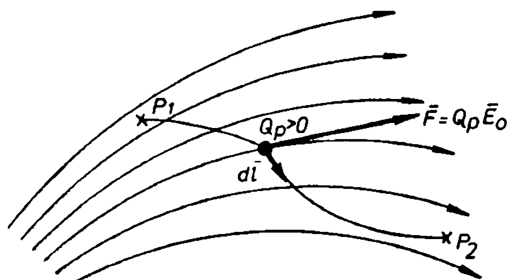


Fig. 1-15. Figură explicativă pentru calculul potențialului electric pe baza lucrului mecanic.

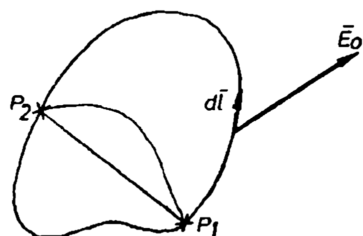


Fig. 1-16. Traiectorii între punctele P_1 și P_2 din cîmpul electric.

Dacă cele două puncte P_1 și P_2 sînt foarte aproape unul de celălalt, la limită se obține diferențiala potențialului electric :

$$dV = \lim_{P_2 \to P_1} (V_2 - V_1) = -\bar{E}_0 \, d\bar{l}. \tag{1-26}$$

Dacă potențialul unuia din cele două puncte este potențial electric de referință, de exemplu $V_2 = V_0$, atunci potențialul electric în celălalt punct: este

$$V_1 = V_0 + \int_{P_1}^{P_0} \bar{E}_0 \, d\bar{l}. \tag{1-25, b}$$

Considerînd P_0 situat la infinit, iar corpurile încărcate cu sarcini ce produc cîmpul situate într-un domeniu limitat, potențialul de referință este egal cu zero și

$$V_1 = \int_{P_1}^{\infty} \bar{E}_0 \, d\bar{l}. \tag{1-25, c}$$

Conform acestei relații, potențialul într-un punct din cîmpul electrostatic este numeric egal cu lucrul mecanic corespunzător forței exercitate de cîmp asupra corpului de probă încărcat cu sarcina electrică unitară și pozitivă, cînd acest corp se deplasează din punctul respectiv la infinit.

Dacă cîmpul electrostatic este produs în vid de un singur corp punctiform încărcat cu sarcina electrică Q, potențialul electric într-un punct P situat la distanța r de corp este :

$$V = \int_P^{\infty} \bar{E}_0 \, d\bar{l} = \int_r^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \bar{u}_r \, d\bar{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2}$$

adică

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}, \tag{1-27}$$

unde s-au înlocuit $d\bar{l} = d\bar{r}$, $\bar{u}_r \, d\bar{r} = dr$.

Din relația (1-27) se remarcă faptul că potențialul electric într-un punct al cîmpului produs de o sarcină electrică punctiformă este direct proporțional cu sarcina și invers proporțional cu distanța de la sarcină la punct. La infinit, potențialul electric rezultă egal cu zero.

Unitatea de măsură pentru potențialul electric, folosită în cadrul sistemului de unități MKSA, se numește volt (simbol V).

Cu ajutorul voltmetrului se măsoară în cîmpul electrostatic întotdeauna, o diferență de potențial (tensiune electrică) între două puncte (borne) : $U = V_1 - V_2$. Chiar și atunci cînd unul din cele două puncte este legat la pămînt (masă), voltmetrul măsoară, nu potențialul electric, ci diferența de potențial față de pămînt. De fapt, *tensiunea electrică* se definește, în general, prin integrala de linie a intensității cîmpului electric în lungul unei curbe deschise sau închise : $u = \int_C \bar{E}\, d\bar{l}$. În cazul cîmpului electrostatic (coulombian) tensiunea electrică în lungul unei curbe deschise coincide cu diferența de potențial între punctele extreme ale curbei.

1.3.8. GRADIENTUL POTENȚIALULUI ELECTRIC

Ținînd seama că potențialul electrostatic este o funcție de spațiu, $V(x, y, z)$, variația potențialului pe distanța orientată $d\bar{l}$ se poate exprima cu ajutorul gradientului potențialului în felul următor :

$$dV = \nabla V\, d\bar{l} = |\nabla V|\, dl \cos\alpha = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz, \qquad (1\text{-}28)$$

unde

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \qquad (1\text{-}29)$$

este operatorul vectorial a lui Hamilton (nabla),

$$d\bar{l} = dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k} \qquad (1\text{-}30)$$

iar

$$\text{grad } V = \nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \bar{k} \qquad (1\text{-}31)$$

este gradientul potențialului electric.

Vectorul gradient, ∇V, *este orientat în sensul în care potențialul are o creștere maximă pe unitate de lungime.* Valoarea $|\nabla V|$ a gradientului reprezintă variația maximă pe unitatea de lungime a potențialului electric.

Cu relația (1-28) se calculează variația de potențial după o direcție oarecare $d\bar{l}$, care poate fi deosebită de direcția vectorului gradient ∇V (fig. 1-17). Evident că, dacă vectorul $d\bar{l}$ este perpendicular pe vectorul ∇V, se obține $dV = 0$, deoarece unghiul dintre cei doi vectori este $\alpha = 90°$.

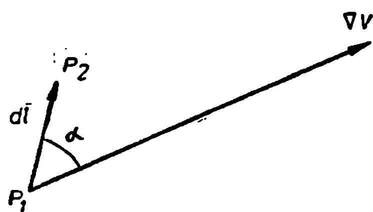


Fig. 1-17. Figură explicativă pentru calculul lui dV.

Comparînd relațiile (1-26) și (1-28) rezultă :

$$\bar{E}_0 = -\nabla V, \qquad (1\text{-}32)$$

ceea ce înseamnă că intensitatea cîmpului electrostatic se poate exprima prin gradientul cu semn schimbat al potențialului electrostatic.

Ținînd seama că vectorul gradient este orientat întotdeauna, în sensul în care funcția scalară (potențialul) crește, conform relației (1-32) *vectorul intensității cîmpului electric este, întotdeauna, orientat în sensul în care potențialul electric scade.*

Aplicație. Să se calculeze intensitatea cîmpului electric produs în vid de o sarcină electrică punctiformă prin intermediul gradientului potențialului electric.

Rezolvare. Se consideră potențialul determinat într-un punct P din spațiu de o sarcină electrică punctiformă $Q>0$ situată în punctul P_0 (fig. 1-18). Rezultă :

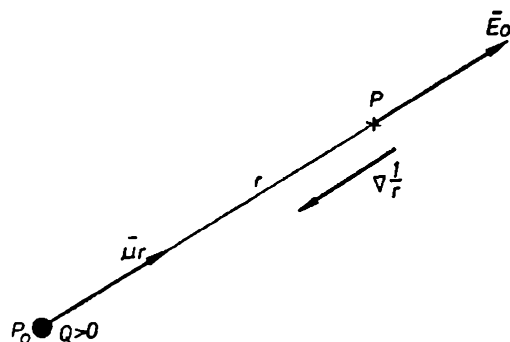


Fig. 1-18. E_0 și gradientul lui $\frac{1}{r}$ în extremitatea lui r.

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

$$\bar{E}_0 = -\nabla V = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\bar{u}_r,$$

unde gradientul funcției scalare de spațiu $\frac{1}{r}$, calculat în extremitatea P a vectorului $\bar{r}$, este :

$$\nabla\frac{1}{r} = -\frac{\bar{u}_r}{r^2}.$$

Se remarcă faptul că expresia obținută mai sus pentru $\bar{E}_0$ este aceeași cu cea dată de relația (1-18).

1.3.9. TEOREMA POTENȚIALULUI ELECTROSTATIC

Se consideră un cîmp electric de intensitate $\bar{E}_0$, în vid și în el un contur Γ închis (fig. 1-19), de-a lungul căruia se deplasează încet un corp punctiform încărcat cu sarcina electrică $Q_p>0$, în așa fel încît în nici un moment să nu fie depășite limitele regimului electrostatic. Forța columbiană ce acționează asupra corpului este $\bar{F}=Q_p\bar{E}_0$.

Lucrul mecanic al forței columbiene $\bar{F}$, atunci cînd corpul încărcat cu sarcina Q_p se deplasează de-a lungul conturului închis $P-P_1-P_2-P_3-P$, este egal cu zero, respectiv diferența de potențial între punctul de început și punctul de sfîrșit a traiectoriei este nulă :

$$V_p - V_p = 0 = \oint \bar{E}_0\, d\bar{l}. \qquad (1\text{-}33)$$

Această relație exprimă teorema potențialului electrostatic sub formă integrală, adică *circulația vectorului intensității cîmpului $\bar{E}_0$ pe un contur închis este nulă.*

În sens fizic, teorema potențialului electrostatic precizează că *în cîmpul electrostatic nu are loc o transformare de energie dintr-o formă în alta prin intermediul lucrului mecanic.* Cu alte cuvinte, cîmpul electrostatic se întreține fără un aport de energie din exterior.

Teorema potențialului electrostatic nu este valabilă în cazul cîmpului electric variabil (v. legea inducției electromagnetice).

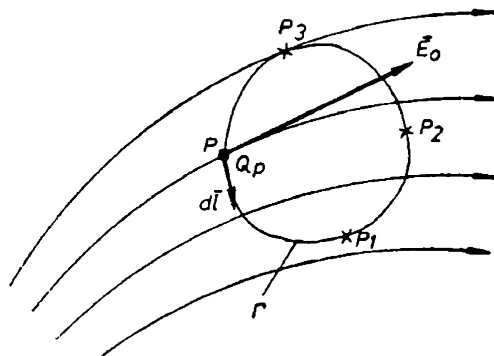


Fig. 1-19.

1.3.10. LINII ȘI SUPRAFEȚE ECHIPOTENȚIALE. ORTOGONALITATEA DINTRE LINIILE DE CÎMP ȘI LINIILE ECHIPOTENȚIALE

Suprafața echipotențială este acea suprafață fictivă din spațiu ce unește toate punctele în care potențialul electric are aceeași valoare ($V =$ const.). Intersecția dintre suprafața echipotențială și oricare altă suprafață determină o *linie echipotențială.*

Pentru aprecierea regiunilor de cîmp mai intens sau mai puțin intens, se trasează liniile echipotențiale, astfel încît diferența de potențial între două linii vecine să fie aceeași. Acolo unde liniile echipotențiale sînt mai apropiate, cîmpul este mai intens și este mai puțin intens unde sînt mai depărtate.

În fig. 1-20 sînt reprezentate spectrele liniilor echipotențiale și liniilor de cîmp pentru cîmpul produs de o sarcină electrică punctiformă pozitivă, respectiv de două sarcini electrice punctiforme egale și de semne opuse.

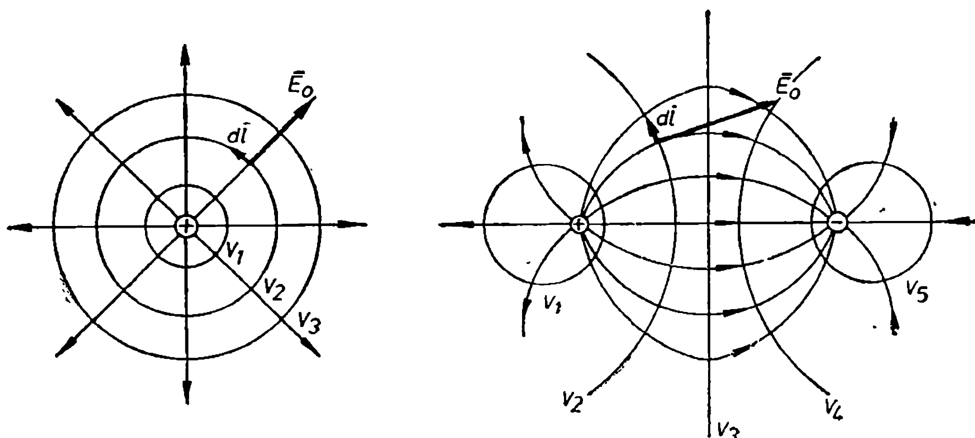


Fig. 1-20. Linii de cîmp și linii echipotențiale.

Liniile de cîmp și liniile echipotențiale sînt ortogonale între ele, ceea ce se justifică simplu considerînd elementul de linie $d\bar{l}$ în lungul liniei echipotențiale ($V =$ const.) și calculînd variația potențialului de-a lungul acestei

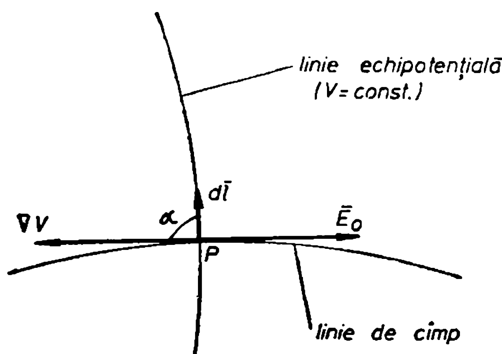


Fig. 1-21. Ortogonalitatea între linia de cîmp electric și linia echipotențială.

distanțe infinit mici (fig. 1-21). Rezultă (relația 1-28) :

$$dV = 0 = \nabla V\, d\bar{l} = |\nabla V|\, dl \cos\alpha,$$

adică unghiul α dintre vectorul dl și vectorul gradient ∇V trebuie să fie 90°. Cum vectorul $\bar{E}_0 = -\nabla V$ este tangent la linia de cîmp, înseamnă că linia echipotențială și linia de cîmp, ce trec prin punctul P (fig. 1-21), sînt ortogonale.

La aplicația 1-11 se prezintă un exemplu de stabilire a ecuației liniilor echipotențiale.

1.3.11. EXEMPLE DE CALCUL A CÎMPULUI ELECTRIC COULOMBIAN ÎN VID

În cele ce urmează se arată cum se calculează intensitatea cîmpului electric și potențialul electric în diferite puncte din spațiu, atunci cînd cîmpul este produs de :

— sarcini electrice aparținînd unor corpuri punctiforme ;
— sarcini electrice cu repartiție volumetrică ;
— sarcini electrice cu repartiție superficială ;
— sarcini electrice repartizate pe corpuri filiforme ;
— dipolul electric ;
— sarcini electrice duble, repartizate pe o suprafață.

Mai întîi se precizează că, pentru calculul cîmpului electric coulombian existent în vid și medii liniare se aplică principiul superpoziției, adică al suprapunerii efectelor. Conform acestui principiu, dacă există n corpuri încărcate cu sarcini electrice care produc cîmpul, determinarea intensității cîmpului electric (ca vector) într-un punct din spațiu se face calculînd intensitatea cîmpului electric produs de fiecare corp (sarcină electrică) în parte și însumînd geometric (vectorial) rezultatele. Analog se procedează și la determinarea potențialului electric numai că, în acest caz, însumarea se face algebric deoarece potențialul electric este o mărime scalară (pozitivă sau negativă).

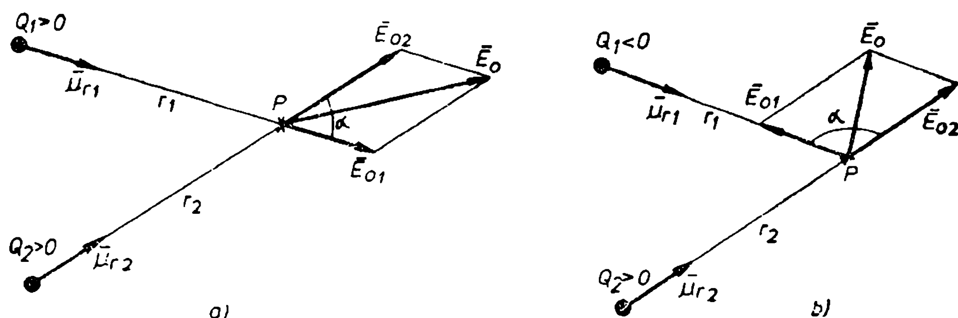


Fig. 1-22. Cîmpul determinat în vid de două corpuri punctiforme :
a — încărcate cu sarcini de același semn (pozitive) ; *b* — încărcate cu sarcini de semne opuse.

a. **Cîmpul coulombian determinat de sarcini electrice ce aparţin corpurilor punctiforme.** Se consideră cîmpul electric determinat de două corpuri punctiforme, încărcate cu sarcinile electrice Q_1 şi Q_2, ambele pozitive (figura 1-22, *a*), respectiv de semne contrarii (fig. 1-22, *b*).

Potenţialul V şi intensitatea cîmpului electric $\bar{E}_0$ în punctul P se determină cu relaţiile :

$$V = V_1 + V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2},$$

$$\bar{E}_0 = \bar{E}_{01} + \bar{E}_{02} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}\bar{u}_{r1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}\bar{u}_{r2},$$

$$E_0 = \sqrt{E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02}\cos\alpha}.$$

În general, dacă cîmpul electric este determinat de n sarcini punctiforme Q_1, Q_2, Q_3, ..., Q_n, avem :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{Q_\nu}{r_\nu}, \qquad (1\text{-}34)$$

$$\bar{E}_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{Q_\nu}{r_\nu^2}\bar{u}_r. \qquad (1\text{-}35)$$

b. **Cîmpul coulombian determinat de sarcini electrice cu repartiţie volumetrică.** Fie O volumul corpului încărcat cu sarcini electrice volumetrice cu densitatea ρ_0 (fig. 1-23). Un cub elementar, de volum do, conţine sarcina dQ = $=\rho_0$do, care este punctiformă faţă de punctul P situat la distanţa r, în exteriorul corpului.

Potenţialul electric şi intensitatea cîmpului electric determinate în punctul P de sarcina elementară dQ sînt :

$$dV = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho_0\, do}{4\pi\varepsilon_0 r}, \qquad (1\text{-}36)$$

$$d\bar{E}_0 = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\bar{u}_r = \frac{\rho_0\, do}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\bar{u}_r. \qquad (1\text{-}37)$$

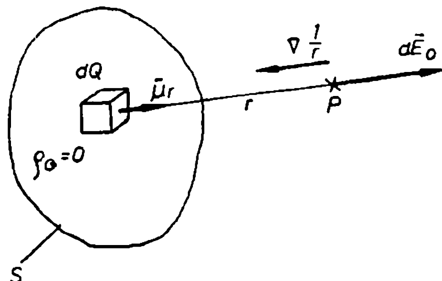


Fig. 1-23. Corp încărcat cu sarcini electrice volumetrice.

Între aceste două mărimi există legătura

$$d\bar{E}_0 = -\nabla(dV) = -\frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\frac{1}{r},$$

unde

$$\nabla\frac{1}{r} = -\frac{\bar{u}_r}{r^2}.$$

Întreaga sarcină a corpului

$$Q = \int_O \rho_0\, do$$

determină în punctul P potențialul electric și intensitatea cîmpului electric deduse din relațiile (1-36) și (1-37):

$$V=\int \mathrm{d}V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_O \frac{\rho_0\, \mathrm{d}v}{r}, \tag{1-38}$$

$$\bar{E}_0=\int \mathrm{d}\bar{E}_0=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_O \frac{\rho_0\, \mathrm{d}v}{r^2}\bar{u}_r. \tag{1-39}$$

În aceste două relații $r\neq$ const. deoarece corpul nu este punctiform. Ca urmare, r nu poate fi scos de sub semnul integral. De asemenea, în cazul mai general $\rho_0\neq$ const. Numai în cazul cînd sarcinile electrice sînt uniform distribuite în volumul corpului rezultă $\rho_0=$ const. și această mărime poate fi scoasă în fața integralei.

Dacă vectorul de poziție este orientat de la punctul P la sarcină, expresiile (1-37) și (1-39) rezultă cu semn minus iar $\nabla\frac{1}{r}=\frac{\bar{u}_r}{r^2}$ (calculat în originea vectorului de poziție).

c. **Cîmpul coulombian determinat de sarcini electrice cu repartiție superficială.** Analog cu cele explicate la punctul b) de mai sus și ținînd seama de notațiile din fig. 1-24, rezultă:

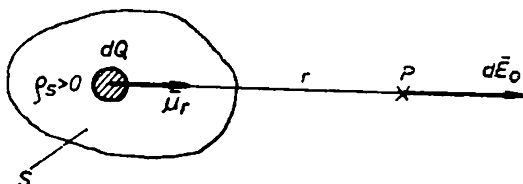


Fig. 1-24. Suprafață încărcată cu sarcini electrice.

$$\mathrm{d}Q=\rho_s\,\mathrm{d}s,$$

$$\mathrm{d}V=\frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\rho_s\,\mathrm{d}s}{4\pi\varepsilon_0 r}, \tag{1-40}$$

$$\mathrm{d}\bar{E}_0=\frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\bar{u}_r=\frac{\rho_s\,\mathrm{d}s}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\bar{u}_r, \tag{1-41}$$

unde ds este elementul de suprafață, iar ρ_s este densitatea superficială a sarcinii electrice.

Prin integrarea relațiilor (1-40) și (1-41) se obțin V și $\bar{E}_0$:

$$V=\int_S \mathrm{d}V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\rho_s\,\mathrm{d}s}{r}. \tag{1-42}$$

$$\bar{E}_0=\int_S \mathrm{d}\bar{E}_0=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\rho_s\,\mathrm{d}s}{r^2}\bar{u}_r. \tag{1-43}$$

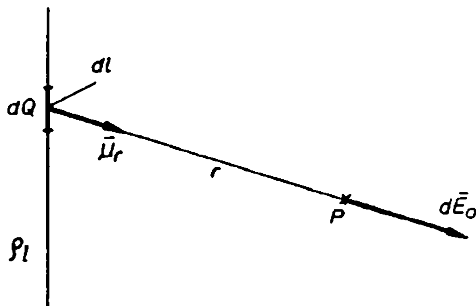


Fig. 1-25. Corp filiform încărcat cu sarcină electrică.

d. **Cîmpul coulombian determinat de sarcini electrice ce aparțin corpurilor filiforme.** Se consideră în fig. 1-25 un corp filiform în lungul căruia este repartizată sarcina electrică cu densitatea liniară ρ_l. Potențialul electric

şi intensitatea cîmpului electric într-un punct P din cîmpul creat de această sarcină sînt :

$$dQ = \rho_l dl,$$

$$dV = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\rho_l\, dl}{4\pi\varepsilon_0 r}, \tag{1-44}$$

$$d\bar{E}_0 = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\bar{u}_r = \frac{\rho_l\, dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\bar{u}_r, \tag{1-45}$$

$$V = \int_l dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \frac{\rho_l\, dl}{r}, \tag{1-46}$$

$$\bar{E}_0 = \int_l d\bar{E}_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \frac{\rho_l\, dl}{r^2}\bar{u}_r, \tag{1-47}$$

unde dl este elementul de linie.

La aplicaţia 1-10 se prezintă formula logaritmică a potenţialului electric determinat de sarcini electrice lineiforme, uniform distribuite în lungul unui conductor drept, infinit de lung.

e. **Cîmpul dipolului electric.** Se consideră în fig. 1-26 dipolul electric format din sarcinile punctiforme $+Q$ şi $-Q$, situate la distanţa Δl între ele. Momentul electric al dipolului este :

$$\bar{p} = Q\Delta\bar{l}. \tag{1-48}$$

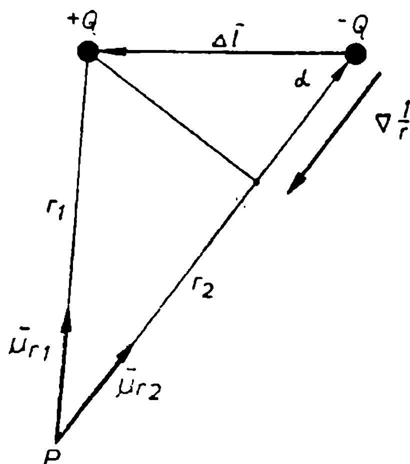


Fig. 1-26. Dipolul electric.

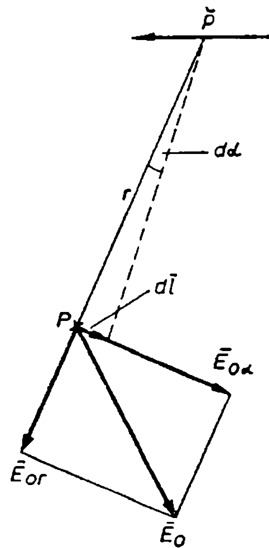


Fig. 1-27. Componentele intensităţii cîmpului electric determinat în vid de dipol.

Potenţialul în punctul P se calculează astfel :

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

unde se ţine seama că $r_1 \cong r_2 = r$, deci

$$\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_1} = \frac{r_2 - r_1}{r^2} = \frac{\Delta l \cos \alpha}{r^2}.$$

Prin urmare:

$$V = \frac{Q \Delta l \cos \alpha}{4 \pi \varepsilon_0 r^2} = \frac{p \cos \alpha}{4 \pi \varepsilon_0 r^2} \tag{1-49}$$

sau

$$V = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \bar{p} \nabla \frac{1}{r}, \tag{1-50}$$

unde

$$\left| \nabla \frac{1}{r} \right| = \frac{1}{r^2}.$$

Se remarcă faptul că, la dipolul electric, potenţialul electric scade în funcţie de distanţă cu $\frac{1}{r^2}$, în timp ce la o sarcină punctiformă scade cu $\frac{1}{r}$.

Intensitatea cîmpului electric în punctul P se determină prin gradientul exprimat în coordonate polare al potenţialului electric:

$$\bar{E}_0 = -\nabla V = \bar{E}_{0r} + \bar{E}_{0\alpha}, \tag{1-51}$$

unde, conform fig. 1-27, valorile componentelor $\bar{E}_{0r}$ şi $\bar{E}_{0\alpha}$ se obţin din expresia (1-49) a potenţialului astfel:

$$E_{0r} = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{p \cos \alpha}{2 \pi \varepsilon_0 r^3}, \tag{1-52}$$

$$E_{0\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial l} = -\frac{\partial V}{r \partial \alpha} = \frac{p \sin \alpha}{4 \pi \varepsilon_0 r^3}. \tag{1-53}$$

Componentele $\bar{E}_{0r}$ şi $\bar{E}_{0\alpha}$ fiind în cuadratură, rezultă:

$$E_0 = \sqrt{E_{0r}^2 + E_{0\alpha}^2}.$$

Se remarcă faptul că intensitatea cîmpului electric determinat de dipol scade în funcţie de distanţă cu $\frac{1}{r^3}$, spre deosebire de cazul sarcinilor electrice punctiforme, pentru care scade cu $\frac{1}{r^2}$.

f. Cîmpul coulombian al sarcinilor electrice duble repartizate pe o suprafaţă. Sarcini electrice duble repartizate pe o suprafaţă se întîlnesc la suprafeţele de contact dintre două medii conductoare diferite, aşa cum este cazul suprafeţei de separaţie dintre electrod şi electrolit la un element galvanic etc. În fig. 1-28 se consideră o astfel de suprafaţă avînd densitatea momentelor electrice:

$$\bar{\tau} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\sum \bar{p}}{\Delta s}, \tag{1-54}$$

unde $\Sigma \bar{p}$ este suma geometrică a momentelor electrice elementare de pe suprafaţa Δs.

Momentul electric al dipolilor situaţi pe suprafaţa elementară ds este :

$$d\bar{p} = \bar{\tau}\, ds = \tau\, d\bar{s} = \tau\, ds\bar{n}, \quad (1\text{-}55)$$

unde $\bar{n}$ este versorul normal la suprafaţa S, orientat de la sarcina negativă spre cea pozitivă.

Potenţialul în punctul P_1 situat de partea sarcinilor pozitive se determină cu o expresie analoagă relaţiei (1-50) stabilită pentru dipolul electric, adică

$$dV_{P1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\tau\, ds\bar{n}\, \nabla\frac{1}{r}, \quad (1\text{-}56)$$

unde

$$\bar{n}\nabla\frac{1}{r} = \frac{\cos\alpha}{r^2}. \quad (1\text{-}57)$$

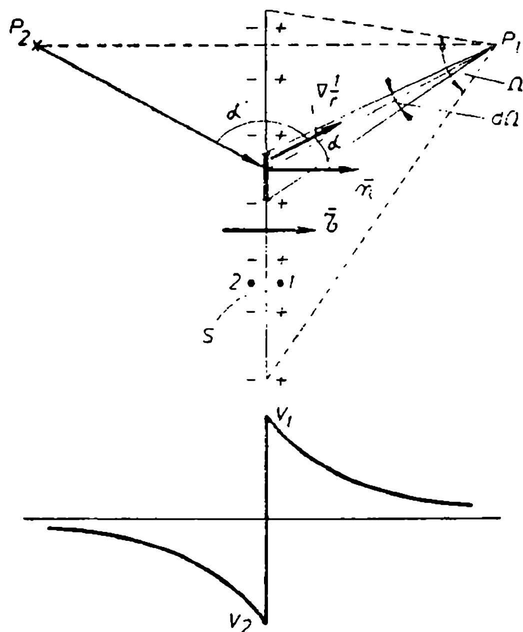


Fig. 1-28. Potenţialul electric determinat de sarcini electrice duble, uniform distribuite pe o suprafaţă plană.

Prin înlocuirea relaţiei (1-57) în (1-56) rezultă :

$$dV_{P1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\tau\frac{ds\cos\alpha}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\tau\, d\Omega, \quad (1\text{-}58)$$

unde $d\Omega = \frac{ds\cos\alpha}{r^2}$ este unghiul solid sub care se vede suprafaţa ds din punctul P_1.

Potenţialul determinat de toate sarcinile electrice duble, situate pe suprafaţa S este :

$$V_{P1} = \int dV_{P1} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\int d\Omega = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\Omega, \quad (1\text{-}59)$$

în care s-a presupus $\tau = \text{const.}$

Dacă punctul P_1 este situat pe suprafaţa S, atunci unghiul solid $\Omega = 2\pi$ şi rezultă :

$$V_1 = \frac{\tau}{2\varepsilon_0}. \quad (1\text{-}60)$$

Potenţialul într-un punct P_2, simetric cu punctul P_1 faţă de suprafaţa S, dar situat de partea sarcinilor electrice negative, se calculează în mod analog, cu deosebirea că în expresii intervine unghiul $\alpha' = 180 - \alpha$, adică :

$$dV_{P2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\tau\frac{ds\cos\alpha'}{r^2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\tau\frac{ds\cos\alpha}{r^2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\tau\, d\Omega, \quad (1\text{-}61)$$

$$V_{P2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\tau\Omega. \quad (1\text{-}62)$$

Dacă punctul P_2 este situat pe suprafaţa S, unghiul solid $\Omega=2\pi$ şi se obţine:

$$V_2=-\frac{\tau}{2\,\varepsilon_0}. \tag{1-63}$$

Deci, diferenţa de potenţial între potenţialele punctelor situate pe o parte şi pe alta a suprafeţei S este:

$$V_1-V_2=\frac{\tau}{2\,\varepsilon_0}-\left(-\frac{\tau}{2\,\varepsilon_0}\right)=\frac{\tau}{\varepsilon_0}. \tag{1-64}$$

Rezultă de aici concluzia importantă că de-a lungul unei linii ce trece prin suprafaţa S, ce conţine sarcini electrice duble, potenţialul electric suferă o discontinuitate, adică se modifică brusc de la valoarea $-\frac{\tau}{2\,\varepsilon_0}$ la valoarea $+\frac{\tau}{2\,\varepsilon_0}$ (fig. 1-28).

Aplicaţia 1-6. Un fir în formă de cerc cu raza R este încărcat cu o sarcină electrică liniformă, uniform distribuită, de densitatea ρ_l. Să se determine potenţialul electric şi intensitatea cîmpului electric într-un punct P, situat la distanţa x de centrul cercului, pe dreapta ce trece prin centru şi este perpendiculară pe planul cercului.

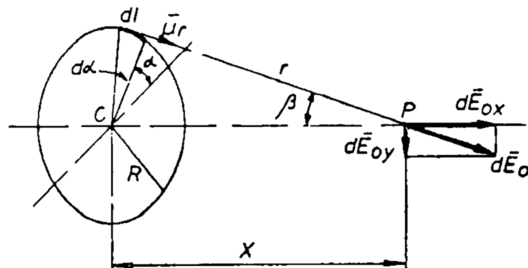


Fig. 1-29. Intensitatea cîmpului electric într-un punct de pe axa unei spire circulare, filiforme, încărcată cu sarcini electrice uniform distribuite.

Rezolvare. Cu notaţiile din fig. 1-29 se obţine potenţialul electric:

$$\mathrm{d}V=\frac{\mathrm{d}Q}{4\,\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\rho_l\,\mathrm{d}l}{4\,\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}=\frac{\rho_l R\,\mathrm{d}\alpha}{4\,\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}},$$

$$V=\int \mathrm{d}V=\frac{\rho_l R}{4\,\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\alpha=\frac{\rho_l R}{2\,\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}.$$

Intensitatea cîmpului electric

$$\mathrm{d}\bar{E}_0=\frac{\mathrm{d}Q}{4\,\pi\varepsilon_0 r^2}\bar{u}_r=\frac{\rho_l R\,\mathrm{d}\alpha}{4\,\pi\varepsilon_0\,(R^2+x^2)}\bar{u}_r$$

are două componente:

$$\mathrm{d}\bar{E}_0=\mathrm{d}\bar{E}_{0x}+\mathrm{d}\bar{E}_{0y}.$$

Rezultanta componentelor $\mathrm{d}\bar{E}_{0y}$ determinate de sarcinile elementare $\rho_l\mathrm{d}l$ diametral opuse este egală cu zero, ceea ce conduce la $\bar{E}_{0y}=0$. Prin urmare, intensitatea cîmpului electric în punctul P se obţine prin însumarea geometrică a tuturor componentelor $\mathrm{d}\bar{E}_{0x}$. Rezultă:

$$\mathrm{d}E_{0x}=\mathrm{d}E_0\cos\alpha=\frac{\rho_l R\,\mathrm{d}\alpha}{4\,\pi\varepsilon_0\,(R^2+x^2)}\cdot\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}=\frac{\rho_l Rx\,\mathrm{d}\alpha}{4\,\pi\varepsilon_0\,(R^2+x^2)^{3/2}},$$

$$E_{0x}=\int \mathrm{d}E_{0x}=\frac{\rho_l Rx}{4\,\pi\varepsilon_0\,(R^2+x^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\alpha=\frac{\rho_l Rx}{2\,\varepsilon_0\,(R^2+x^2)^{3/2}}.$$

Pentru $x=0$, adică în centrul cercului, se obţine:

$$V_c=\frac{\rho_l}{2\,\varepsilon_0} \quad \text{şi} \quad E_{0c}=0$$

1.4. CÎMPUL ELECTRIC ÎN CORPURI METALICE

1.4.1. CARACTERIZAREA CORPURILOR METALICE

Corpurile metalice se caracterizează prin faptul că în structura lor cristalină există electroni „liberi" care, sub acţiunea unor forţe exterioare, se pot deplasa în interiorul metalului pe distanţe nelimitate. Acesta este motivul pentru care se afirmă, impropriu, că metalele sînt bune conducătoare de electricitate. Numărul de electroni liberi din unitatea de volum diferă de la un metal la altul şi depinde de temperatură. De exemplu, la temperatură normală, numărul de electroni liberi la cupru şi la germaniu pur este :

— cupru : $N = 8 \cdot 10^{28}$ electroni liberi/m^3 ;

— germaniu pur : $N = 6{,}2 \cdot 10^{19}$ electroni liberi /m^3 ;

Conductoarele metalice străbătute de curent electric pot fi imaginate ca nişte „ţevi" prin care circulă „gazul" electronic.

Spre deosebire de metale, corpurile izolatoare (dielectrice) nu dispun de electroni liberi care, sub acţiunea unor forţe exterioare, să se poată deplasa pe distanţe nelimitate. Dacă ar exista astfel de purtători mobili de sarcini electrice, corpul respectiv şi-ar pierde calităţile izolatoare, devenind conductor.

În continuare se urmăreşte comportarea corpurilor metalice introduse în cîmpul electric.

1.4.2. ECHILIBRUL ELECTROSTATIC

Se consideră un cîmp electrostatic de intensitate $\bar{E}_0$, omogen, adică cu linii de cîmp drepte paralele (fig. 1-30, *a*), în care se introduce un corp metalic *M*, de formă sferică (fig. 1-30, *b*), neîncărcat electric şi izolat faţă de pămînt şi faţă de alte corpuri.

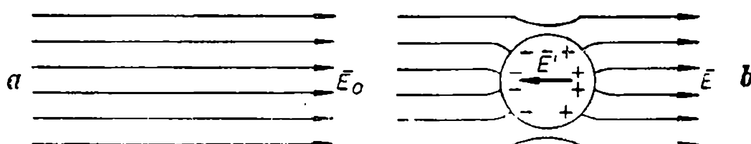


Fig. 1-30. Liniile cîmpului electric uniform în vid (*a*) şi în prezenţa unei sfere metalice (*b*).

Asupra electronilor liberi din metal acţionează forţa $\bar{F} = q\bar{E}$ orientată în sens opus faţă de intensitatea cîmpului electric $\bar{E}$ deoarece $q < 0$, sub acţiunea căreia electronii se deplasează în sens opus cîmpului electric, avînd loc în felul acesta o separare a sarcinilor electrice în sfera metalică. Pe suprafaţa opusă intensităţii cîmpului electric se acumulează sarcini electrice negative, iar pe suprafaţa din direcţia intensităţii cîmpului electric rămîn sarcini electrice pozitive necompensate.

Datorită separării sarcinilor electrice din interiorul sferei, apare un nou cîmp electric coulombian, $\bar{E}'$, determinat de aceste sarcini şi opus cîmpului iniţial $\bar{E}_0$. Cîmpul rezultant din sfera metalică este :

$$\bar{E} = \bar{E}_0 + \bar{E}'.$$

Problema care se pune este de a stabili pînă cînd sarcinile electrice din interiorul sferei metalice vor continua să se separe ?. Sarcinile electrice se vor separa pînă în momentul cînd se stabileşte *echilibrul electrostatic, caracterizat prin intensitatea cîmpului electric rezultant în corpul metalic egală cu zero* :

$$\bar{E}=\bar{E}_0+\bar{E}'=0. \qquad (1\text{-}65)$$

În această situaţie, forţa $\bar{F}=q\bar{E}=0$ şi mişcarea electronilor liberi în metal încetează.

Deoarece

$$\bar{E}=-\nabla V=-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial V}{\partial z}\bar{k}\right),$$

înseamnă că în regim electrostatic (echilibru electrostatic) potenţialul electric în metal este constant :

$$V_{metal}=\text{const}. \qquad (1\text{-}66)$$

Deci, suprafaţa corpului metalic introdus în cîmpul electrostatic este echipotenţială. În consecinţă, *liniile cîmpului electrostatic vor fi întotdeauna perpendiculare pe suprafaţa corpurilor metalice.* De asemenea, în regim de echilibru electrostatic, în interiorul corpului metalic nu există linii de cîmp, deoarece $E=0$, deci nu pot exista nici sarcini electrice volumetrice unde să se sfîrşească sau de unde să înceapă astfel de linii. Din această constatare rezultă că *în regim electrostatic sarcinile electrice ale corpurilor metalice* sînt repartizate pe suprafaţa acestora, adică *sînt sarcini electrice superficiale.*

Dacă, cu ajutorul unui mîner izolant, corpul metalic M (fig. 1-30, *b*) este scos din cîmpul $\bar{E}_0$, în corp rămîne cîmpul $\bar{E}'$ care determină forţa $\bar{F}'=q\bar{E}'$, sub acţiunea căreia electronii revin în poziţia lor iniţială, iar corpul devine neutru.

Electrizarea corpului metalic după procedeul arătat mai sus este cunoscută şi sub denumirile improprii de *electrizare prin influenţă,* respectiv electrizare prin inducţie electrostatică.

Spre deosebire de regimul electrostatic al corpurilor metalice, caracterizat prin $E=0$ şi $V=$const., există şi *regimul electrocinetic,* caracterizat prin $E\neq 0$ şi $V\neq$const. în interiorul metalelor (conductoarelor).

1.4.3. **SARCINI ELECTRICE LIBERE ŞI LEGATE**

Se face următoarea experienţă : un baston de ebonită A, electrizat prin frecare, se aşază pe un suport metalic B legat la pămînt (fig. 1-31). În spaţiul înconjurător bastonului de ebonită există un cîmp electric de intensitate $\bar{E}_0$, cu liniile de cîmp orientate de la potenţialul mai ridicat (pămînt) spre potenţialul mai scăzut (bastonul de ebonită încărcat cu sarcini electrice negative).

Cu ajutorul unui mîner izolat se introduce în cîmpul electric $\bar{E}_0$ o placă metalică C care, aşa cum s-a explicat la paragraful precedent, se electrizează.

Potenţialul constant ce se stabileşte în punctele plăcii metalice C este mai mic decît potenţialul pămîntului, considerat egal cu zero, deoarece ea se găseşte în cîmpul electric al sarcinilor negative de pe bastonul de ebonită. În această situaţie, dacă se închide întreruptorul K, prin care corpul metalic C se leagă la pămînt,

electronii din placă se deplasează la pămînt. Apoi, deschizînd întrerupătorul K şi scoţînd, cu ajutorul mînerului izolant, corpul metalic C din cîmp, el rămîne încărcat cu sarcini electrice pozitive, oriunde ar fi aşezat acest corp în spaţiu. Astfel de sarcini electrice, care se menţin pe corp independent de poziţia lui în cîmp (spaţiu), se numesc *sarcini electrice libere.*

Fig. 1-31. Figură explicativă pentru sarcini electrice legate şi libere.

Dacă, înainte de a închide întreruptorul K, corpul metalic C se scoate din cîmpul electric, sub acţiunea forţei $\bar{F}'=q\bar{E}'$ electronii se deplasează şi compensează sarcinile electrice pozitive, corpul devenind neutru. Astfel de sarcini care se menţin pe corp, dependent de poziţia sa în cîmp (spaţiu) se numesc *sarcini electrice legate.*

În general, un corp poate conţine atît sarcini electrice libere, cît şi sarcini electrice legate, sarcina electrică totală fiind $Q+Q'$, respectiv densitatea de sarcină $\rho_0+\rho_0'$, $\rho_s+\rho_s'$ etc. Indicele „prim" se referă la sarcinile electrice legate.

Conform procedeului explicat mai sus, sarcinile electrice legate pot fi transformate în sarcini electrice libere.

Aplicaţia 1-7. În centrul unei sfere metalice goale, se găseşte sarcina electrică liberă, punctiformă, $Q>0$. Să se evalueze potenţialul electric şi intensitatea cîmpului electric într-un punct exterior sferei pentru situaţiile în care sfera nu este legată la pămînt (masă) şi sfera este legată la pămînt.

Rezolvare

a. Sfera metalică, în stare iniţială neutră, nu este legată la pămînt (fig. 1-32, *a*). Datorită cîmpului electric determinat de sarcina electrică $Q>0$, sfera metalică se încarcă cu sarcini electrice superficiale legate, uniform distribuite, negative pe suprafaţa interioară şi pozitive pe suprafaţa exterioară.

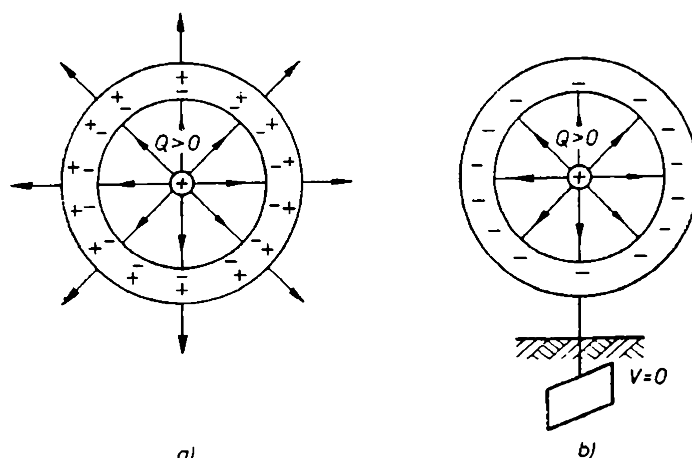


Fig. 1-32. Ecran electrostatic :
a — nelegat la pămînt; *b* — legat la pămînt.

În exteriorul sferei există un cîmp electric determinat de sarcinile electrice superficiale, pozitive, de pe suprafața exterioară. Potențialul electric și intensitatea cîmpului electric într-un punct din acest cîmp exterior se determină după procedeul indicat la paragrafele anterioare.

b. Prin legarea sferei metalice la pămînt (fig. 1-32, *b*), sarcinile electrice legate pozitive sînt compensate de sarcini negative (electroni) proveniți din pămînt, astfel încît potențialul sferei devine nul (același cu potențialul pămîntului).

În exteriorul sferei nu există un cîmp electric, deci în orice punct din exterior potențialul electric și intensitatea cîmpului electric sînt egale cu zero. În această situație sfera metalică devine un *ecran electrostatic* pentru cîmpul electric existent în interiorul său, determinat de sarcina Q.

Dacă sarcina electrică Q ar fi situată în exteriorul sferei metalice, aceasta ecranează spațiul din interiorul său față de cîmpul electric exterior, indiferent dacă este legată la pămînt sau nu. Pe acest principiu este realizată cușca lui Faraday.

1.5. CÎMPUL ELECTRIC ÎN MEDII DIELECTRICE

1.5.1. CARACTERIZAREA MEDIILOR (CORPURILOR) DIELECTRICE

Mediile dielectrice (izolatoare) se caracterizează prin faptul că nu conțin decît un număr neînsemnat (neglijabil) de purtători liberi de sarcini electrice care, sub acțiunea cîmpului electric, să se poată deplasa pe distanțe nelimitate. Aceasta înseamnă că astfel de medii au conductivitatea electrică egală practic cu zero.

Sub acțiunea unui cîmp electric exterior, electronii din *mediul dielectric*, ce gravitează în jurul unor formații structurale (atomi, molecule), execută numai o deplasare pe distanță limitată, denumită *deplasare elastică*, fără să se desprindă de formațiunile cărora le aparțin. Dacă intensitatea cîmpului electric din dielectric depășește o anumită limită, *electronii* sînt „desprinși" din formații, devenind *liberi*, respectiv *mediul* își pierde calitățile izolatoare, devenind *conductor*.

În industria electrotehnică se folosesc diverse materiale izolatoare. Calitățile acestor materiale sînt determinate în primul rînd de comportarea lor în cîmpul electric.

1.5.2. POLARIZAREA DIELECTRICILOR ÎN CÎMPUL ELECTRIC

Un atom sau o moleculă dintr-un material izolant sînt neutre din punct de vedere electric, în sensul că conțin același număr de sarcini electrice elementare negative și pozitive.

Electronii ce aparțin formațiilor structurale ale substanței izolante execută o permanentă mișcare. Sarcinile electronilor în mișcare se manifestă în exterior ca și cum ar fi amplasate într-un centru echivalent de acțiune al sarcinilor negative care, în lipsa cîmpului electric exterior, se suprapune, sau nu, peste centrul de acțiune al sarcinilor pozitive situate în nucleele atomilor.

O moleculă la care, în lipsa cîmpului electric exterior, centrul echivalent de acțiune al sarcinilor electrice negative se suprapune cu centrul de acțiune al

sarcinilor electrice pozitive se numește *moleculă nepolară*, avînd momentul electric $\bar{p}=0$. În caz contrar, cînd cele două centre nu se suprapun, *molecula este polară*, avînd momentul electric $\bar{p}\neq 0$.

Cel mai simplu atom nepolar este cel al hidrogenului, format din nucleul cu sarcina electrică elementară pozitivă Q_+ și un electron cu sarcina electrică elementară negativă $Q_-=q$. În lipsa cîmpului electric exterior, electronul execută aproximativ o mișcare circulară în jurul nucleului, astfel încît centrul echivalent de acțiune al sarcinii sale coincide cu centrul sarcinii pozitive din nucleu (fig. 1-33, *a*).

Dacă atomul de hidrogen se găsește într-un cîmp electric exterior de intensitate $\bar{E}_0$, orbita electronului se deformează, devenind eliptică (fig. 1-33, *b*),

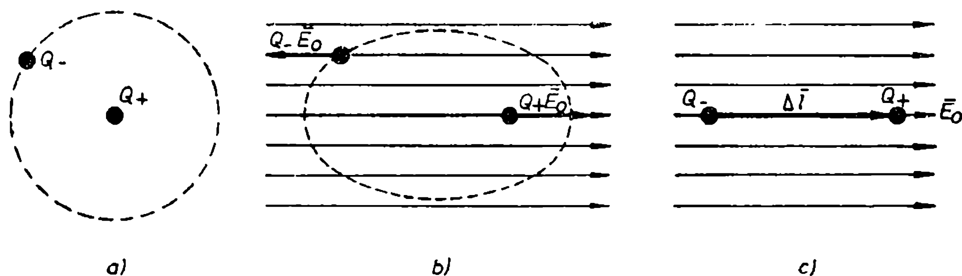


Fig. 1-33. Traiectoria electronului la atomul de hidrogen în absența cîmpului electric exterior (*a*), în prezența cîmpului electric exterior (*b*) și dipolul electric corespunzător (*c*).

astfel încît centrul echivalent de acțiune al sarcinii negative nu se mai suprapune peste sarcina pozitivă. Se spune, că atomul de hidrogen s-a polarizat electric, comportîndu-se în exterior ca un dipol electric, caracterizat prin momentul electric $\bar{p}=Q_+\Delta\bar{l}$, orientat în direcția liniilor cîmpului electric $\bar{E}_0$ (fig. 1-33, *c*).

Fenomenul de constituire și orientare a dipolilor la un dielectric cu molecule nepolare, situat într-un cîmp electric exterior, se numește *polarizare electrică de deformare*.

La dielectricii cu molecule polare, în prezența unui cîmp electric exterior are loc fenomenul de *polarizare electrică de orientare* a dipolilor existenți.

În general, polarizarea electrică a unui dielectric constă atît din polarizarea de deformare, cît și din polarizarea de orientare.

Polarizarea electrică a unui dielectric poate fi *temporară* sau *permanentă*. În primul caz, starea de polarizare se menține numai în prezența unui cîmp electric exterior, iar în al doilea caz, această stare se menține independent de cîmpul electric exterior. Materialele care prezintă polarizare electrică permanentă se numesc *electreți*.

În cele ce urmează se fac referiri numai la dielectricii care prezintă polarizare electrică temporară.

1.5.3. INTENSITATEA CÎMPULUI ELECTRIC ÎN MEDIUL DIELECTRIC. SARCINILE ELECTRICE DE POLARIZARE

Se consideră un corp dielectric omogen și fără polarizare electrică permanentă, introdus într-un cîmp electric uniform, de intensitate $\bar{E}_0$ (fig. 1-34). Datorită cîmpului electric exterior, dielectricul se polarizează, adică se formează și se orientează dipolii electrici moleculari.

Considerînd un volum Δo oricît de mic din dielectric, sarcinile electrice ale dipolilor situate în acest volum, denumite *sarcini electrice de polarizare*, se compensează reciproc, rămînînd necompensate numai sarcinile electrice pozitive Q'_+ de pe fața corpului dielectric din direcția intensității cîmpului și sarcinile electrice negative Q'_- de pe fața corpului dielectric din direcția opusă intensității cîmpului. Deci, în această situație a corpului dielectric omogen situat într-un cîmp electric uniform, nu există sarcini electrice de polarizare volumetrice, ci numai sarcini electrice de polarizare superficiale.

Dacă corpul dielectric este neomogen, situat într-un cîmp electric uniform sau neuniform, atunci apar și sarcini electrice de polarizare volumetrice.

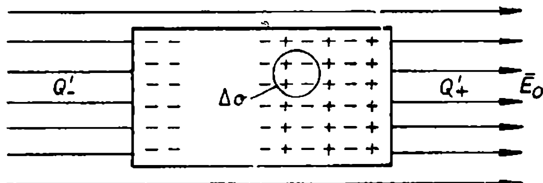


Fig. 1-34. Polarizarea electrică a corpului dielectric

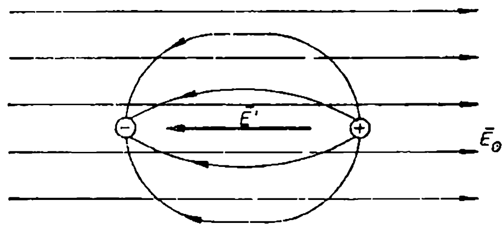


Fig. 1-35. Liniile cîmpului unui dipol electric molecular.

Dacă se scoate corpul dielectric din cîmpul electric, el revine în starea neutră inițială, ceea ce înseamnă că sarcinile electrice de polarizare sînt legate, adică depind de poziția corpului dielectric în cîmp (spațiu).

Sarcinile electrice de polarizare determină un cîmp electric de intensitate $\bar{E}'$ orientat în sens opus cîmpului electric exterior $\bar{E}_0$ (fig. 1-35), astfel încît în mediul dielectric intensitatea cîmpului electric rezultant este :

$$\bar{E} = \bar{E}_0 + \bar{E}' \ (E < E_0). \tag{1-67}$$

În concluzie, *intensitatea cîmpului electric în dielectric se micșorează datorită sarcinilor electrice de polarizare*. În nici un caz însă, această intensitate de cîmp nu devine nulă, așa ca la metale, deoarece, dacă, prin absurd, se presupune că intensitatea cîmpului electric în dielectric este egală cu zero, starea de polarizare a dielectricului dispare, nemaiexistînd un cîmp electric care să o întrețină. Ar rezulta $\bar{E}'=0$ și $\bar{E}=\bar{E}_0$, adică se revine la cîmpul electric inițial.

Dacă cîmpul electric cu intensitatea $\bar{E}_0$ este creat numai de sarcini electrice libere Q, atunci cîmpul electric în dielectric este determinat atît de sarcinile electrice libere Q, cît și de sarcinile electrice de polarizare Q'. Considerînd aceste sarcini cu repartiție volumetrică, cu densitățile ρ_0 și ρ'_0, rezultă :

$$\bar{E} = \int \frac{(\rho_0 + \rho'_0)\, do}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \bar{u}_r = \int \frac{\rho_0\, do}{4\pi\varepsilon r^2} \bar{u}_r, \tag{1-68}$$

unde

$$\frac{\rho_0 + \rho'_0}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_0}{\varepsilon}; \quad \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_0}{\rho_0 + \rho'_0} > 1, \tag{1-69}$$

ε fiind permitivitatea absolută (constanta dielectrică) a mediului dielectric ($\varepsilon > \varepsilon_0$).

În consecință, *intensitatea cîmpului electric produs în mediul dielectric de sarcinile libere Q este mai mică decît intensitatea cîmpului electric produs în vid de aceleași sarcini*.

1.5.4. PERMITIVITATEA RELATIVĂ ŞI ABSOLUTĂ

Pe baza celor explicate la paragraful precedent, permitivitatea relativă a unui mediu dielectric se definește prin raportul :

$$\varepsilon_r = \frac{E_0}{E} > 1, \qquad (1\text{-}70)$$

fiind o mărime adimensională, a cărei valoare depinde de natura mediului dielectric.

Permitivitatea electrică absolută (constanta dielectrică) este :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r, \qquad (1\text{-}71)$$

unde ε_0 este permitivitatea vidului.

În tabela 1-1 sînt prezentate valorile permitivității relative pentru cîteva materiale izolatoare mai des întîlnite și folosite în practică. Se remarcă faptul că permitivitatea relativă a aerului este foarte apropiată de cea a vidului ($\varepsilon_{0r}=1$).

1.5.5. RIGIDITATEA DIELECTRICĂ

Introducînd un dielectric într-un cîmp electric a cărui intensitate $\bar{E}$ se majorează treptat, la o anumită valoare a intensității cîmpului forța $\bar{F}=q\bar{E}$ ce acționează asupra electronilor devine atît de mare încît învinge forțele interne, de natură elastică, care se opun desprinderii electronilor de formațiunile structurale cărora le aparțin. Electronii sînt smulși din aceste formațiuni și devin liberi, putîndu-se mişca în spațiul interatomic ca la metale. În această situație, dielectricul pierde proprietatea de izolant, fenomenul fiind cunoscut sub denumirea de *străpungerea dielectricului*.

Valoarea maximă a intensității cîmpului electric, la care poate fi supus materialul fără a se produce străpungerea, se numeşte *rigiditate dielectrică*.

Practic, rigiditatea dielectrică reprezintă raportul dintre tensiunea aplicată la electrozi și grosimea plăcii dielectrice introdusă între electrozi și se măsoară în V/m sau kV/cm.

Tabela 1-1

Permitivitatea relativă şi rigiditatea dielectrică a unor medii dielectrice.

Materialul	ε_r	Rigiditatea la 20 °C şi 50 Hz [kV/cm]
Aer	1,006 (0 °C ; 760 mm Hg)	22...30
Apă distilată	80...81	—
Ulei de transformator	2,2...2,5	125...150
Cauciuc	2,6...3	150...250
Sticlă	5...10	160...400
Lemn uscat	2,5...4,5	50...70
Mica	4,5...7,5	600...700
Porțelan	5,5...8	300...400
Hîrtie impregnată în ulei	3...4,3	300...600
Preşpan	3...5	1 000

Tensiunea de străpungere, respectiv rigiditatea dielectrică a unui material, depinde de calitățile lui naturale și de condițiile de fabricație și conservare, cum ar fi : porozitatea, densitatea, conținutul de umiditate, temperatură, îmbătrînire etc. De asemenea, valoarea rigidității măsurate depinde și de condițiile de încercare, de grosimea dielectricului, de forma și dimensiunea electrozilor aparatului de încercat, de forma și distribuția cîmpului electric, de durata încercării etc.

Valorile rigidității dielectrice la temperatura de 20 °C și frecvența de 50 Hz ale principalelor materiale izolante folosite în tehnică sînt date în tabela 1-1.

Aplicația 1-8. Știind că rigiditatea dielectrică a aerului, în anumite condiții de presiune și temperatură, este 30 kV/cm, să se determine raza minimă a unei sfere metalice ce se găsește la potențialul de 100 kV pentru ca intensitatea cîmpului electric în aer, în imediata vecinătate a sferei, să nu depășească rigiditatea dielectrică.

Rezolvare. Se consideră că potențialul electric $V=100$ kV al punctelor de pe suprafața sferei metalice și intensitatea cîmpului electric $E=30$ kV/cm în punctele din aer din vecinătatea acestei suprafețe sînt produse de o sarcină electrică punctiformă, Q, situată în centrul sferei. Sfera fiind departe de pămînt și de alte corpuri, se obțin :

$$V=\frac{Q}{4\,\pi\varepsilon_0 r_{min}}, \qquad E=\frac{Q}{4\,\pi\varepsilon_0 r_{min}^2},$$

$$\frac{V}{E}=r_{min}=\frac{100\cdot 10^3}{30\cdot 10^3\cdot 10^2}=3{,}33\cdot 10^{-2}\ \text{m}.$$

Dacă raza sferei este mai mică decît r_{min}, rigiditatea dielectrică a aerului este depășită și în stratul de aer din jurul sferei apar descărcări electrice luminiscente. Acest fenomen este cunoscut sub denumirea de *efect corona* și prezintă importanță la liniile de înaltă și foarte înaltă tensiune, la care, pentru a se evita acest efect, diametrul conductoarelor liniei trebuie să fie mai mare decît o valoare minimă.

1.5.6. VECTORUL DE POLARIZARE ELECTRICĂ

Pentru caracterizarea locală a stării de polarizare a unui mediu dielectric se folosește mărimea fizică vectorială $\bar{P}$, denumită vectorul de polarizare electrică, definită prin relația :

$$\bar{P}=\lim_{\Delta o\to 0}\frac{\sum\bar{p}}{\Delta o}, \tag{1-72}$$

unde $\Sigma\bar{p}$ este suma vectorială a momentelor electrice ale dipolilor situați în elementul de volum Δo.

Evident că vectorul de polarizare depinde exclusiv de sarcinile electrice de polarizare și, pentru un singur dipol, are același sens cu $\bar{p}$.

Dacă mediul dielectric are atît polarizare electrică temporară, cît și polarizare electrică permanentă, vectorul de polarizare constă din două componente aditive, corespunzătoare celor două polarizări, adică :

$$\bar{P}=\bar{P}_t+\bar{P}_p. \tag{1-73}$$

Se arată în continuare că vectorul de polarizare $\bar{P}$ depinde de sarcinile electrice de polarizare Q', luate cu semn schimbat. Pentru aceasta, se calculează fluxul vectorului $\bar{P}$ printr-o suprafață închisă S_i, de formă cilindrică, cu înălțimea Δl foarte mică și suprafața bazei Δs, situată parte în dielectricul polarizat și parte în vid sau în aer (fig. 1-36, *a*). În vid (aer) nu apare fenomenul de

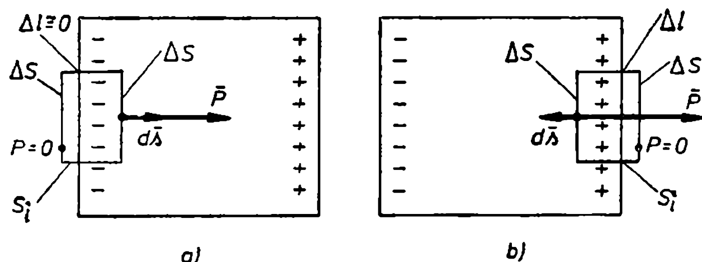


Fig. 1-36. Figură explicativă pentru calculul fluxului vectorului $\bar{P}$:
a — S_i închide sarcini de polarizare superficiale negative;
b — S_i închide sarcini de polarizare superficiale pozitive.

polarizare electrică, deci $\bar{P}=0$. Sarcina electrică de polarizare, situată în volumul $\Delta o=\Delta s\Delta l$ închis de suprafața S_i, este negativă, $\Delta Q'<0$. Se poate scrie :

$$-\Delta Q'=|\Delta Q'|=\frac{|\Delta Q'|\ \Delta l}{\Delta o}\Delta s=\frac{\sum \bar{p}}{\Delta o}\Delta \bar{s},$$

de unde, prin trecere la limită, cînd $\Delta o\rightarrow 0$, și ținînd seama de relația (1-72), rezultă :

$$-\mathrm{d}Q'=\bar{P}\,\mathrm{d}\bar{s}, \qquad (1\text{-}74)$$

unde produsul scalar $\bar{P}\,\mathrm{d}\bar{s}$ este pozitiv și diferit de zero numai pentru suprafața Δs din dielectric, iar vectorii $\bar{P}$ și $\mathrm{d}\bar{s}$ sînt coliniari. De asemenea, $-\mathrm{d}Q'>0$.

Prin integrarea relației (1-74) se obține :

$$\int_{S_i}\bar{P}\,\mathrm{d}\bar{s}=-\Delta Q', \qquad (1\text{-}75)$$

de unde rezultă că fluxul vectorului $\bar{P}$ printr-o suprafață închisă este egal cu suma sarcinilor de polarizare situate în interiorul acelei suprafețe, luate cu semn schimbat.

Se subliniază faptul că relația (1-75) își păstrează valabilitatea și dacă suprafața S_i închide sarcini de polarizare pozitive (fig. 1-36, *b*). În acest caz $-\Delta Q'<0$ și $\bar{P}\,\mathrm{d}\bar{s}<0$ deoarece vectorii $\bar{P}$ și $\mathrm{d}\bar{s}$ sînt în opoziție pentru suprafața Δs din dielectric.

Dacă sarcina de polarizare Q' este volumetrică, cu densitatea ρ_0, relația (1-75) devine :

$$\int_{S_i}\bar{P}\,\mathrm{d}\bar{s}=-\int_{O}\rho_0\mathrm{d}o. \qquad (1\text{-}76)$$

Dimensiunea vectorului $\bar{P}$ rezultă din (1-75), adică C/m^2.

1.5.7. LEGEA POLARIZĂRII ELECTRICE TEMPORARE

Starea locală a polarizării electrice temporare a unui dielectric este dependentă de intensitatea cîmpului electric ce se stabilește în dielectric.

Legea polarizării electrice temporare precizează că vectorul de polarizare $\bar{P}_t$, corespunzător polarizării electrice temporare, este proporțional cu intensitatea cîmpului electric $\bar{E}$ ce se stabilește în dielectric :

$$\bar{P}_t = \varepsilon_0 \eta_e \bar{E}, \qquad (1\text{-}77)$$

unde η_e este *susceptivitatea electrică*, o constantă de material adimensională. Pentru vid (și aer) $\eta_e = 0$.

1.6. LEGEA LEGĂTURII DINTRE $\bar{D}$, $\bar{E}$ și $\bar{P}$

În orice punct al unui mediu dielectric și în orice moment, experiența dovedește că este valabilă următoarea relație (lege) de legătură între vectorii $\bar{D}$, $\bar{E}$ și $\bar{P}$:

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P}. \qquad (1\text{-}78)$$

În mediile dielectrice izotrope, vectorii $\bar{D}$, $\bar{E}$ și $\bar{P}$ sînt coliniari (fig. 1-37, *a*), iar în mediile anizotrope nu sînt coliniari (fig. 1-37, *b*).

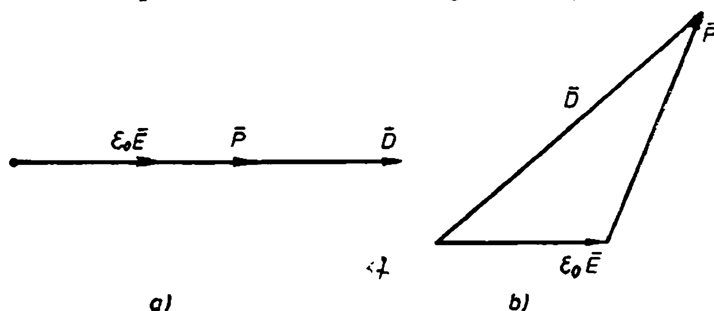


Fig. 1-37. Vectorii $\varepsilon_0\bar{E}$, $\bar{D}$ și $\bar{P}$ coliniari (*a*) și necoliniari (*b*).

Pentru medii dielectrice izotrope și fără polarizare electrică permanentă avem $\bar{P}_p = 0$ și $\bar{P}_t = \bar{P}$ și din relațiile (1-77) și (1-78) rezultă :

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \varepsilon_0 \eta_e \bar{E} = \varepsilon_0 (1 + \eta_e) \bar{E}$$

sau

$$\bar{D} = \varepsilon \bar{E}, \qquad (1\text{-}79)$$

unde

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \eta_e) = \varepsilon_0 \varepsilon_r,$$

$$\varepsilon_r = 1 + \eta_e. \qquad (1\text{-}80)$$

Prin înlocuirea relației (1-79) în (1-78) se obține :

$$\varepsilon \bar{E} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P}\ ;\ \bar{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \bar{E},$$

de unde rezultă că în vid $\bar{P} = 0$, deoarece $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Dacă mediul dielectric are şi polarizare electrică permanentă, legea legăturii dintre $\bar{D}$, $\bar{E}$ şi $\bar{P}$ se exprimă prin relaţia :

$$\bar{D}=\varepsilon\bar{E}+\bar{P}_p, \qquad (1\text{-}81)$$

unde s-a avut în vedere că $\bar{P}=\bar{P}_t+\bar{P}_p=\varepsilon_0\eta_e\bar{E}+\bar{P}_p$.

Dimensiunile vectorului inducţiei electrice $\bar{D}$ sînt aceleaşi ca şi dimensiunile vectorului de polarizare $\bar{P}$, adică C/m^2 (relaţia 1-78).

La mediile dielectrice liniare permitivitatea ε este constantă, independentă de intensitatea cîmpului electric $\bar{E}$. În această situaţie, legătura dintre valorile inducţiei electrice $\bar{D}$ şi valorile intensităţii cîmpului electric $\bar{E}$ este o dreaptă (fig. 1-38, *a*).

La mediile dielectrice neliniare, permitivitatea depinde de intensitatea cîmpului electric, ε ($\bar{E}$). În această situaţie, legătura dintre valorile lui $\bar{D}$ şi $\bar{E}$ este o curbă (fig. 1-38, *b*).

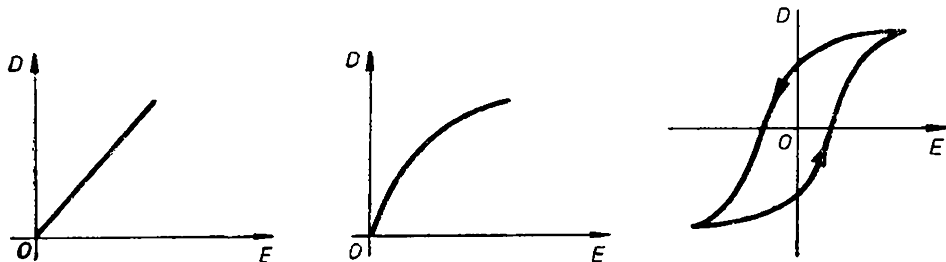


Fig. 1-38. Dependenţa dintre D şi E :
a — pentru medii liniare; *b* — pentru medii neliniare; *c* — pentru medii cu histerezis electric.

Există şi dielectrici la care starea de polarizare la un moment dat depinde de starea de polarizare anterioară (ex. titanat de bariu), adică apare fenomenul de *histerezis electric* (fig. 1-38, *c*).

Aplicaţia 1-9. Într-un punct dintr-un mediu dielectric izotrop, cu permitivitatea relativ $\varepsilon_r=4$, fără polarizare electrică permanentă, se stabileşte un cîmp electric de intensitate $E=2\cdot10^6$ V/m. Să se determine valorile inducţiei electrice D şi a vectorului de polarizare P în punctul considerat.

Rezolvare. Susceptivitatea electrică a mediului considerat este: $\eta_e=\varepsilon_r-1=3$ (relaţia 1-80).

Din legea legăturii dintre $\bar{D}$, $\bar{E}$ şi $\bar{P}$ exprimată pentru medii izotrope şi fără polarizare electrică permanentă (relaţia 1-79) se obţine : $D=\varepsilon_0\varepsilon_r E=71\cdot10^{-6}$ C/m^2.

Din legea polarizării electrice temporare (relaţia 1-77) rezultă : $P=\varepsilon_0\eta_e E=53{,}2\cdot10^{-6}$ C/m^2.

1.7. LEGEA FLUXULUI ELECTRIC

Prin flux electric se înţelege integrala de suprafaţă a vectorului inducţiei electrice :

$$\psi=\int_S \bar{D}\,d\bar{s}. \qquad (1\text{-}82)$$

Acest flux poate fi calculat pentru o suprafață S deschisă, ce se sprijină pe un contur Γ (fig. 1-39, *a*), sau pentru o suprafață închisă S_i (fig. 1—39, *b*). În ambele cazuri trebuie precizat sensul elementului de suprafață $d\bar{s}$, așa cum s-a explicat la paragraful 1.3.5.

În funcție de unghiul α dintre vectorii $\bar{D}$ și $d\bar{s}$, care se înmulțesc scalar, fluxul electric poate obține valori pozitive sau negative.

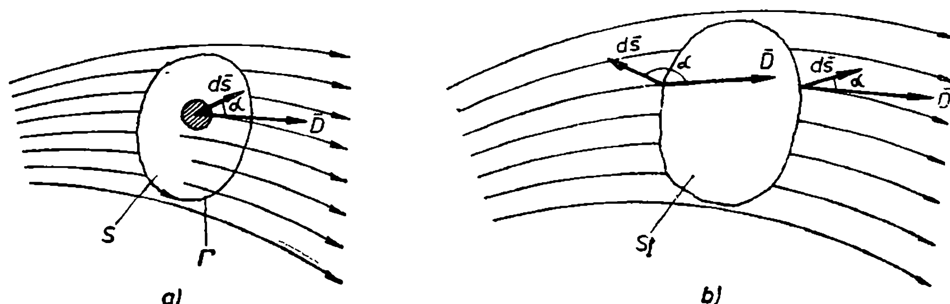


Fig. 1-39. Fluxul electric :
a — prin suprafață deschisă; *b* — prin suprafață închisă.

Legea fluxului electric sub formă integrală precizează că pentru orice suprafață închisă din cîmpul electric și în orice moment fluxul electric este egal cu suma algebrică a sarcinilor electrice libere existente în interiorul acelei suprafețe, adică :

$$\int_{S_i} \bar{D}\, d\bar{s} = \Sigma Q. \tag{1-83}$$

Dacă în interiorul suprafeței închise S_i se găsesc numai sarcini electrice volumetrice cu densitatea ρ_0, relația (1-83) devine :

$$\int_{S_i} \bar{D}\, d\bar{s} = \int_{O} \rho_0 do, \tag{1-84}$$

unde O este volumul închis de suprafața S_i.

Legea fluxului electric este o lege generală a cîmpului electromagnetic, deci valabilă atît în regimul static, cît și în regimul variabil al cîmpului electric.

Din legea fluxului electric sub formă integrală se poate deduce teorema lui Gauss (v. paragraful 1.3.5). Astfel, din relațiile (1-83) și (1-78) se obține :

$$\int_{S_i} \bar{D}\, d\bar{s} = \Sigma Q = \int_{S_i} \varepsilon_0 \bar{E}\, d\bar{s} + \int_{S_i} \bar{P}\, d\bar{s},$$

de unde, ținînd seama că $\int_{S_i} \bar{P}\, d\bar{s} = -\Sigma Q'$ (relația (1-75), rezultă :

$$\int_{S_i} \bar{E}\, d\bar{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \Sigma\, (Q + Q') \tag{1-85}$$

sau

$$\int_{S_i} \bar{E}\, d\bar{s} = \frac{1}{\varepsilon} \Sigma Q. \tag{1-86}$$

Deci, integrala de suprafață închisă a vectorului intensității cîmpului electric este proporțională cu suma algebrică a sarcinilor electrice libere (Q) și legate (Q').

Precizări

1. Vectorul $\bar{P}$ depinde numai de sarcinile legate (de polarizare) luate cu semn schimbat (relația 1-75).

2. Vectorul $\bar{D}$ depinde de sarcinile electrice libere (relația 1-82). Fie un condensator electric plan încărcat cu sarcinile electrice libere $+Q$ și $-Q$, între armăturile căruia există un cîmp electric uniform. Spațiul dintre armături se consideră ocupat de trei dielectrici omogeni, de grosime constantă, cu permitivitățile ε_0, ε_1 și ε_2 (fig. 1-40). Dacă armăturile condensatorului sînt izolate față de alte corpuri și dacă se modifică natura dielectricului dintre armături, sarcinile electrice libere de încărcare a condensatorului nu se modifică. Deoarece inducția electrică depinde exclusiv de sarcinile electrice libere, se obține :

$$\bar{D}_0 = \bar{D}_1 = \bar{D}_2$$

sau

$$\varepsilon_0 \bar{E}_0 = \varepsilon_1 \bar{E}_1 = \varepsilon_2 \bar{E}_2, \quad (1\text{-}87)$$

unde $\bar{E}_0$, $\bar{E}_1$ și $\bar{E}_2$ sînt intensitățile cîmpului electric în cele trei medii dielectrice, invers proporționale cu constantele dielectrice ale acestor medii (v. paragraful 1.8.6).

3. Intensitatea cîmpului electric $\bar{E}$ într-un mediu dielectric depinde atît de sarcinile electrice libere, cît și de cele legate (de polarizare) (relația 1-85).

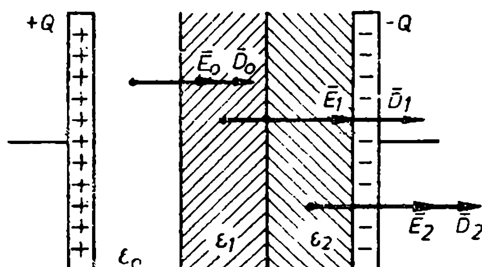


Fig. 1-40. Condensator plan cu trei straturi dielectrice.

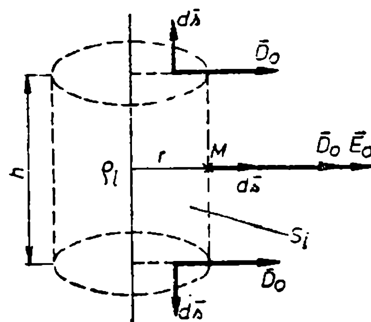


Fig. 1-41. Figură explicativă pentru calculul fluxului electric.

Aplicația 1-10. Un conductor filiform drept, infinit de lung, situat în vid (sau aer), este încărcat cu sarcina electrică lineiformă, uniform distribuită, de densitate ρ_l. Să se determine inducția electrică $\bar{D}_0$, intensitatea cîmpului electric $\bar{E}_0$ și potențialul V într-un punct M situat la distanța r de conductor.

Rezolvare. Se aplică legea fluxului electric sub formă integrală (relația 1-83). Pentru aceasta se consideră o suprafață închisă S_i de formă cilindrică, de rază r și înălțimea h, care trece prin punctul M (fig. 1-41). Rezultă :

$$\int_{S_i} \bar{D}_0 d\bar{s} = \rho_l h.$$

Se ține seama că produsul scalar $\bar{D}_0 d\bar{s} = 0$ pentru suprafețele bazelor cilindrului, unde vectorii $\bar{D}_0$ și $d\bar{s}$ sînt ortogonali, și $\bar{D}_0 d\bar{s} = D_0 ds$, $D_0 =$ const. pentru suprafața laterală. Deci

$$D_0 \int_{S_{lat}} ds = \rho_l h \text{ sau } D_0 2\pi r h = \rho_l h,$$

de unde se obține :

$$D_0 = \frac{\rho_l}{2\pi r} .$$

Intensitatea cîmpului electric în punctul M are valoarea :

$$E_0 = \frac{D_0}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r} .$$

Din observația că vectorul $\bar{E}_0$ are o orientare radială (de la conductor spre infinit), rezultă :

$$\bar{E}_0 = -\frac{dV}{dr}\bar{u}_r \quad \text{sau} \quad E_0 = -\frac{dV}{dr} .$$

Înlocuind aici valoarea obținută mai sus pentru E_0, se obține :

$$\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{dV}{dr} \quad \text{sau} \quad dV = -\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r}$$

sau, prin integrare, rezultă următoarea expresie pentru potențialul electric :

$$V = -\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln r + C.$$

Constanta de integrare C se determină din condiția ca la o distanță r_0 foarte mare de conductor, potențialul electric să fie nul, adică

$$0 = -\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_0 + C \; ; \quad C = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_0.$$

Înlocuind această valoare a constantei de integrare în expresia potențialului electric, se obține așa-numita *formulă logaritmică a potențialului* :

$$V = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r} . \qquad (1\text{-}88)$$

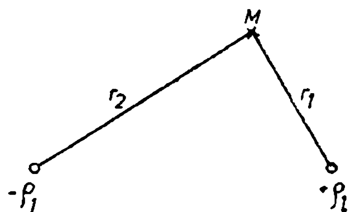


Fig. 1-42. Două conductoare filiforme, paralele, încărcate cu sarcini electrice de semne opuse.

Dacă cîmpul electric este produs de două conductoare filiforme, paralele și infinit de lungi, încărcate cu sarcini electrice uniform distribuite și de semne opuse (fig. 1-42), se obține:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r_1} + \frac{-\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r_2}$$

sau

$$V = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1} . \qquad (1\text{-}89)$$

1.8. CONDENSATOARE. CAPACITATEA ELECTRICĂ A CONDENSATOARELOR

Ansamblul format din două corpuri metalice (armături), separate între ele printr-un mediu dielectric neîncărcat cu sarcini electrice libere, între care se stabilește un cîmp electric complet se numește *condensator electric.*

Parametrul prin care se caracterizează un condensator electric este *capacitatea electrică.*

1.8.1. CAPACITATEA TUBULUI DE CÎMP ELECTRIC

Se consideră un tub de cîmp din cîmpul electric existent în spațiul dintre două corpuri metalice M_1 și M_2 încărcate cu sarcini electrice superficiale libere, Q_1 și Q_2, de semne opuse (fig. 1-43). Potențialele la care se găsesc cele două corpuri metalice sînt V_1 și V_2.

Mai întîi se justifică faptul că sarcinile electrice ΔQ_1 și ΔQ_2, de pe suprafețele ΔS_1 și ΔS_2 de la capetele tubului de cîmp, sînt egale și de semne opuse. În adevăr, din legea fluxului electric se obține :

$$\int_{S_i} \bar{D}\, d\bar{s} = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 = 0 \tag{1-90}$$

deoarece pentru suprafața laterală a tubului de cîmp vectorii $\bar{D}$ și $d\bar{s}$ sînt ortogonali, iar în punctele suprafețelor ΔS_1 și ΔS_2 situate în metal avem $\bar{D}=0$ (S_i este suprafața închisă a tubului de cîmp, compusă din suprafața laterală și suprafețele ΔS_1 și ΔS_2). Rezultă deci, $\Delta Q_1 = -\Delta Q_2$.

În general, dacă toate liniile de cîmp care încep de pe corpul metalic încărcat cu sarcinile electrice pozitive Q_1 se sfîrșesc pe corpul metalic încărcat cu sarcinile electrice negative Q_2, atunci : $Q_1+Q_2=0$ ($Q_1>0$), iar cîmpul electric dintre cele două corpuri metalice (armături) este un *cîmp electric complet*.

Dacă suprafața S_i' închide în interiorul său numai sarcina electrică ΔQ_1, tubul de cîmp sfîrșindu-se cu suprafața ΔS situată în dielectricul dintre armăturile metalice (fig. 1-43), atunci :

$$\int_{S_i'} \bar{D}\, d\bar{s} = \Delta Q_1$$

sau

$$\int_{\Delta S} D\, ds = \Delta Q_1, \tag{1-91}$$

unde s-a ținut seama de cele precizate mai sus referitoare la valoarea nulă a integralei pentru suprafața laterală și pentru suprafața ΔS_1.

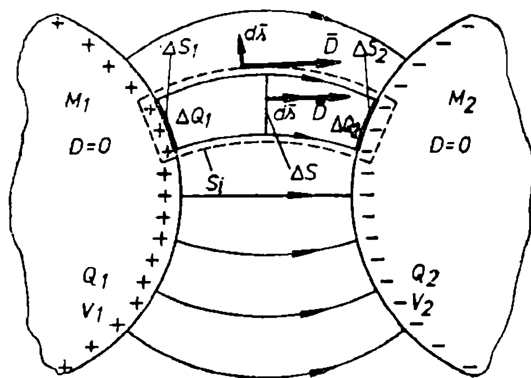


Fig. 1-43. Cîmpul electric între două corpuri metalice încărcate cu sarcini superficiale de semne opuse.

Rezistența dielectrică a unui tub elementar de cîmp electric, de lungime l, se definește prin relația :

$$R_d = \int_l \frac{\bar{E}\, d\bar{l}}{\int_{\Delta S} \bar{D}\, d\bar{s}} = \int_l \frac{E\, dl}{D\, \Delta S} = \int_l \frac{E\, dl}{\varepsilon E\, \Delta S} = \int_l \frac{dl}{\varepsilon\, \Delta S}, \tag{1-92}$$

in care s-a ținut seama că vectorii $\bar{E}$, $d\bar{l}$, $\bar{D}$ și $d\bar{s}$ sînt coliniari și că $D=$const. în toate punctele suprafeței ΔS.

Pentru tubul de cîmp dintre corpurile metalice M_1 și M_2 se obține :

$$R_{d12} = \int_{M_1}^{M_2} \frac{dl}{\varepsilon\, \Delta S} \tag{1-93}$$

sau, în alt fel :

$$R_{d12}=\int_{M_1}^{M_2}\frac{\bar{E}\,d\bar{l}}{\int_{\Delta S}\bar{D}\,d\bar{s}}=\int_{M_1}^{M_2}\frac{\bar{E}\,d\bar{l}}{\Delta Q_1}=\frac{1}{\Delta Q_1}\int_{M_1}^{M_2}\bar{E}\,d\bar{l}=\frac{V_1-V_2}{\Delta Q_1}, \qquad (1\text{-}94)$$

unde s-a ţinut seama de relaţia (1-91), precum şi de relaţia cunoscută :

$$\int_{M_1}^{M_2}\bar{E}\,d\bar{l}=V_1-V_2.$$

Capacitatea electrică a tubului de cîmp este definită astfel :

$$C_{12}=\frac{1}{R_{d12}}=\frac{\Delta Q_1}{V_1-V_2}. \qquad (1\text{-}95)$$

Experienţa a dovedit că pentru orice condensator electric constituit din două armături metalice, separate prin dielectricul de permitivitate ε, între care se stabileşte un cîmp electric complet, raportul dintre sarcina electrică liberă, pozitivă, Q_1, cu care este încărcată una dintre armături şi diferenţa de potenţial V_1-V_2 dintre cele două armături se păstrează constant, fiind denumit *capacitatea electrică a condensatorului* :

$$C=\frac{Q_1}{V_1-V_2}. \qquad (1\text{-}96)$$

Capacitatea electrică este un parametru (mărime fizică) ce depinde de forma, dimensiunile şi poziţia reciprocă a armăturilor, precum şi de permitivitatea dielectricului dintre armături.

Unitatea de măsură pentru capacitatea electrică, în sistemul de unităţi MKSA, se numeşte farad (simbol F) : $1\ F=\frac{1\ C}{1\ V}$. Această unitate este foarte mare, motiv pentru care în practică se folosesc submultiplii : microfaradul, nanofaradul şi picofaradul.

1.8.2. CAPACITATEA ELECTRICĂ A CONDENSATORULUI PLAN

Condensatorul plan are armăturile plane şi paralele, despărţite printr-un dielectric cu permitivitatea ε şi grosime relativ mică (fig. 1-44). Suprafaţa armăturilor este S, sarcinile electrice de pe armături sînt Q_1 şi Q_2 ($Q_1+Q_2=0$, $Q_1>0$) iar diferenţa de potenţial dintre armături este V_1-V_2.

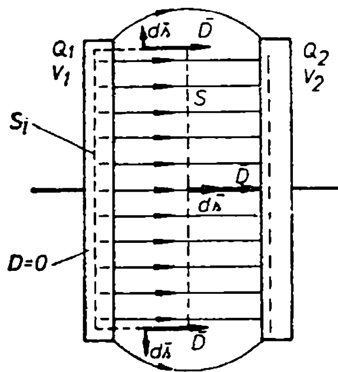


Fig. 1-44. Condensatorul plan.

Exceptînd zonele marginale, în spaţiul dintre armături cîmpul electric este omogen, ceea ce înseamnă : $\bar{E}$=const. şi $\bar{D}$=const.

Pentru a stabili relaţia de calcul a capacităţii condensatorului, se determină fluxul electric prin suprafaţa închisă S_i, desenată punctat în figură, care închide în interiorul său sarcina electrică Q_1. Conform legii fluxului electric, se obţine :

$$\int_{S_i}\bar{D}\,d\bar{s}=Q_1. \qquad (1\text{-}97)$$

Efectuînd produsele $\bar{D}$ d$\bar{s}$, se constată că acestea sînt diferite de zero numai pentru porțiunea de suprafață din dielectric, paralelă și egală cu suprafața S a armăturii, deoarece pe părțile laterale $\bar{D} \perp$ d$\bar{s}$, iar în armătura metalică $\bar{D}=0$.

Avînd în vedere că în spațiul dintre armături $\bar{D}$=const. și coliniar cu d$\bar{s}$, relația (1-97) devine :

$$DS=Q_1 \quad \text{sau} \quad \varepsilon ES=Q_1. \tag{1-98}$$

Pe de altă parte, cîmpul electric fiind omogen, se obține :

$$E=\frac{V_1-V_2}{d}, \tag{1-99}$$

unde d este distanța dintre armături.

Înlocuind relația (1-99) în (1-98), rezultă :

$$\varepsilon \frac{V_1-V_2}{d} S=Q_1,$$

de unde se deduce relația de calcul a capacității condensatorului plan :

$$C=\frac{Q_1}{V_1-V_2}=\frac{\varepsilon S}{d}. \tag{1-100}$$

Se observă că valoarea capacității este cu atît mai mare cu cît suprafața S a armăturilor este mai mare, cu cît permitivitatea ε a dielectricului este mai mare și cu cît distanța d dintre armături este mai mică.

1.8.3. CAPACITATEA ELECTRICĂ A CONDENSATORULUI CILINDRIC

Condensatorul cilindric are armăturile formate din doi cilindri metalici concentrici, cu razele r_1 și r_2 (fig. 1-45).

Ca și în cazul precedent al condensatorului plan, se calculează fluxul electric prin suprafața închisă S_i de formă cilindrică, cu raza r, desenată punctat în figură. Deoarece produsul scalar $\bar{D}$ d$\bar{s}$ este diferit de zero numai pentru punctele de pe suprafața laterală a cilindrului, unde $\bar{D} \| d\bar{s}$, și avînd în vedere că, din motive de simetrie D are aceeași valoare pentru toate punctele acestei suprafețe laterale, rezultă :

$$\int_{S_i} \bar{D}\, d\bar{s}=D\, 2\pi rh=Q_1, \tag{1-101}$$

unde h este lungimea condensatorului cilindric.

Din relația (1-101) se deduce :

$$D=\frac{Q_1}{2\pi rh} \quad \text{sau} \quad E=\frac{Q_1}{2\pi\varepsilon rh},$$

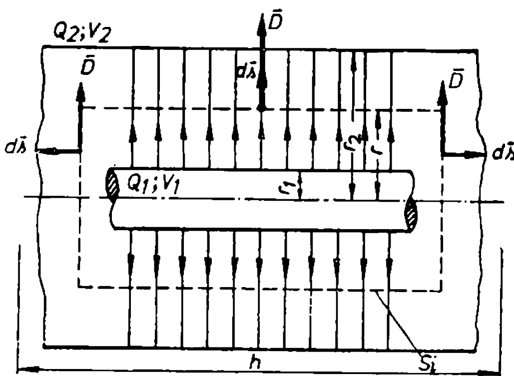


Fig. 1-45. Condensatorul cilindric.

cu care se obține diferența de potențial dintre armături :

$$V_1-V_2=\int_{M_1}^{M_2}\bar{E}\,d\bar{l}=\frac{Q_1}{2\pi\varepsilon h}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}=\frac{Q_1}{2\pi\varepsilon h}\ln\frac{r_2}{r_1}, \tag{1-102}$$

unde s-a ținut seama că $d\bar{l}=d\bar{r}$ și $d\bar{r}||\bar{E}$.

Expresia de calcul a capacității electrice a condensatorului cilindric rezultă din (1-102) în forma :

$$C=\frac{Q_1}{V_1-V_2}=\frac{2\pi\varepsilon h}{\ln\frac{r_2}{r_1}} \tag{1-103}$$

1.8.4. CAPACITATEA ELECTRICĂ A CONDENSATORULUI SFERIC

În fig. 1-46 este schițat condensatorul sferic. Calculînd fluxul electric prin suprafața sferică cu raza r, rezultă :

$$\int_{S_i}\bar{D}\,d\bar{s}=D\,4\,\pi r^2=Q_1, \tag{1-104}$$

deoarece, din motive de simetrie, D are aceeași valoare în toate punctele suprafeței sferice și $\bar{D}||d\bar{s}$.

Din relația (1-104) se deduce :

$$D=\frac{Q_1}{4\,\pi r^2},\quad \text{respectiv}\quad E=\frac{Q_1}{4\,\pi\varepsilon r^2}.$$

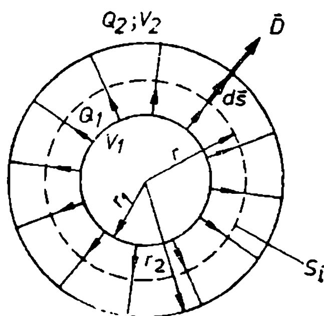


Fig. 1-46. Condensatorul sferic.

Diferența de potențial dintre cele două armături este :

$$V_1-V_2=\int_{M_1}^{M_2}\bar{E}d\bar{l}=\frac{Q_1}{4\,\pi\varepsilon}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2}=$$

$$=\frac{Q_1}{4\,\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right), \tag{1-105}$$

deoarece $d\bar{l}=d\bar{r}$ și $\bar{E}||d\bar{r}$.

Pentru relația de calcul a capacității electrice a condensatorului sferic se obține din (1-105) forma :

$$C=\frac{Q_1}{V_1-V_2}=\frac{4\,\pi\varepsilon r_1 r_2}{r_2-r_1}. \tag{1-106}$$

Dacă $r_2\to\infty$, atunci se obține capacitatea unei sfere metalice cu raza r_1 situată în vid (sau aer) :

$$C_{sf}=4\,\pi\varepsilon_0 r_1, \tag{1-107}$$

care în sistemul de unități neraționalizat, este :

$$C_{sf}=\varepsilon_0' r_1, \tag{1-108}$$

deoarece

$$\varepsilon_0' = 4\,\pi\varepsilon_0.$$

Pe baza relației (1-108) s-a introdus la timpul său unitatea de măsură pentru capacitatea electrică denumită centimetru [cm], considerîndu-se $\varepsilon_0' = 1$ și fără dimensiuni. S-a spus: sfera metalică cu raza de 1 cm are capacitatea electrică de 1 cm (1 F $= 9 \cdot 10^{11}$ cm).

1.8.5. GRUPAREA CONDENSATOARELOR

Condensatoarele electrice se pot grupa prin legarea lor în serie, în paralel, mixt sau complex. Aceasta cu scopul de a se obține o anumită capacitate a grupului de condensatoare.

Problema care se pune este de a determina capacitatea echivalentă a condensatoarelor grupate într-un anumit mod, valorile capacităților condensatoarelor din grup fiind cunoscute.

Gruparea în serie. Se consideră condensatoarele cu capacitățile C_1, C_2, ..., C_n legate în serie (fig. 1-47, *a*). Capacitatea echivalentă a grupului de condensatoare este C_e (fig. 1-47, *b*).

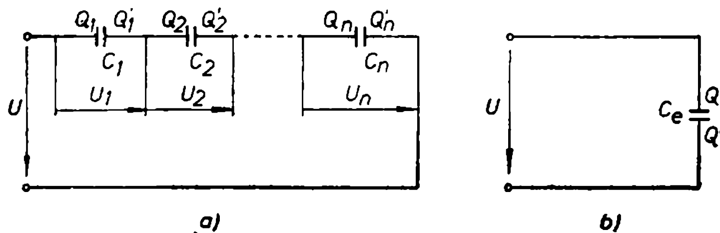


Fig. 1-47. Condensatoare grupate în serie (*a*) și capacitatea echivalentă (*b*).

Deoarece $Q_1 + Q_1' = 0$, $Q_2 + Q_2' = 0$, ... și, de asemenea, $Q_1' + Q_2 = 0$, $Q_2' + Q_3 = 0$, ..., rezultă: $Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_n = Q$, $Q_1' = Q_2' = \ldots = Q_n' = Q'$. Pe de altă parte: $U = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$ sau $\frac{Q}{C_e} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \ldots + \frac{Q}{C_n}$, de unde rezultă:

$$\frac{1}{C_e} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{C_\nu}. \qquad (1\text{-}109)$$

Dacă $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = C$, se obține:

$$C_e = \frac{C}{n}. \qquad (1\text{-}110)$$

Deci, prin legarea în serie a condensatoarelor, *se obține o capacitate echivalentă de valoare mai mică*. Pentru două condensatoare C_1 și C_2 legate în serie rezultă:

$$C_e = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}, \qquad (1\text{-}111)$$

adică capacitatea echivalentă este mai mică decît cea mai mică dintre cele două capacități și tinde către cea mai mică cînd cea mai mare tinde spre infinit :

$$\lim_{C_2\to\infty} C_e = \lim_{C_2\to\infty} \frac{C_1C_2}{C_1+C_2} = C_1. \tag{1-112}$$

Gruparea în paralel. Se consideră condensatoarele cu capacitățile C_1, C_2, ..., C_n legate în paralel (fig. 1-48, *a*). Capacitatea echivalentă a grupului de condensatoare este C_e (fig. 1-48, *b*) și se determină după cum urmează :

$$Q = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n$$

sau

$$C_eU = C_1U + C_2U + \ldots + C_nU,$$

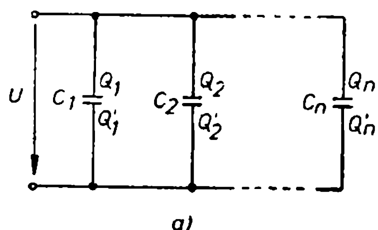
de unde rezultă :

$$C_e = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu. \tag{1-113}$$

Dacă se leagă în paralel n condensatoare de aceeași capacitate C, capacitatea echivalentă este :

$$C_e = nC. \tag{1-114}$$

Deci, prin legarea în paralel a condensatoarelor *se obține o capacitate echivalentă de valoare mai mare.*



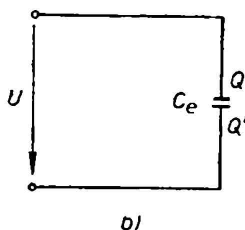


Fig. 1-48. Condensatoare grupate în paralel (*a*) și capacitatea echivalentă (*b*).

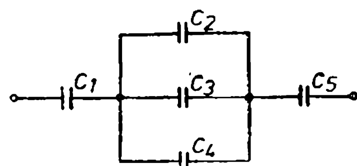


Fig. 1-49. Condensatoare grupate mixt.

Gruparea mixtă a condensatoarelor. Capacitatea echivalentă a unui grup de condensatoare legate atît în serie cît și în paralel se calculează avîndu-se în vedere cele arătate mai sus la legarea în serie, respectiv în paralel. De exemplu, capacitatea echivalentă a grupului de condensatoare legate ca în fig. 1-49 se obține din :

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2+C_3+C_4} + \frac{1}{C_5}.$$

1.8.6. CAPACITATEA UNUI CONDENSATOR CU DOI DIELECTRICI

Există situații cînd spațiul dintre armăturile unui condensator este ocupat de doi dielectrici, cu permitivitățile ε_1, ε_2 și de grosime d_1, d_2 (fig. 1-50). Capacitatea unui astfel de condensator se calculează ca și cum ar fi două condensatoare cu capacitățile :

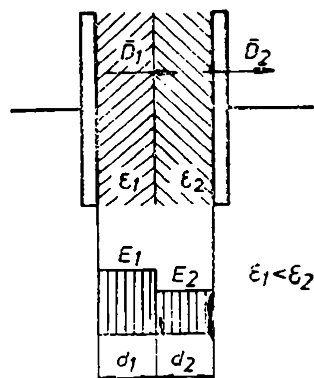


Fig. 1-50. Condensator plan cu doi dielectrici.

$$C_1=\frac{\varepsilon_1 S}{d_1},\qquad C_2=\frac{\varepsilon_2 S}{d_2}$$

legate în serie, adică

$$C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 S}{\varepsilon_1 d_2+\varepsilon_2 d_1}. \qquad (1\text{-}115)$$

Relația de mai sus a capacității condensatorului cu doi dielectrici se poate obține și ca valoare inversă a rezistenței dielectrice (v. relația 1-95)

$$\frac{1}{C}=R_d=\int_l\frac{dl}{\varepsilon S}=\int_{d_1}\frac{dl}{\varepsilon_1 S}+\int_{d_2}\frac{dl}{\varepsilon_2 S}=\frac{d_1}{\varepsilon_1 S}+\frac{d_2}{\varepsilon_2 S}.$$

Inducția electrică fiind independentă de sarcinile electrice de polarizare (legate), nu își schimbă valoarea de la un dielectric la altul al condensatorului plan cu doi dielectrici, adică $D_1=D_2$ sau $\varepsilon_1E_1=\varepsilon_2E_2$. Rezultă că intensitatea cîmpului electric are valoarea mai mare în dielectricul cu permitivitate mai mică. În fig. 1-50 este reprezentat acest lucru pentru cazul cînd $\varepsilon_1<\varepsilon_2$, adică $E_1>E_2$.

Dacă dielectricul cu permitivitate mică este un strat subține de aer datorit lipirii defectuoase a materialului dielectric pe armături atunci, din cauza valorii mari a intensității cîmpului electric, poate avea loc depășirea rigidității dielectrice și străpungerea stratului de aer. În această situație și cel de-al doilea dielectric se poate întîmpla să se străpungă deoarece este supus unei diferențe de potențial mai mari sau este deteriorat prin descărcările electrice din primul strat. Condensatorul străpuns (clacat) este scos din funcțiune.

1.8.7. VERIFICAREA CONDENSATOARELOR

Un condensator este în stare bună de funcționare dacă dielectricul său nu este străpuns. Verificarea stării unui condensator se poate face prin mai multe metode, dintre care cele mai simple sînt următoarele :

Verificarea cu ajutorul unui voltmetru. Se realizează montajul din fig. 1-51, *a*. Se consideră condensatorul în stare inițială descărcat (descărcarea completă a condensatorului se realizează scurtcircuitînd un anumit timp bornele sale). Prin închiderea întreruptorului *K*, condensatorul se încarcă de l sursa cu tensiunea *U*. În primul moment, cînd condensatorul este descărcat, diferența de potențial dintre armături este egală cu zero ($V_\alpha-V_\beta=0$), iar voltmetrul V indică tensiunea $U=V_a-V_b$ ($V_b=V_\beta=V_\alpha$).

Dacă dielectricul este în stare bună, pe măsură ce condensatorul se încarcă, diferența de potențial $V_\alpha - V_\beta$ crește, iar tensiunea măsurată de voltmetru scade (curba *1* din fig. 1-51, *b*). După încărcarea completă a condensatorului, cînd $V_\alpha - V_\beta = U$, voltmetrul indică tensiune zero.

Dacă dielectricul este străpuns, condensatorul nu se încarcă, iar voltmetrul indică tot timpul tensiunea U (curba *2* din fig. 1-51, *b*).

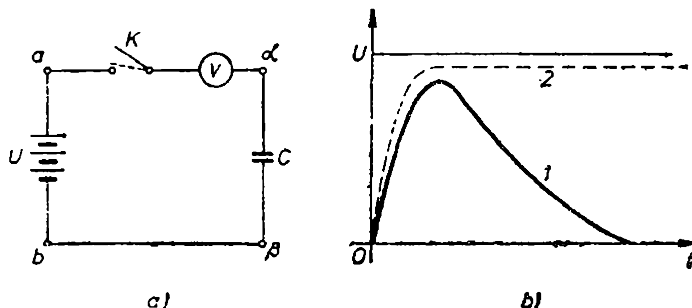


Fig. 1-51. Verificarea condensatorului cu voltmetrul : *a* — schema electrică; *b* — variația în timp a tensiunii măsurate.

Verificarea cu ajutorul unui ampermetru. Se realizează montajul din fig. 1-52, *a*. După închiderea întreruptorului K, curentul prin circuit, măsurat de ampermetru, poate să varieze fie după curba *1*, fie după curba *2* din fig. 1-52, *b*. În primul caz dielectricul condensatorului este în stare bună, iar în al doilea caz, condensatorul are dielectricul străpuns, curentul măsurat tot timpul de ampermetru fiind $\frac{U}{R}$.

În cazul condensatorului cu dielectricul în stare bună, curentul din circuit nu ajunge la valoarea zero, ci la valoarea i_0, denumită *curent rezidual*, datorită faptului că dielectricul nu este un izolator perfect.

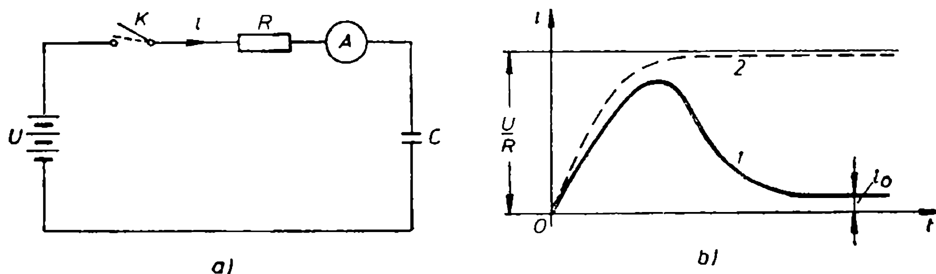


Fig. 1-52. Verificarea condensatorului cu ampermetrul : *a* — schema electrică; *b* — variația în timp a curentului măsurat.

Rezistența R legată în serie cu ampermetrul are rolul de a limita valoarea curentului în momentul inițial (imediat după închiderea întreruptorului K). În lipsa acestei rezistențe, în circuit apare un șoc de curent foarte mare, a cărui valoare este limitată numai de rezistența interioară a sursei, rezistența interioară a ampermetrului și rezistența conductoarelor de legătură, care sînt foarte mici. Șocul de curent poate fi dăunător pentru ampermetru.

1.8.8. CONDENSATOARE INDUSTRIALE

Condensatoarele electrice își găsesc întrebuințare în instalațiile energetice, în telefonie, telegrafie, semnalizare, radio, televiziune etc.

Clasificarea condensatoarelor electrice folosite în industrie se poate face după forma armăturilor, după natura dielectricului, după posibilitatea de modificare a capacității etc.

După forma armăturilor se deosebesc : condensatoare plane, cilindrice, sferice etc.

După natura dielectricului dintre armături, se disting mai multe tipuri de condensatoare.

— Condensatoarele cu vid, de formă cilindrică, așezate în vase etanșe din sticlă în care s-a făcut vid înaintat. Rigiditatea dielectrică foarte mare și pierderi practic nule le fac utilizabile la înaltă tensiune și înaltă frecvență.

— Condensatoarele cu aer, mai puțin folosite în instalațiile electrice.

— Condensatoarele cu ulei, folosite în special în instalații energetice la tensiuni de lucru pînă la 100 kV, ieftine și cu durată lungă de utilizare.

— Condensatoarele cu hîrtie impregnată au ca armături foițe metalice foarte subțiri, iar ca dielectric o foiță de hîrtie specială, foarte subțire și impregnată cu ulei mineral sau cu alte substanțe uleioase. Benzile formate din cele două straturi metalice și cel de hîrtie se înfășoară în rulouri, se usucă în vid, se impregnează, se închid în cutii metalice sau dielectrice și ansamblul astfel format se etanșează. Se folosesc la joasă frecvență.

— Condensatoarele cu dielectric de mase termoplastice, care tind să înlocuiască condensatoarele cu hîrtie. Dielectricul poate fi polistirol sau plasticon.

— Condensatoarele cu mică, care au dielectricul constituit din foițe naturale de mică iar armăturile din foițe de aliaj de staniu cu plumb sau cupru. Se folosesc condensatoare cu mică fixe și ajustabile, la circuite electronice de joasă și înaltă frecvență.

— Condensatoarele ceramice, constituite dintr-un disc sau un cilindru de material ceramic (dielectricul) pe suprafețele căruia se depun pelicule metalice (armăturile).

— Condensatoarele electrolitice sînt condensatoare polarizate, a căror armătură, conectată la potențialul pozitiv (anodul), este o foaie de aluminiu, iar cealaltă armătură, conectată la potențialul negativ (catodul), este constituită dintr-un electrolit care umple un vas din aluminiu în care se introduce anodul. Dielectricul este un strat molecular de oxid de aluminiu creat pe cale electrolitică la suprafața anodului. Grosimea foarte mică a dielectricului face posibilă realizarea unor condensatoare de capacități de la zeci pînă la mii de microfarazi, sub volum mic. Condensatoarele electrolitice se folosesc în special la filtrarea tensiunilor redresate și la acumularea sarcinii în instalații electroterapeutice. Nerespectarea polarității sau aplicarea unei tensiuni alternative conduce la distrugerea condensatorului electrolitic.

După posibilitatea de modificare a capacității se deosebesc : condensatoare fixe, condensatoare variabile și condensatoare ajustabile (trimere).

Aplicația 1-11. Două conductoare, A și B, rectilinii, filiforme și paralele, de lungime foarte mare, situate în aer la distanța $2R$ între ele și foarte departe de alte corpuri, respectiv de pămînt, sînt încărcate cu sarcini electrice egale și de semne opuse, uniform distribuite, de densitate ρ_l. Să se determine capacitatea pe unitatea de lungime între cele două conductoare și să se stabilească ecuația liniilor echipotențiale.

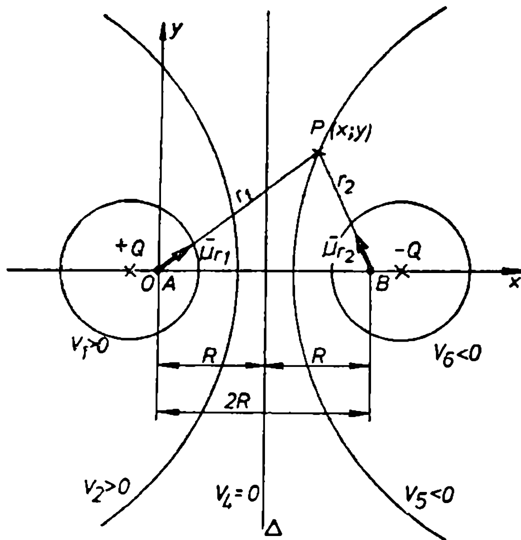


Fig. 1-53. Cercurile lui Apollonius.

Rezolvare. Potențialul electric în punctul P (x, y) (fig. 1-53) se determină cu formula logaritmică (1-89), adică :

$$V=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}=\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{(2R-x)^2+y^2}{x^2+y^2}$$

unde s-a ținut seama că $r_1=\sqrt{x^2+y^2}$ și $r_2=$ $=\sqrt{(2R-x)^2+y^2}$.

Pentru calculul capacității pe unitatea de lungime, se determină potențialele V_A și V_B ale celor două conductoare, adică potențialele în punctele situate pe suprafața acestora.

Cînd punctul P se găsește pe suprafața conductorului A avem : $r_1=R_0$, $r_2=2R$,

$$V_A=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2R}{R_0},$$

unde R_0 este raza secțiunii conductorului A (respectiv B).

Cînd punctul P se găsește pe suprafața conductorului B avem : $r_1=2R$, $r_2=R_0$, cu care se obține :

$$V_B=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_0}{2R}.$$

Deci

$$V_A-V_B=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\frac{2R}{R_0}-\ln\frac{R_0}{2R}\right)=\frac{\rho_l}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2R}{R_0}.$$

Capacitatea pe unitatea de lungime este :

$$C=\frac{\rho_l}{V_A-V_B}=\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{2R}{R_0}}.$$

Ecuația liniilor echipotențiale se obține ca loc geometric al punctelor în care potențialul electric este constant ($V=$const.). Alegînd axele de coordonate ca în fig. 1-53, condiția ca $V=$const. se exprimă prin:

$$\frac{r_2^2}{r_1^2}=\frac{(2R-x)^2+y^2}{x^2+y^2}=m^2 \text{ (const.)}$$

Din acest raport se obține ecuația cercului :

$$x^2+y^2+\frac{4R}{m^2-1}x=\frac{4R^2}{m^2-1}.$$

care are raza $\frac{2Rm}{m^2-1}$ și centrul $O\left[-\frac{2R}{m^2-1}, 0\right]$.

Prin urmare, liniile echipotențiale sînt în formă de cercuri, cunoscute sub denumirea de *cercurile lui Apollonius*. Pentru $m=1$ ($r_1=r_2$), adică $V=0$, cercul obține rază infinită (dreapta Δ din fig. 1-53).

1.9. ENERGIA ELECTROSTATICĂ. FORȚE

1.9.1. ENERGIA ELECTROSTATICĂ

În cîmpul electrostatic se înmagazinează energie, denumită energie electrostatică, care este constantă în raport cu timpul deoarece sarcinile electrice care produc cîmpul electrostatic sînt invariabile în timp, iar corpurile în stare de repaus.

Energia cîmpului electrostatic este egală cu lucrul mecanic total efectuat din exterior pentru a aduce sarcinile electrice de la infinit în pozițiile pe care le au în cîmp, adică pentru a încărca corpurile care în stare inițială sînt neîncărcate. Se consideră că această operație se face foarte lent, astfel ca limitele regimului electrostatic să nu fie depășite adică să nu aibă loc dezvoltare de căldură. Creșterea energiei electrostatice cu $\mathrm{d}W_e$ este urmarea efectuării unui lucru mecanic $\mathrm{d}A$, respectîndu-se principiul de conservare a energiei :

$$\mathrm{d}W_e+\mathrm{d}A=0. \qquad (1\text{-}116)$$

Pe această bază se stabilește expresia de calcul a energiei electrostatice.

Se consideră n corpuri în stare inițială neîncărcate și în stare finală încărcate cu sarcinile electrice $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k, \ldots, Q_n$, respectiv avînd potențialele $V_1, V_2, \ldots, V_k, \ldots, V_n$. Într-o situație intermediară de încărcare, corpurile au sarcinile electrice $Q_1', Q_2', \ldots, Q_k', \ldots, Q_n'$, egale cu o fracțiune din sarcinile finale, adică :

$$Q_k'=\lambda Q_k \ (0<\lambda<1). \qquad (1\text{-}117)$$

Aceste sarcini electrice intermediare produc într-un punct din spațiu intensitatea cîmpului electric $\bar{E}'$, iar corpurile respective vor avea potențialele $V_1', V_2', \ldots, V_k', \ldots, V_n'$:

$$V_k'=\lambda V_k. \qquad (1\text{-}118)$$

Pentru a trece sistemul din starea intermediară considerată în starea infinit apropiată, în care sarcinile de pe corpuri sînt $Q_k'+\mathrm{d}Q_k$, iar potențialele $V_k'+\mathrm{d}V_k$, trebuie aduse de la infinit pe corpurile respective sarcinile $\mathrm{d}Q_k$ ($k=1, 2, \ldots, n$), efectuîndu-se pentru aceasta lucrul mecanic :

$$\mathrm{d}A=\sum_{k=1}^{n}\int_{\infty}^{M_k}\mathrm{d}Q_k\bar{E}_k'\,\mathrm{d}\bar{l}=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}Q_k\int_{\infty}^{M_k}\bar{E}'\,\mathrm{d}\bar{l},$$

unde $\mathrm{d}Q_k\bar{E}'$ este forța ce acționează asupra sarcinii $\mathrm{d}Q_k$. Avînd în vedere că $\int_{\infty}^{M_k}\bar{E}'\,\mathrm{d}\bar{l}=-V_k'$, se obține :

$$\mathrm{d}A=-\sum_{k=1}^{n}V_k'\,\mathrm{d}Q_k,$$

respectiv ținînd seama de (1-116), se deduce :

$$\mathrm{d}W_e=\sum_{k=1}^{n}V_k'\,\mathrm{d}Q_k.$$

Înlocuind în această expresie relația (1-118) și avînd în vedere că $dQ_k = Q_k \, d\lambda$, rezultă:

$$dW_e = \sum_{k=1}^{n} V_k Q_k \lambda \, d\lambda,$$

din care, prin integrare, se obține:

$$W_e = \sum_{k=1}^{n} V_k Q_k \int_0^1 \lambda \, d\lambda,$$

adică

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} V_k Q_k. \qquad (1\text{-}119)$$

Ținînd seama că sarcinile electrice Q pot avea o repartiție volumetrică și superficială, relația (1-119) se poate scrie în forma:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{o} V \rho_0 \, do + \frac{1}{2} \int_{S} V \rho_s \, ds. \qquad (1\text{-}120)$$

Pentru exemplificare, se calculează energia electrostatică înmagazinată în cîmpul electric al unui condensator încărcat. Cele două armături ale condensatorului sînt două corpuri încărcate cu sarcinile electrice Q_1 și Q_2 și avînd potențialele V_1 și V_2. Rezultă:

$$W_e = \frac{1}{2} (Q_1 V_1 + Q_2 V_2).$$

Ținînd seama că $Q_1 = -Q_2$ și $U = V_1 - V_2$, se obține:

$$W_e = \frac{1}{2} Q_1 U. \qquad (1\text{-}121)$$

Capacitatea condensatorului fiind $C = \frac{Q_1}{U}$, din relația (1-121) se deduc și următoarele expresii de calcul a energiei la condensator:

$$W_e = \frac{1}{2} C U^2, \qquad (1\text{-}122)$$

$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C}. \qquad (1\text{-}123)$$

Relațiile (1-119) și (1-120) de calcul a energiei electrostatice ar putea să ne conducă la concluzia greșită că această energie este înmagazinată numai în corpuri (unde există sarcina electrică). În realitate, această energie este înmagazinată în cîmpul electric existent atît în corpuri, cît și în afara lor.

În cele ce urmează se stabilește o expresie de calcul a energiei electrostatice în funcție de mărimile de stare $\bar{E}$ și $\bar{D}$ ale cîmpului electric. În acest sens,

se consideră cîmpul electric omogen al unui condensator plan, pentru care se scrie :

$$U = Ed\ ;\ C = \frac{\varepsilon S}{d}$$

şi, prin înlocuire în relaţia (1-122), se obţine :

$$W_e = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon S}{d}E^2 d^2 = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 Sd.$$

Energia electrostatică înmagazinată în unitatea de volum a cîmpului este :

$$w_e = \frac{W_e}{S_d} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \qquad (1\text{-}124)$$

sau, avînd în vedere că $D = \varepsilon E$ şi că în medii izotrope vectorii $\bar{D}$ şi $\bar{E}$ sînt coliniari, rezultă :

$$w_e = \frac{1}{2}\bar{E}\bar{D}. \qquad (1\text{-}125)$$

Deci, energia electrică înmagazinată în întreg cîmpul este :

$$W_e = \frac{1}{2}\int_{v} \bar{E}\bar{D}\, dv. \qquad (1\text{-}126)$$

Relaţia (1-126) are valabilitate generală, inclusiv pentru situaţia cînd $\bar{E}$ şi $\bar{D}$ variază în timp (cîmpul electromagnetic).

1.9.2. FORŢA DE INTERACŢIUNE DINTRE PLĂCILE UNUI CONDENSATOR ELECTRIC

Se consideră un condensator plan (fig. 1-54) la care energia înmagazinată în cîmpul său electric este :

$$W_e = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{\varepsilon S}x.$$

Se observă că dacă $Q_1 = \text{const.}$, adică armăturile sînt izolate faţă de alte corpuri, energia se măreşte atunci cînd armăturile se depărtează, şi invers, scade cînd armăturile se apropie.

Conform principiului lui Thomson, orice sistem fizic are tendinţa de a se situa în starea corespunzătoare unei energii minime. Ca urmare, în cazul condensatorului, există forţe care acţionează asupra armăturilor în sensul de a le apropia, astfel ca energia electrostatică să devină minimă.

Forţa ce acţionează asupra armăturilor se poate exprima ca o forţă generalizată (Lagrange) în forma :

$$F = -\left(\frac{\partial W_e}{dx}\right)_{Q_1=\text{const.}} = -\frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{\varepsilon S}, \qquad (1\text{-}127)$$

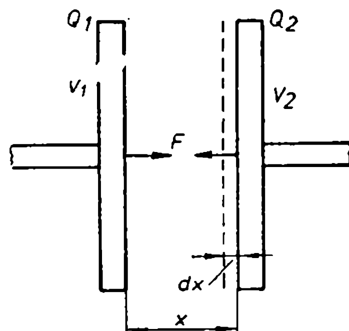


Fig. 1-54. Forţa de interacţiune între armăturile condensatorului plan.

unde x este coordonata generalizată.

Cînd forţa generalizată este pozitivă, înseamnă că acţionează în sensul creşterii coordonatei generalizate. În cazul de faţă forţa $\bar{F}$ este negativă, deci acţionează în sensul micşorării lui x (fig. 1-54).

Avînd în vedere că $Q_1 = CU = \frac{\varepsilon S}{x} U$, relaţia (1-127) devine:

$$F = -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon S}{x^2} U^2. \qquad (1\text{-}128)$$

Forţa specifică ce acţionează pe unitatea de suprafaţă a armăturii condensatorului are valoarea $\frac{|F|}{S}$, adică

$$f = \frac{\rho_s^2}{2\varepsilon} \quad \text{sau} \quad f = \frac{1}{2} \varepsilon \left(\frac{U}{x} \right)^2, \qquad (1\text{-}129)$$

unde ρ_s este densitatea de suprafaţă a sarcinii Q_1 de încărcare a condensatorului.

Capitolul 2

ELECTROCINETICA

Electrocinetica se ocupă cu studiul stărilor şi fenomenelor din interiorul conductoarelor parcurse de curent electric de conducţie. Purtătorii mobili de sarcini electrice, a căror mişcare ordonată determină curentul electric de conducţie, sînt electronii liberi la metale (conductoare de categoria I-a) şi ionii pozitivi şi negativi la electroliţi (conductoare de categoria II-a). La semiconductoare, purtătorii mobili de sarcini electrice sînt electronii majoritari şi golurile.

Starea electrocinetică a conductoarelor este însoţită de dezvoltare de căldură. La electroliţi, formarea ionilor şi deplasarea lor este însoţită de reacţii chimice. La metale nu se produc reacţii chimice prin deplasarea electronilor liberi.

2.1. CARACTERIZAREA STĂRII ELECTROCINETICE A MEDIILOR (CORPURILOR) CONDUCTOARE

Pentru ca electronii liberi din metale, respectiv ionii din electroliţi, să se deplaseze în spaţiul ocupat de conductoare, trebuie ca asupra lor să acţioneze forţe. În starea de echilibru electrostatic s-a văzut că sarcinile electrice sînt în repaus, iar intensitatea cîmpului electric în corpurile metalice este zero. În starea electrocinetică, sarcinile electrice se mişcă ordonat cu o anumită viteză şi, pentru aceasta, este necesar ca intensitatea cîmpului electric în metale şi în celelalte conductoare să aibă o valoare diferită de zero, ceea ce constituie deosebirea esenţială între fenomenul electrostatic şi fenomenul electrocinetic.

Menţinerea unui cîmp electric $\bar{E}$ diferit de zero în interiorul conductoarelor poate fi realizată cu ajutorul surselor de curent cum sînt: elementele galvanice, generatoarele electrice rotative etc. De exemplu, legînd capetele unui conductor metalic la două borne între care se menţine o diferenţă de potenţial V_1-V_2 constantă, în interiorul conductorului ia naştere un cîmp electric constant, vectorul $\bar{E}$ al intensităţii cîmpului fiind orientat de la capătul cu potenţial mai ridicat V_1 spre capătul cu potenţial mai scăzut V_2 (fig. 2-1). Asupra unui electron liber din metal acţionează forţa $\bar{F}=q\bar{E}$ orientată în sens

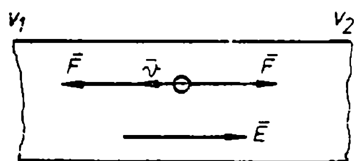


Fig. 2-1. Conductor în stare electrocinetică.

opus față de $\bar{E}$, deoarece $q<0$. Sub acțiunea acestei forțe, electronul se mişcă cu viteza $\bar{v}$ de la potențialul mai scăzut spre potențialul mai ridicat.

În timpul mişcării electronilor mai apare şi forța de frecare $\bar{F}_r$, datorită ciocnirilor dintre electron şi ceilalți atomi, care se opune mişcării. În momentul cînd $\bar{F}+\bar{F}_r=0$, are loc mişcarea cu viteză constantă a electronului.

Din cele prezentate, reiese că starea electrocinetică este însoțită şi de dezvoltare de căldură în interiorul conductoarelor, datorită „frecării" ce are loc la mişcarea sarcinilor electrice.

2.2. CURENTUL ELECTRIC ŞI DENSITATEA DE CURENT

2.2.1. CURENTUL ELECTRIC DE CONDUCȚIE

S-a arătat că, sub acțiunea cîmpului electric, purtătorii de sarcini se deplasează, sarcinile negative în sens opus intensității cîmpului electric (sensul în care potențialul crește) iar sarcinile pozitive în acelaşi sens cu intensitatea cîmpului electric (sensul în care potențialul scade). Orice mişcare orodonată de sarcini electrice în interiorul unui mediu conductor determină *curentul electric de conducție.*

După natura purtătorilor de sarcini electrice, adică ioni sau electroni, curentul de conducție se numeşte curent de conducție *ionic* sau *electronic*, iar despre corpul respectiv se spune că prezintă conducție ionică (electroliții) sau conducție electronică (metalele).

Proprietatea corpurilor de a fi sediul unui curent electric de conducție se numeşte conductibilitate electrică şi se caracterizează local prin mărimea de material numită *conductivitate electrică.*

Pe lîngă curentul electric de conducție mai există : curentul electric de convecție, curentul electric de deplasare, curentul electric amperian etc.

Curentul electric de convecție constă în mişcarea sarcinilor electrice odată cu elementele de corp care le conțin şi în raport cu sistemul de referință față de care se consideră mişcarea macroscopică a acestor elemente. Un exemplu de curent electric de convecție este curentul electric în vid, constituit din mişcarea de ansamblu a electronilor în tuburile electronice.

Curentul electric de deplasare. Se consideră o suprafață S imobilă situată într-un cîmp electric variabil în timp. Curentul electric de deplasare este determinat de viteza de variație a fluxului electric prin suprafața respectivă. Evident că un astfel de curent există numai atunci cînd cîmpul electric este variabil în timp.

Curentul electric amperian (molecular) este determinat de mişcarea pe orbite închise a purtătorilor de sarcini electrice, precum şi de mişcarea de rotație proprie (de spin) a particulelor elementare încărcate cu sarcini electrice.

Prin definiție, sensul pozitiv al curentului electric este sensul în care se mişcă sarcinile electrice pozitive.

Din punct de vedere cantitativ, intensitatea curentului electric de conducție este egală cu sarcina electrică, atît pozitivă cît și negativă, ce trece printr-o secțiune a conductorului în unitatea de timp:

$$i=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}. \tag{2-1}$$

În starea electrocinetică, în care sarcinile electrice se deplasează în conductor cu viteză constantă, curentul electric este constant în timp (curent continuu), adică aceeași secțiune este străbătută de cantități egale de sarcini electrice în intervale de timp egale. Deci,

$$I=\frac{Q}{t}. \tag{2-2}$$

Curentul variabil în timp se notează cu i, iar curentul continuu (constant în timp) se notează cu I.

Curentul electric este o mărime de natură scalară, deoarece este definită ca raportul a două mărimi scalare: sarcina electrică și timpul.

Din relațiile (2-1) și (2-2) se deduce sarcina electrică ce trece prin secțiunea conductorului în timpul t:

$$Q=\int_0^t i\,\mathrm{d}t. \tag{2-3}$$

respectiv

$$Q=It. \tag{2-4}$$

Unitatea de măsură pentru curentul electric în sistemul de unități MKSA se numește amper (simbol A).

2.2.2. DENSITATEA CURENTULUI ELECTRIC DE CONDUCȚIE

Pentru caracterizarea locală a stării electrocinetice din conductoare se folosește mărimea vectorială notată cu $\bar{J}$ și denumită densitatea curentului electric de conducție, definită astfel încît fluxul acestui vector printr-o secțiune S a conductorului să fie egal cu intensitatea curentului electric prin acea secțiune, adică:

$$i=\int_S \bar{J}\,\mathrm{d}\bar{s}. \tag{2-5}$$

Sensul vectorului $\bar{J}$ este același cu sensul în care se mișcă sarcinile electrice pozitive sub acțiunea forței $\bar{F}=Q\bar{E}$, adică $\bar{J}$ are același sens cu intensitatea $\bar{E}$ a cîmpului electric.

Sensul vectorului elementului de suprafață $\mathrm{d}\bar{s}$ se stabilește cu ajutorul regulei burghiului drept după adoptarea prealabilă a sensului pozitiv pentru conturul suprafeței deschise S (fig. 2-2). Dependent de valorile unghiului α

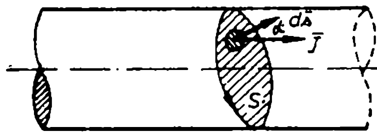


Fig. 2-2. Densitatea curentului electric de conducție într-un punct al secțiunii oarecare a conductorului.

dintre vectorii $\bar{J}$ și $d\bar{s}$, curentul i poate obține valoare pozitivă sau valoare negativă. Pentru a obține un curent pozitiv prin suprafața deschisă S, sensul pozitiv pe conturul acestei suprafețe se stabilește cu regula burghiului drept, asociată sensului vectorului $\bar{J}$.

În cazul particular, cînd suprafața S este secțiunea plană, transversală, a conductorului, iar densitatea de curent $\bar{J}$ are aceeași valoare și orientare în toate punctele acestei secțiuni, adică $\bar{J}$ și $d\bar{s}$ sînt vectori coliniari ($\alpha=0$) și $\bar{J}$=const., din relația (2-5) se obține:

$$i=JS, \quad J=\frac{i}{S}. \tag{2-6}$$

Pe baza relațiilor (2-6) și (2-1), densitatea curentului de conducție poate fi definită prin cantitatea de sarcini electrice ce străbat unitatea de suprafață în unitatea de timp.

Unitatea de măsură pentru densitatea de curent este amper pe metru patrat [A/m^2]. Pentru că această unitate este prea mare, secțiunile conductoarelor electrice fiind exprimate, de obicei, în mm^2, practic se lucrează cu unitatea A/mm^2:

$$1\frac{\text{A}}{\text{m}^2}=\frac{1\text{ A}}{(10^3\text{ mm})^2}=10^{-6}\frac{\text{A}}{\text{mm}^2}.$$

Densitatea de curent la conductoarele folosite în construcția mașinilor și aparatelor electrice nu trebuie să depășească anumite valori admisibile pentru ca aceste conductoare să nu se încălzească peste limita admisibilă datorită efectului termic al curentului.

Liniile la care vectorul densității de curent este tangent se numesc *linii de curent*.

2.2.3. DENSITATEA CURENTULUI ELECTRIC DE DEPLASARE

Se consideră un condensator a cărui stare de încărcare este variabilă în timp (fig. 2-3). Pentru suprafața închisă și imobilă S_i ce cuprinde în interiorul său armătura încărcată cu sarcina electrică pozitivă Q_1 se aplică legea fluxului electric:

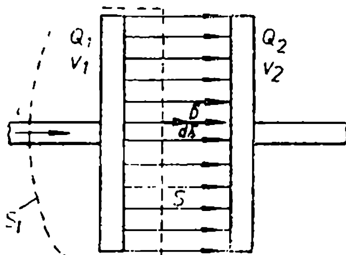


Fig. 2-3. Figură explicativă pentru calculul fluxului electric.

$$\psi=\int_{S_i}\bar{D}\,d\bar{s}=Q_1.$$

Întrucît $D\neq0$ numai în punctele suprafeței S din dielectric, iar în restul suprafeței S_i practic $D=0$, rezultă:

$$\psi=\int_{S}\bar{D}\,d\bar{s}=Q_1. \tag{2-7}$$

În condițiile precizate, curentul electric de deplasare prin suprafața S este egal cu derivata în raport cu timpul a fluxului electric prin aceeași suprafață :

$$i_D = \frac{d\psi}{dt} = \int_S \frac{d\bar{D}}{dt} d\bar{s}, \tag{2-8}$$

unde

$$\bar{J}_D = \frac{d\bar{D}}{dt} \tag{2-9}$$

este densitatea curentului electric de deplasare.

Deci, în conductorul metalic există curentul de conducție cu densitatea $\bar{J}$, iar în dielectric există curentul de deplasare cu densitatea $\bar{J}_D$, asigurîndu-se în acest fel continuitatea liniilor de curent în circuitul condensatorului.

Se remarcă faptul că atunci cînd inducția electrică $\bar{D}$ este constantă în timp (regim static), rezultă $\bar{J}_D = 0$.

2.2.4. LEGĂTURA DINTRE DENSITATEA CURENTULUI DE CONDUCȚIE ȘI VITEZA DE MIȘCARE A SARCINILOR ELECTRICE

Se consideră un conductor metalic în care purtătorii de sarcini electrice în mișcare sînt electronii. Densitatea volumetrică a acestor sarcini se notează cu ρ_0, iar viteza lor de mișcare cu $\bar{v}$ (fig. 2-4). Într-un interval de timp dt,

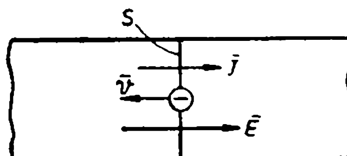


Fig. 2-4. Densitatea curentului electric de conducție și mișcarea electronilor liberi din metal.

printr-o secțiune transversală S a conductorului va trece cantitatea de sarcini electrice :

$$dQ = \rho_0 S v \, dt,$$

de unde rezultă :

$$i = \frac{dQ}{dt} = \rho_0 S v.$$

Pentru densitatea de curent se obține :

$$J = \frac{i}{S} = \rho_0 v$$

sau, vectorial :

$$\bar{J} = \rho_0 \bar{v}. \tag{2-10}$$

Ținînd seama că $\bar{v}$ este în sens opus față de $\bar{E}$ și că $\rho_0 < 0$, rezultă $\bar{J}$ în același sens cu intensitatea cîmpului electric $\bar{E}$.

În cazul conductoarelor electrolitice, la determinarea intensității curentului printr-o suprafață S, respectiv a densității de curent, trebuie să se ia în considerare că această suprafață este străbătută într-un sens de sarcinile pozitive și în sens opus de sarcinile negative, adică

$$i=\frac{dQ_-}{dt}+\frac{dQ_+}{dt}=(\rho_o v_- +\rho_{0+} v_+)\ S,$$

$$J=\rho_{0-} v_- +\rho_{0+} v_+$$

sau, vectorial :

$$\bar{J}=\rho_{0-}\bar{v}_- +\rho_{0+}\bar{v}_+. \tag{2-11}$$

De fapt, trecerea unei cantități de sarcini electrice negative prin suprafață într-un sens este echivalentă cu trecerea aceleiași cantități de sarcini pozitive în sens opus, prin aceeași suprafață.

2.3. LEGEA CONSERVĂRII SARCINILOR ELECTRICE LIBERE

Se consideră o suprafață închisă S_t imobilă față de sistemul de referință, în interiorul căreia se găsește sarcina electrică liberă Q (fig. 2-5). Dacă sarcina electrică Q din interiorul suprafeței S_t scade în timp, înseamnă că prin suprafața respectivă trec sarcini electrice negative din exterior spre interior sau sarcini electrice pozitive din interior spre exterior. Mișcarea are loc invers dacă sarcina Q crește în timp. Deci, prin suprafața S_t există un curent de conducție. Cînd sarcina scade, vectorul densității de curent este orientat spre exteriorul suprafeței, iar cînd crește, spre interior (fig. 2-5).

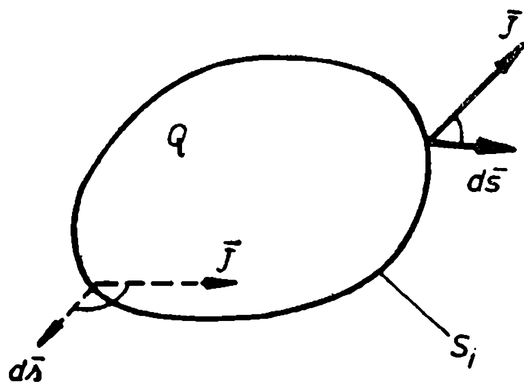


Fig. 2-5. Curentul de conducție prin suprafața închisă.

Legea conservării sarcinilor electrice libere exprimată sub formă integrală precizează că *fluxul densității de curent* $\bar{J}$ (intensitatea curentului electric de conducție) *prin suprafața închisă* S_i *este egal cu viteza de variație în timp, luată cu semn schimbat, a sarcinii electrice libere din interiorul suprafeței*, adică :

$$i_{S_t}=\int_{S_t}\bar{J}\,d\bar{s}=-\frac{dQ}{dt}. \tag{2-12}$$

Semnul minus se explică prin faptul că atunci cînd Q scade, $dQ<0$ iar $\bar{J}\,d\bar{s}>0$ ($\alpha<90°$), respectiv cînd Q crește $dQ>0$ iar $\bar{J}\,d\bar{s}<0$ ($\alpha>90°$) ; dt este întotdeauna pozitiv.

În regim electrocinetic staționar, mărimile electrice și magnetice sînt invariabile în timp, deci $Q=$const., $\frac{dQ}{dt}=0$ și relația (2-12) devine :

$$\int_{S_t}\bar{J}\,d\bar{s}=0, \tag{2-13}$$

adică curentul electric de conducție prin suprafața închisă S_i este egal cu zero. Același rezultat se obține și în regimul electrocinetic cvazistaționar, pentru care mărimile variază lent în timp, deci $\frac{dQ}{dt} \cong 0$.

Din relația (2-13) se deduce prima teoremă a lui Kirchhoff prin care se exprimă legătura dintre curenții de conducție din laturile concurente într-un nod ale unei rețele electrice ce funcționează în regim staționar (curent continuu) sau în regim cvazistaționar (curent alternativ de frecvență joasă).

2.4. LEGEA CONDUCȚIEI ELECTRICE (LEGEA LUI OHM)

Legea conducției electrice se exprimă fie sub formă locală, fie sub formă integrală.

2.4.1. FORMA LOCALĂ

Legea conducției electrice sub formă locală exprimă legătura dintre densitatea curentului de conducție și intensitatea cîmpului electric dintr-un punct al conductorului :

$$\bar{J} = \sigma (\bar{E} + \bar{E}_i) \qquad (2\text{-}14)$$

adică, densitatea curentului de conducție $\bar{J}$ este proporțională cu suma dintre intensitatea cîmpului electric $\bar{E}$ și intensitatea cîmpului electric imprimat $\bar{E}_i$. Factorul de proporționalitate este o mărime fizică scalară, cu dimensiunea $1/\Omega m$, denumită *conductivitatea electrică,* a cărei valoare depinde de natura conductorului (constantă de material).

Intensitatea cîmpului electric imprimat, $\bar{E}_i$, este o mărime prin intermediul căreia forțele de natură neelectrică ce acționează asupra purtătorilor de sarcini electrice sînt echivalate cu forța produsă de un cîmp electric, adică :

$$\bar{E}_i = \frac{\bar{F}_{ne}}{Q}. \qquad (2\text{-}15)$$

Un astfel de cîmp electric imprimat apare datorită unor neomogenități fizico-chimice sau de temperatură existente în lungul conductorului, așa cum este cazul, spre exemplu, la elementele galvanice.

Rezistivitatea electrică, notată cu ρ, se definește prin valoarea inversă a conductivității electrice :

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \qquad (2\text{-}16)$$

și se măsoară în Ωm sau în $\Omega \frac{mm^2}{m}$.

Ordonarea unor metale din punctul de vedere al valorilor crescătoare ale rezistivității electrice este : argintul, cuprul, aurul, aluminiul, molibdenul,

zincul, wolframul, tantalul, fierul, cobaltul, nichelul etc. Pentru cupru pur şi aluminiu pur, rezistivitatea electrică are valorile :

$$\rho_{Cu}=\frac{1}{57}\ \Omega\frac{mm^2}{m}\ ;\ \rho_{Al}=\frac{1}{33}\ \Omega\frac{mm^2}{m}.$$

În tabela 2-1 sînt date valorile rezistivităţii electrice pentru cîteva materiale uzuale.

Tabela 2-1

Rezistivitatea şi coeficientul de temperatură pentru unele conductoare

Materialul	ρ $\Omega\left[\frac{mm^2}{m}\right]$	α_{20° [1/°C]	Materialul	ρ $\Omega\left[\frac{mm^2}{m}\right]$	α_{20° [1/°C]
Alamă	0,07	0,002	Manganină	0,42	0,00001
Aluminiu	0,026	0,004	Mercur	0,958	0,0009
Argint	0,016	0,036	Nichel	0,07	0,006
Aur	0,024	0,0037	Oţel	0,1	0,006
Bronz fosforos	0,115	0,004	Platină	0,1	0,003
Cărbune	60...80	−0,0002... −0,0008	Plumb	0,21	0,004
			Staniu	0,11	0,0044
Constantan	0,49	0,000004	Wolfram	0,055	0,005
Cromnichel	1,1	0,00015	Zinc	0,06	0,004
Cupru	0,0175	0,004			

Folosind rezistivitatea electrică, forma locală a legii conducţiei electrice devine :

$$\bar{J}=\frac{1}{\rho}(\bar{E}+\bar{E}_i)\ \text{sau}\ \bar{E}+\bar{E}_i=\rho\bar{J} \qquad (2\text{-}17)$$

Pentru conductoarele omogene $\bar{E}_i=0$, respectiv :

$$\bar{J}=\sigma\bar{E}\ ;\ \bar{E}=\rho\bar{J}, \qquad (2\text{-}18)$$

de unde se observă că vectorii $\bar{J}$ şi $\bar{E}$ sînt coliniari.

Relaţia (2-18) este denumită legea lui Ohm sub formă locală.

2.4.2. FORMA INTEGRALĂ

Legea conducţiei electrice sub formă integrală exprimă legătura între curentul electric de conducţie dintr-un conductor şi tensiunea electrică ce acţionează în lungul conductorului, respectiv rezistenţa electrică a conductorului. Experienţa dovedeşte că intensitatea i a curentului electric este direct proporţională cu tensiunea u_l şi invers proporţională cu rezistenţa R :

$$i=\frac{u_l}{R}. \qquad (2\text{-}17)$$

Se precizează că prin u_i se înțelege tensiunea electrică în sens larg în lungul conductorului, constînd, în general, din următoarele componente aditive: tensiunea electrică la borne, tensiunea electromotoare imprimată și tensiunea electromotoare indusă.

Aplicată la circuite electrice de curent continuu, legea conducției electrice sub formă integrală este cunoscută și sub denumirea de *legea lui Ohm*.

Pentru exemplificare, se consideră circuitul de curent continuu din fig. 2-6, *a* constituit dintr-un element galvanic cu t.e.m. U_e și rezistența interioară R_i, de la care se alimentează un receptor cu rezistența R. Conductoarele din care este realizat circuitul se consideră filiforme, deci curentul I este uniform repartizat pe secțiunea transversală S a conductorului, adică $I=JS$.

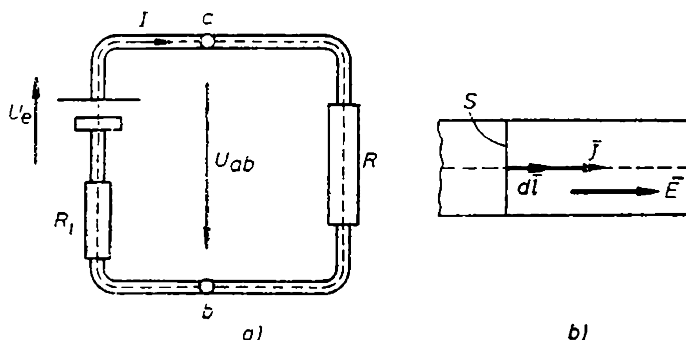


Fig. 2-6. Figură explicativă pentru legea lui Ohm:
a — circuit electric închis; *b* — secțiune prin conductor.

Legea lui Ohm pentru porțiunea de circuit a receptorului, cuprinsă între bornele $a-b$, unde nu există surse de tensiune electromotoare, se exprimă prin relația:

$$I=\frac{U_{ab}}{R}, \tag{2-18}$$

adică curentul este direct proporțional cu tensiunea electrică U_{ab} la borne și invers proporțional cu rezistența electrică a circuitului. Din relația (2-18) rezultă că tensiunea electrică aplicată la bornele circuitului este egală cu *căderea de tensiune* din circuit exprimată prin produsul dintre curent și rezistență:

$$U_{ab}=IR. \tag{2-19}$$

Legea lui Ohm pentru porțiunea de circuit a sursei, cuprinsă între punctele $b-a$, se exprimă prin relația:

$$I=\frac{U_e-U_{ab}}{R_i}, \tag{2-20}$$

de unde rezultă:

$$U_e-U_{ab}=IR_i \tag{2-21}$$

sau

$$U_e=U_{ab}+IR_i. \tag{2-22}$$

Deci, rezultă că t.e.m. a sursei este mai mare decît tensiunea la bornele sale cu căderea de tensiune pe rezistența interioară. Tensiunea electromotoare poate fi măsurată cu ajutorul unui voltmetru legat la borne numai dacă sursa este în gol ($I=0$).

Legea lui Ohm pentru circuitul închis este :

$$I=\frac{U_e}{R+R_i}, \qquad (2\text{-}23)$$

unde $R+R_i$ este rezistența electrică totală a circuitului.

Aplicația 2-1. Să se arate că relațiile de mai sus, prin care se exprimă legea lui Ohm sub formă integrală, pot fi deduse din relațiile de exprimare a legii sub formă locală.

Rezolvare. Se calculează integrala de linie

$$\int(\bar{E}+\bar{E}_i)\,\mathrm{d}\bar{l}=\int\rho\bar{J}\,\mathrm{d}\bar{l}$$

de-a lungul unei linii situate în mediul circuitului (unde $J\neq0$) și parcursă în sensul curentului (fig. 2-6, *a*).

Ținînd seama că vectorii $\bar{J}$ și $\mathrm{d}\bar{l}$ sînt coliniari (fig. 2-6, *b*) și avînd în vedere $I=JS$, rezultă :

$$\int(\bar{E}+\bar{E}_i)\,\mathrm{d}\bar{l}=\int\rho\,\frac{JS}{S}\,\mathrm{d}l=I\int\rho\,\frac{\mathrm{d}l}{S}.$$

Pentru circuitul receptorului $\bar{E}_i=0$ și

$$\int_a^b\bar{E}\,\mathrm{d}\bar{l}=I\int_a^b\rho\,\frac{\mathrm{d}l}{S}$$

sau

$$U_{ab}=IR,$$

unde $U_{ab}=\int_a^b\bar{E}\,\mathrm{d}\bar{l}$ și $R=\int_a^b\rho\,\frac{\mathrm{d}l}{S}$ sînt tensiunea electrică la borne, respectiv rezistența electrică a porțiunii de circuit cuprinsă între punctele *a* și *b*.

Pentru circuitul sursei $\bar{E}_i\neq0$ și

$$\int_b^a(\bar{E}+\bar{E}_i)\,\mathrm{d}\bar{l}=I\int_b^a\rho\,\frac{\mathrm{d}l}{S}$$

sau

$$-U_{ab}+U_e=IR_i,$$

unde

$$-U_{ab}=\int_b^a\bar{E}\,\mathrm{d}\bar{l},\ R_i=\int_b^a\rho\,\frac{\mathrm{d}l}{S}\ \text{și, prin definiție,}\ U_e=\int_b^a\bar{E}_i\,\mathrm{d}\bar{l}.$$

Pentru întregul circuit se obține :

$$\oint(\bar{E}+\bar{E}_i)\,\mathrm{d}\bar{l}=I\oint\rho\,\frac{\mathrm{d}l}{S}$$

sau

$$U_e=I\,(R+R_i),$$

unde s-a ținut seama că $\oint\bar{E}\,\mathrm{d}\bar{l}=0$

2.5. REZISTENȚA ELECTRICĂ. REZISTOARE

2.5.1. DEFINIREA NOȚIUNII DE REZISTENȚĂ ELECTRICĂ

Rezistența electrică este o mărime fizică (parametru) prin care se caracterizează proprietatea mediilor de a se opune trecerii curentului electric de conducție.

Sub aspect fenomenologic, rezistența electrică se poate explica prin „ciocnirile" ce au loc între purtătorii mobili de sarcini electrice (electroni, ioni) și alte particule elementare ale substanței. Aceste ciocniri determină o anumită forță de „frecare" ce se opune mișcării ordonate a purtătorilor de sarcini electrice și conduc la încălzirea conductorului parcurs de curent. Pentru explicare, se consideră un conductor metalic parcurs de curent electric de conducție. Electronii liberi din metal (gazul electronic) execută atît o mișcare dezordonată, cu viteza dezordonată mijlocie $\bar{v}_{dm}$, cît și o mișcare ordonată, cu viteza medie $\bar{v}$, determinată de forța produsă de cîmpul electric din conductor ($\bar{F}=q\bar{E}$). S-au considerat vitezele mijlocii deoarece, în mișcarea lor, electronii de masă m_e se ciocnesc atît între ei, cît și cu alte particule ale rețelei cristaline de masă mult mai mare. Ciocnirea dintre doi electroni fiind perfect elastică, nu conduce la modificarea vitezei ordonate medii, cel mult se modifică viteza dezordonată. În schimb, la ciocnirea unui electron cu o particulă de masă mult mai mare, viteza electronului se reduce de la valoarea maximă, pe care o are înainte de ciocnire, la zero după ciocnire. Energia cinetică acumulată de electron pînă în momentul ciocnirii, egală cu $\frac{1}{2}m_e v_{max}^2$, este cedată în întregime particulei din rețeaua cristalină cu care se ciocnește și care își mărește astfel amplitudinea oscilațiilor proprii în jurul poziției de echilibru. Acest fenomen este însoțit de dezvoltare de căldură.

Media statistică a distanței dintre două ciocniri consecutive ale electronului se numește *liberul parcurs mediu*, notat cu l. Timpul dintre două ciocniri consecutive este:

$$t=\frac{l}{|\bar{v}_{dm}+\bar{v}|}\cong\frac{l}{v_{dm}}, \qquad (2\text{-}24)$$

unde s-a avut în vedere că $v \ll v_{dm}$.

Accelerația imprimată electronului de către cîmpul electric este:

$$\bar{a}_e=\frac{\bar{F}}{m_e}=\frac{q\bar{E}}{m_e}, \qquad (2\text{-}25)$$

iar viteza ordonată medie determinată de acest cîmp are expresia:

$$\bar{v}=\frac{1}{2}(0+\bar{v}_{max})=\frac{1}{2}\bar{a}t=\frac{1}{2}\frac{q\bar{E}}{m_e}t,$$

în care, dacă se înlocuiește relația (2-24), se obține:

$$\bar{v}=\frac{ql}{2\,m_e v_{dm}}\bar{E}. \qquad (2\text{-}26)$$

Forța $\bar{F}$ determinată de cîmp imprimă electronului viteza $\bar{v}$ în sens opus cîmpului (fig. 2-1), iar forța de frecare $\bar{F}_r$ se opune mișcării. Viteza $\bar{v}$ are o valoarea constantă în momentul cînd cele două forțe se echilibrează, adică :

$$\bar{F}+\bar{F}_r=0 \text{ sau } q\bar{E}-K'\bar{v}=0$$

de unde rezultă :

$$\bar{v}=\frac{q}{K'}\bar{E}. \tag{2-27}$$

Raportul $\frac{q}{K'}=K_-<0$ $(K'>0)$ se numește *factor de mobilitate*, cu care relația (2-27) devine :

$$\bar{v}=K_-\bar{E}. \tag{2-28}$$

Comparînd relațiile (2-26) și (2-28), se obține pentru factorul de mobilitate expresia :

$$K_-=\frac{ql}{2m_e v_{dm}}. \tag{2-29}$$

Pe de altă parte, avînd în vedere relația (2-10) rezultă :

$$\bar{J}=\rho_0 K_-\bar{E}=NqK_-\bar{E}, \tag{2-30}$$

unde $\rho_0=Nq$ este densitatea volumetrică a electronilor liberi. Din această ultimă relație și din legea conducției electrice sub formă locală (relația 2-18), rezultă următcarea expresie pentru conductivitatea σ, respectiv rezistivitatea ρ a conductorului metalic :

$$\sigma=\frac{1}{\rho}=NqK_-=\frac{Nq^2l}{2m_e v_{dm}}. \tag{2-31}$$

Se precizează că la materialele semiconductoare, situate din punctul de vedere al proprietăților electrice între metale și dielectrici, valoarea K_- a factorului de mobilitate este mult mai mare decît la metale.

Pentru definirea rezistenței electrice a unui conductor filiform se consideră în fig. 2-7 conductorul de secțiune transversală S variabilă în lungul său și la capetele căruia se aplică diferența de potențial V_1-V_2. Rezistența electrică se definește prin relația :

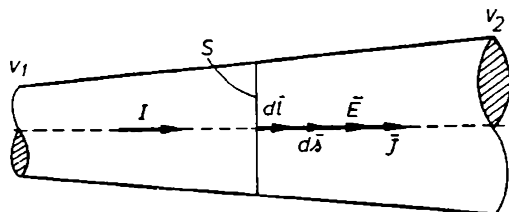


Fig. 2-7. Conductor omogen cu secțiune variabilă.

$$R=\int_l \frac{\bar{E}\,d\bar{l}}{\int_S \bar{J}\,d\bar{s}}, \tag{2-32}$$

care este analoagă cu relația (1-92) prin care s-a definit rezistența dielectrică.

Avînd în vedere că vectorii $\bar{J}$, $d\bar{s}$, $\bar{E}$ și $d\bar{l}$ sînt coliniari și că la conductorul filiform curentul I este uniform distribuit pe secțiunea S, adică $J=$const., rezultă :

$$R=\int_l \frac{\bar{E}\,d\bar{l}}{\int_S \bar{J}\,d\bar{s}}=\int_l \frac{E\,dl}{J\int_S ds}=\int_l \frac{E\,dl}{JS}, \tag{2-33}$$

de unde, ținînd seama de legea lui Ohm sub formă locală ($J=\sigma E$ sau $\rho J=E$), se obține :

$$R=\int_l \frac{dl}{\sigma S}=\int_l \rho \frac{dl}{S}. \qquad (2\text{-}34)$$

În situația cînd conductorul este omogen și de secțiune constantă în lungul său, rezultă :

$$R=\frac{l}{\sigma S} \quad \text{sau} \quad R=\rho \frac{l}{S}. \qquad (2\text{-}35)$$

Deci, rezistența electrică este direct proporțională cu lungimea și invers proporțională cu secțiunea conductorului, depinzînd de natura materialului prin intermediul rezistivității electrice ρ. Valorile lui ρ pentru diverse materiale folosite la construcția rezistoarelor sînt date în tabele (v. tabela 2-1).

Din relația (2-32) se mai poate obține :

$$R=\int_{P_1}^{P_2} \frac{\bar{E}\, d\bar{l}}{I}=\frac{1}{I}\int_{P_1}^{P_2} \bar{E}\, d\bar{l}=\frac{V_1-V_2}{I}, \qquad (2\text{-}36)$$

unde s-a ținut seama că I are aceeași valoare în lungul conductorului și că diferența de potențial electric între extremitățile P_1 și P_2 ale conductorului este $V_1-V_2=\int_{P_1}^{P_2} \bar{E}\, d\bar{l}$.

Unitatea de măsură pentru rezistența electrică în sistemul de unități MKSA se numește ohm (simbol Ω) :

$$1\,\Omega=\frac{1\,\text{V}}{1\,\text{A}}.$$

Pentru măsurarea rezistențelor mari (de izolație) se folosesc multiplii unității ohm.

Valoarea inversă a rezistenței electrice se numește *conductanță* :

$$G=\frac{1}{R} \qquad (2\text{-}37)$$

și se măsoară cu unitatea denumită siemens (simbol S) sau cu unitatea denumită mho (inversul lui ohm).

2.5.2. VARIAȚIA REZISTENȚEI ELECTRICE CU TEMPERATURA. SUPRACONDUCTIBILITATEA

Explicația la scară microscopică a variației rezistenței electrice cu temperatura se referă la modificarea în funcție de temperatură a numărului N de purtători liberi de sarcini electrice din unitatea de volum și a mobilității K_- a acestor purtători. Astfel, dacă se consideră un conductor metalic a cărui temperatură crește se întîmplă următoarele :

— datorită energiei primite de material, un număr mai mare de electroni devin liberi (crește N) ;

— datorită agitației termice mai pronunțate, scade mobilitatea K_- a electronilor liberi (se micșorează liberul parcurs l dintre două ciocniri consecutive).

Întrucît rezistivitatea ρ depinde de produsul dintre acești doi factori (relația 2-31), înseamnă că rezistența electrică a conductorului scade sau crește odată cu creșterea temperaturii, după cum rolul predominant îl are factorul N sau factorul K_- (respectiv l).

În general, la metale rezistența electrică crește cu temperatura, iar la metaloizi (cărbune) rezistența electrică scade cu temperatura.

Pentru a stabili relația de calcul a variației rezistenței electrice în funcție de temperatura τ, se ține seama că rezistivitatea electrică este funcție de temperatură, $\rho(\tau)$, și se dezvoltă în serie Mac-Laurean această dependență, în jurul punctului de temperatură $\tau=0$:

$$\rho(\tau)=\rho(0)+\frac{\rho'(0)}{1!}\tau+\frac{\rho''(0)}{2!}\tau^2+\ldots, \qquad (2\text{-}38)$$

unde $\rho'(0)$, $\rho''(0)$, ... sînt derivatele funcției $\rho(\tau)$ (mărimi constante, independente de temperatură). Se introduc relațiile:

$$\rho'(0)=\alpha\rho(0);\ \rho''(0)=\beta\rho(0),\ \ldots, \qquad (2\text{-}39)$$

cu care seria devine:

$$\rho(\tau)=\rho(0)+\alpha\rho(0)\tau+\frac{1}{2}\beta\rho(0)\tau^2+\ldots \qquad (2\text{-}40)$$

Experiența arată că această serie este rapid convergentă, motiv pentru care este suficient dacă se rețin numai primii doi termeni, adică:

$$\rho(\tau)=\rho(0)+\alpha\rho(0)\tau=\rho(0)(1+\alpha\tau), \qquad (2\text{-}41)$$

ceea ce înseamnă că rezistivitatea variază liniar cu temperatura, α fiind denumit *coeficient de temperatură*.

Avînd în vedere că rezistența R este direct proporțională cu rezistivitatea ρ, rezultă:

$$R(\tau)=R(0)(1+\alpha\tau). \qquad (2\text{-}42)$$

Întrucît în tabele se dau valorile rezistivității pentru temperatura 20 °C (temperatura mediului ambiant), este necesar ca rezistența electrică la temperatura τ să se exprime în funcție de rezistența electrică la temperatura 20 °C. Pentru aceasta, din relația (2-42) se deduce:

$$R(20°)=R(0)(1+\alpha\,20°),$$

respectiv:

$$\frac{R(\tau)}{R(20°)}=\frac{1+\alpha\tau}{1+\alpha 20°}=1+\alpha_{20°}(\tau-20°),$$

unde $\alpha_{20°}$ este valoarea coeficientului de temperatură la temperatura de 20 °C:

$$\alpha_{20°}=\frac{\alpha}{1+\alpha 20°}. \qquad (2\text{-}43)$$

Deci

$$R(\tau)=R(20°)[1+\alpha_{20°}(\tau-20°)] \tag{2-44}$$

sau, în general:

$$R(\tau)=R(\tau_1)[1+\alpha_{\tau 1}(\tau-\tau_1)]. \tag{2-45}$$

În tabela 2-1 sînt prezentate valorile rezistivității și a coeficientului de temperatură, corespunzătoare temperaturii de 20 °C, pentru cîteva materiale mai uzuale.

Coeficientul de temperatură este pozitiv la metale (rezistența electrică crește cu temperatura). La constantan, coeficientul de temperatură are o valoare foarte mică, ceea ce înseamnă că, practic, rezistența electrică a acestui material nu se modifică cu temperatura.

Variația rezistenței electrice cu temperatura are, în general, efecte nedorite, mai ales la instrumentele electrice de măsurare. De exemplu, șunturile și rezistențele adiționale, precum și rezistențele etalon trebuie să aibă rezistență electrică independentă de temperatură.

Aplicația 2-2. Un bec cu filament de wolfram are puterea $P=100$ W și tensiunea $U=220$ V, diametrul filamentului fiind $d=0{,}05$ mm. Știind că filamentul funcționează la temperatura $\tau=1\,600$ °C și că pentru wolfram $\rho_{20°}=5{,}5\cdot10^{-8}$ Ωm, $\alpha_{20°}=0{,}005^{1}/°C$, se cere să se determine:

a. Rezistența electrică a filamentului cînd becul este stins (20 °C) și cînd becul este aprins.

b. Curentul prin bec la punerea în funcțiune și în stare de funcționare.

c. Lungimea filamentului.

Rezolvare. a. Rezistența electrică a filamentului în stare de funcționare a becului este:

$$R_\tau=\frac{U^2}{P}=\frac{220^2}{100}=484\ \Omega.$$

Rezistența becului la temperatura de 20 °C se deduce din:

$$R_\tau=R_{20°}[1+\alpha_{20°}(\tau-20)],$$

adică:

$$R_{20°}=\frac{R_\tau}{1+\alpha_{20°}(\tau-20)}=\frac{484}{1+5\cdot10^{-3}\cdot1\,580}=54{,}5\ \Omega.$$

b. Curentul prin bec la aprinderea lui este:

$$I_{20°}=\frac{U}{R_{20°}}=4{,}04\ \text{A},$$

iar în timpul funcționării acest curent are valoarea:

$$I_\tau=\frac{U}{R_\tau}=0{,}455\ A.$$

c. Lungimea filamentului se calculează din relația:

$$R_{20°}=\rho_{20°}\frac{l}{S},$$

adică

$$l=\frac{\pi R_{20°}d^2}{4\rho_{20°}}=1{,}85\ \text{m}.$$

Tabela 2-2

Temperatura critică de trecere în stare supraconductoare a unor metale şi aliaje

Metalul (aliajul)	Temperatura critică, T_c [°K]
Zinc	0,79
Cadmiu	3,37
Mercur	4,15
Aluminiu	1,14
Plumb	7,22
Ag+Pb	7,2
Au+Pb	7

Tabela 2-3

(Din ETZ 5/1973)

Linia	Tensiunea [kV]	Intensitatea curentului [A]	Pierderile
Cablu supraconductor. Zn+Nb (Răcire cu heliu)	110	5 250	0,1...2
	220	10 500	
Cablu din cupru (Răcire specială)	400	3 500	336

Supraconductibilitatea este proprietatea unor metale şi aliaje de a le scade brusc la zero rezistivitatea, atunci cînd sînt răcite pînă la o temperatură suficient de joasă, apropiată de zero absolut. Fenomenul a fost observat pentru prima dată în 1911 de către Kamerlingh Onnes.

Temperatura la care se obţine starea de supraconductibilitate este denumită *temperatură critică*, T_c (sau de tranziţie), dependentă de natura metalului sau aliajului, aşa cum se observă din tabela 2-2. În fig. 2-8, *a* este arătată variaţia bruscă a rezistivităţii staniului la atingerea temperaturii critice. Pentru acelaşi metal (aliaj), valoarea temperaturii critice este influenţată de cîmpul magnetic.

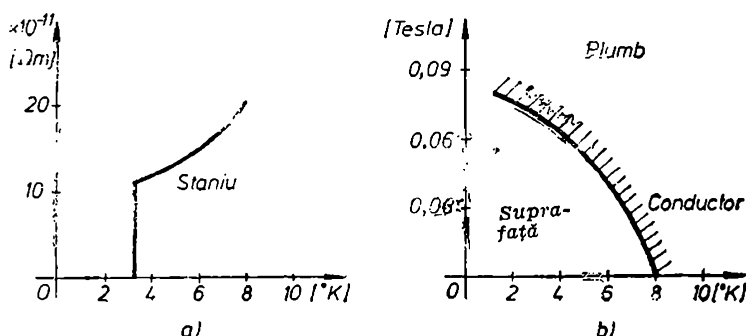


Fig. 2-8. Supraconductoare :

a — temperatura critică la staniu; *b* — dependenţa stării supraconductoare de cîmpul magnetic la plumb.

În fig. 2-8, *b* este arătată influenţa cîmpului magnetic asupra temperaturii critice în cazul plumbului.

Curentul electric stabilit într-un inel supraconductor se menţine timp îndelungat fără a fi necesar un consum de energie din exterior. Aceasta datorită faptului că, rezistivitatea fiind nulă, în inel nu există pierderi.

Este important de relevat faptul că, starea supraconductoare nu se caracterizează numai prin rezistivitate nulă, ci au loc şi importante modificări ale proprietăţilor magnetice ale mediului adus în această stare. Astfel, s-a constatat experimental că mediul supraconductor se comportă ca un corp diamagne-

tic ideal în sensul că, oricît de intens ar fi cîmpul magnetic exterior, inducția magnetică în interiorul mediului este nulă (efectul Meissner-Ochsenfeld).

În tehnica modernă, supraconductoarele au aplicații deosebit de importante. Astfel, în transportul energiei electrice la distanță se fac încercări de folosire a cablurilor supraconductoare care pot transmite puteri considerabil mai mari, cu pierderi prin efect Joule-Lenz foarte mici, în comparație cu cablurile normale. În tabela 2-3 sînt prezentate caracteristicile unor astfel de cabluri. De asemenea, în ultimul timp se fac cercetări intense privind folosirea supraconductoarelor în construcția mașinilor electrice (criomașini), care permit realizarea unor densități de curent foarte mari și a unor cîmpuri magnetice foarte intense, la gabarite reduse ale mașinii.

2.5.3. REZISTOARE

Rezistorul este un aparat realizat pentru a avea o anumită rezistență electrică. Se folosește denumirea de rezistor și nu de rezistență, pentru a nu se confunda aparatul însuși cu proprietatea fizică a materialului denumită rezistență electrică.

Rezistoarele variabile folosite la măsurări, la pornirea și reglarea mașinilor electrice etc., se numesc *reostate*. Unele reostate de laborator sînt construite dintr-un cilindru ceramic, din marmură sau din ardezie, pe care se bobinează sîrmă neizolată din constantan sau din nichelină, astfel ca spirele să nu se atingă între ele. Capetele corpului ceramic se fixează în două suporturi, iar deasupra se fixează o bară metalică de-a lungul căreia se poate deplasa un cursor a cărui perie de contact alunecă pe spirele sîrmei bobinate. Deplasînd cursorul, se modifică rezistența electrică.

Unele reostate, folosite pentru curenți mai mari, sînt prevăzute cu ploturi peste care alunecă o perie fixată de o pîrghie (fig. 2-9), variația rezistenței electrice făcîndu-se în trepte.

În afară de reostatele metalice din sîrmă, din bandă sau din elemente de fontă turnate, se mai folosesc *reostatele cu lichid*, mai ales ca reostate de încărcare și de pornire la motoarele asincrone. Un asemenea reostat constă dintr-un electrod fix în formă de vas (fig. 2-10) în care se pune, de obicei, apă amestecată cu

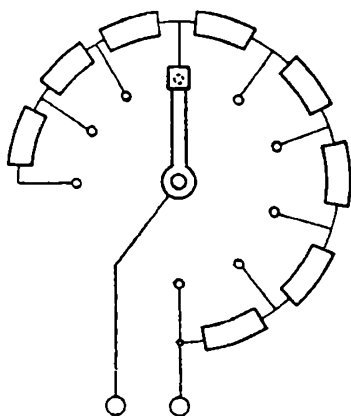


Fig. 2-9. Reostat cu ploturi.

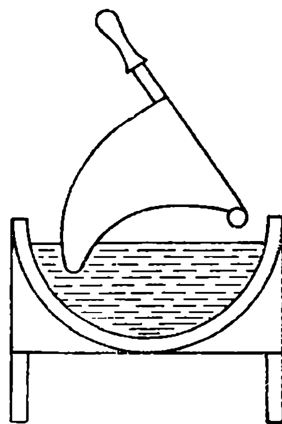


Fig. 2-10. Reostat cu apă.

puțină sodă. Electrodul mobil este realizat din tablă de oțel, izolat față de electrodul fix. Rezistența electrică dintre cei doi electrozi este cu atît mai mică, cu cît electrodul mobil este scufundat mai mult în lichid. Se obține, în modul acesta, o variație continuă a rezistenței. Rezistența electrică a rezistoarelor cu apă se modifică foarte mult în funcție de temperatură, precum și în funcție de conținutul în săruri din apă.

Rezistoarele chimice constau dintr-un material (grafit) depus prin electroliză pe un tub ceramic, acoperit în exterior cu un strat protector din lac sau email.

Cu ajutorul reostatelor se pot realiza *montaje potențiometrice* cu care se obține o tensiune variabilă. În fig. 2-11, *a* este reprezentat montajul potențiometric la care tensiunea culeasă între punctele *a* și *b* variază de la zero la U, atunci cînd

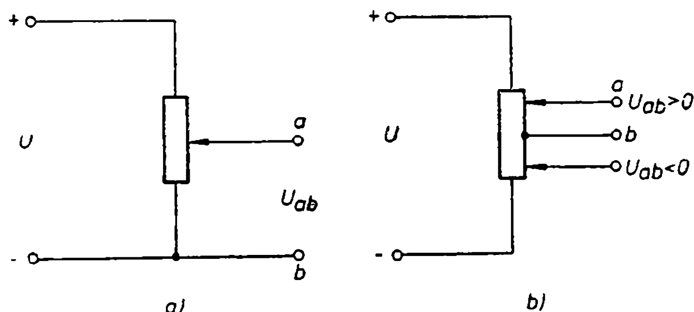


Fig. 2-11. Schema potențiometrului:
a — cu modificarea tensiunii între 0 și U; *b* — cu modificarea tensiunii între $-U/2$ și $+U/2$.

cursorul se plimbă în lungul rezistorului. În fig. 2-12, *b* este reprezentat montajul potențiometric prevăzut cu priză mediană la care tensiunea U_{ab} poate fi modificată de la $-\frac{U}{2}$ la $+\frac{U}{2}$.

La folosirea rezistoarelor în diverse montaje, este necesar să se cunoască atît valoarea, în ohmi, a rezistenței sale cît și curentul nominal. Pentru rezistoarele chimice folosite în radiotehnică se precizează rezistența în kΩ sau MΩ și puterea disipată în W. Nu este permis să se folosească rezistoarele la curenți sau puteri mai mari decît valorile nominale deoarece se distrug prin supraîncălzire.

Aplicația 2-3. În interiorul unui conductor din germaniu pur se stabilește un cîmp electric cu intensitatea $E=0,1$ V/m. Să se determine viteza de mișcare a purtătorilor mobili de sarcini electrice în acest conductor.

Rezolvare. Viteza de mișcare a purtătorilor de sarcini electrice în conductoare, determinată de cîmpul electric, se exprimă prin relația (2-28):

$$\bar{v}=K_{-}\bar{E},$$

unde K_{-} este valoarea factorului de mobilitate.

Conform relației (2-31), factorul de mobilitate are valoarea:

$$|K_{-}|=\frac{1}{\rho N|q|}.$$

Pentru germaniu pur, $\rho=0,6$ Ωm, $N=6,2\cdot10^{19}$, $q=1,602\cdot10^{-19}$ C, cu care rezultă:

$$K_{-}=\frac{1}{0,6\cdot6,2\cdot10^{19}\cdot1,602\cdot10^{-19}}=1\,700\cdot10^{-4}\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot\frac{\text{m}}{\text{V}}.$$

Deci

$$v=1\,700 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}1=17 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}.$$

Aplicația 2-4. Un conductor filiform de lungime l are secțiunea circulară cu o variație liniară a razei de la valoarea r_1 la valoarea r_2 și este străbătut de curentul I. Să se stabilească relația ce exprimă variația densității de curent în lungul conductorului.

Rezolvare. Conductorul fiind filiform, densitatea de curent este constantă în punctele secțiunii sale transversale S, deci $J=\frac{I}{S}$. Cu notațiile din fig. 2-12, se obține :

$$S=\pi r^2, \quad \frac{r-r_1}{r_2-r_1}=\frac{x}{l},$$

adică :

$$r=\frac{r_2-r_1}{l}\,x+r_1, \quad S=\frac{\pi}{l^2}\,[(r_2-r_1)\,x+lr_1]^2.$$

Deci

$$J=\frac{I}{S}=\frac{Il^2}{\pi\,[(r_2-r_1)\,x+lr_1]^2}.$$

Pentru $x=0$ și $x=l$ rezultă :

$$J_1=\frac{I}{\pi r_1^2}, \quad J_2=\frac{I}{\pi r_2^2}.$$

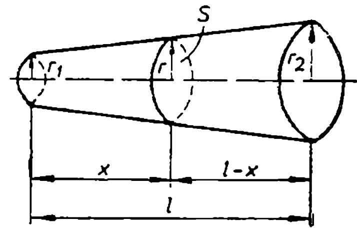


Fig. 2-12. Conductor cu secțiune variabilă.

2.5.4. TERMISTOARE

Termistorul este un rezistor realizat din material semiconductor, a cărui rezistență variază mult cu temperatura, și anume după o lege exponențială :

$$R_T=R_{T_0}e^{a\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_0}\right)} \qquad (2\text{-}46)$$

în care T și T_0 sînt temperaturi absolute (°K) și a este o constantă a materialului cu dimensiunea unei temperaturi și cu valoarea pozitivă cuprinsă între 1 000 și 8 000 °K. Rezistența unui termistor scade, deci, cu creșterea temperaturii (coeficientul de temperatură este negativ).

Încălzirea termistorului poate fi *directă*, prin efectul termic al curentului ce îl străbate, sau *indirectă*, de la o sursă de energie calorică exterioară. Aceste modalități de încălzire depind de serviciul pe care trebuie să-l îndeplinească termistorul în cadrul dispozitivului din care face parte.

O caracteristică importantă a unui termistor cu încălzire directă este curba sa tensiune-curent (caracteristica volt-amper), ilustrată în fig. 2-13. După cum se observă, la curenți mici, care nu duc la o încălzire apreciabilă, termistorul respectă legea lui Ohm (rezistor liniar). În schimb, la curenți mai mari, cînd și temperatura termistorului crește, rezistența sa începe

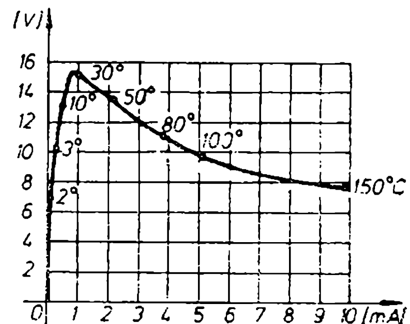


Fig. 2-13. Curba tensiune-curent la un termistor.

să scadă. Pe curbă sînt indicate și temperaturile corespunzătoare ale termistorului, în °C.

Termistoarele cu încălzire directă au aplicații variate în electronică și în automatică. Se folosesc ca traductoare de temperatură, la stabilizarea termică a circuitelor cu tranzistoare, în construcția releelor de temperatură, de curent etc. Termistoarele cu încălzire indirectă se utilizează ca reostate comandate (cu rezistența dependentă de temperatura mediului în care sînt plasate, asigurată de o sursă de energie calorică exterioară).

2.6. EFECTUL TERMIC AL CURENTULUI ELECTRIC

Efectul termic al curentului electric, cunoscut și sub denumirea de *efect Joule-Lenz*, constă în dezvoltarea ireversibilă de căldură în conductoarele parcurse de curent electric de conducție. Prin acest efect, energia electromagnetică se transformă în energie calorică prin intermediul lucrului mecanic determinat de forțele ce acționează asupra purtătorilor mobili de sarcini electrice. Conform principiului de conservare a energiei se obține:

$$\mathrm{d}W+\mathrm{d}Q=0, \qquad (2\text{-}47)$$

unde W este energia electromagnetică ce scade în timp ($\mathrm{d}W<0$) iar Q este energia calorică ce crește în timp ($\mathrm{d}Q>0$).

2.6.1. LEGEA TRANSFORMĂRII ENERGIEI ELECTROMAGNETICE ÎN PROCESUL DE CONDUCȚIE (LEGEA JOULE-LENZ)

Forma integrală a legii Joule-Lenz precizează următoarele: căldura $\mathrm{d}Q_J$ dezvoltată prin efect J-L, într-un timp $\mathrm{d}t$, de curentul de conducție i ce străbate un conductor cu rezistența electrică R, este proporțională cu pătratul curentului și cu timpul, factorul de proporționalitate fiind rezistența electrică:

$$\mathrm{d}Q_J=Ri^2\,\mathrm{d}t. \qquad (2\text{-}48)$$

Căldura dezvoltată într-un timp t este:

$$Q_J=\int_0^t Ri^2\,\mathrm{d}t. \qquad (2\text{-}49,\ a)$$

Dacă rezistența R și curentul i sînt constante în timp ($i=I$), rezultă:

$$Q_J=RI^2t. \qquad (2\text{-}49,\ b)$$

Puterea corespunzătoare efectului J-L al curentului electric este:

$$p_J=\frac{\mathrm{d}Q_J}{\mathrm{d}t}=Ri^2 \qquad (2\text{-}50)$$

sau, ținînd seama de legea lui Ohm sub formă integrală $\left(i=\frac{u}{R}\right)$, se obține :

$$p_J=\frac{u^2}{R}, \tag{2-51}$$

unde u este tensiunea la bornele rezistorului cu rezistența R.

Aplicația 2-5. Se consideră o sursă de c.c. cu t.e.m. U_e și rezistența interioară R_i ce alimentează un receptor cu rezistența electrică R (fig. 2-14). Se cere să se stabilească bilanțul puterilor din circuit.

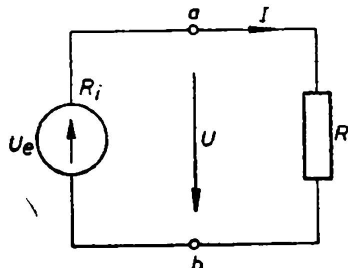


Fig. 2-14. Circuit electric.

Rezolvare. Legătura dintre t.e.m. U_e și tensiunea la borne U este :

$$U_e=U+R_iI,$$

unde R_iI este căderea de tensiune pe rezistența interioară a sursei. Rezultă :

$$U_eI=UI+R_iI^2$$

sau

$$P_i=P+\Delta P,$$

unde $P_i=U_eI$ este puterea electrică interioară a sursei, $P=UI=RI^2$ este puterea electrică a receptorului iar $\Delta P=R_iI^2$ reprezintă puterea pierdută prin efect J-L în interiorul sursei.

Randamentul de funcționare al sursei este :

$$\eta=\frac{P}{P_i}=\frac{P_i-\Delta P}{P_i}=1-\frac{\Delta P}{P_i}.$$

Legea Joule-Lenz sub formă locală se referă la puterea dezvoltată prin efect J-L în unitatea de volum a conductorului străbătut de curentul cu densitatea J :

$$p_{J_0}=\rho J^2\ [\mathrm{W/m^3}], \tag{2-52}$$

unde ρ este rezistivitatea.

Ținînd seama de legea lui Ohm sub formă locală $\rho\bar{J}=\bar{E}$, legea lui J-L sub formă locală devine :

$$p_{J_0}=\bar{J}\bar{E}. \tag{2-53}$$

Cu această ultimă relație, puterea corespunzătoare efectului J-L din întregul volum al conductorului străbătut de curentul de conducție este :

$$p_J=\int_O p_{J_0}\mathrm{d}o=\int_O \bar{J}\bar{E}\mathrm{d}o. \tag{2-54}$$

Se poate dovedi ușor că relația (2-54) este aceeași cu relația (2-50). În adevăr, avînd în vedere că $\bar{E}=\rho\bar{J}$ și că $\mathrm{d}o=S\ \mathrm{d}l$, din relația (2-54) se obține :

$$p_J=\int \rho J^2 S\ \mathrm{d}l=\int (JS)^2\rho\frac{\mathrm{d}l}{S}=i^2R,$$

unde $JS=i$ este curentul de conducție, constant în lungul conductorului, iar $R=\int\rho\frac{\mathrm{d}l}{S}$ este rezistența electrică a conductorului.

2.6.2. DIMENSIONAREA CONDUCTOARELOR PE BAZĂ DE ÎNCĂLZIRE

Conductoarele parcurse de curent se încălzesc datorită efectului J-L. **Prin încălzire se înțelege** diferența dintre temperatura conductorului și temperatura **mediului ambiant :**

$$\vartheta = \tau - \tau_{med}. \qquad (2\text{-}55)$$

Pentru ca izolația conductorului, respectiv conductorul însăși, să nu se deterioreze, **se impune ca încălzirea** maximă să nu depășească limita admisibilă stabilită prin norme :

$$\vartheta_{max} \leqslant \vartheta_a. \qquad (2\text{-}56)$$

Aceasta înseamnă o valoare limitată pentru densitatea de curent, respectiv pentru curent la secțiune dată a conductorului.

Dimensionarea unui conductor pe bază de încălzire se referă la stabilirea valorii densității de curent admisibile, respectiv a curentului admis printr-un conductor de secțiune cunoscută și dintr-un anumit material, astfel ca încălzirea conductorului să nu depășească limita impusă.

Se consideră un conductor omogen, cu secțiune circulară constantă în lungul său, prin care, la momentul $t=0$, se stabilește curentul constant I, încălzirea inițială a conductorului fiind $\vartheta_0 = \tau_0 - \tau_{med}$. Căldura dezvoltată în timpul dt este :

$$dQ_J = RI^2 \, dt.$$

O parte din această energie se înmagazinează în masa conductorului și contribuie la creșterea temperaturii acestuia, iar o altă parte este degajată în mediul înconjurător. Rezultă următoarea ecuație a bilanțului energiilor :

$$RI^2 \, dt = mc \, d\vartheta + \alpha_r S_r \vartheta \, dt, \qquad (2\text{-}57)$$

unde m este masa conductorului, în kg ;
- c — căldura specifică, în J/kg °C ;
- S_r — suprafața de răcire, în m^2 ;
- α_r — coeficientul de transmitere a căldurii către mediul exterior, în J/m^2 °Cs.

Din relația (2-57) se obține următoarea ecuație diferențială a încălzirii :

$$mc \frac{d\vartheta}{dt} + \alpha_r S_r \vartheta = RI^2$$

sau

$$\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{1}{T}\vartheta = \frac{RI^2}{mc}, \qquad (2\text{-}58)$$

unde

$$T = \frac{mc}{\alpha_r S_r} \qquad (2\text{-}59)$$

este constanta de timp a încălzirii, măsurată în secunde.

Încălzirea conductorului ajunge la valoarea maximă în momentul cînd întreaga energie calorică dezvoltată se degajă în mediul exterior. În această situaţie $\vartheta=\vartheta_{max}=\text{const.}$, iar $d\vartheta=0$, cu care, din ecuaţia (2-58) şi ţinînd seama de notaţia (2-59), se obţine :

$$\vartheta_{max}=\frac{RI^2}{\alpha_r S_r}. \tag{2-60}$$

Soluţia ecuaţiei diferenţiale (2-58) este de forma :

$$\vartheta=Ae^{-\frac{t}{T}}+\vartheta_{max}, \tag{2-61}$$

unde A este constanta de integrare ce se determină din condiţia iniţială şi anume : pentru $t=0$ avem $\vartheta=\vartheta_0$. Prin înlocuirea acestor valori în relaţia (2-61), rezultă :

$$\vartheta_0=A+\vartheta_{max}$$

adică

$$A=\vartheta_0-\vartheta_{max}, \tag{2-62}$$

cu care soluţia ecuaţiei diferenţiale devine :

$$\vartheta=\vartheta_{max}\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)+\vartheta_0 e^{-\frac{t}{T}}. \tag{2-63}$$

În fig. 2-15, *a* este reprezentată variaţia în timp a încălzirii conductorului, conform funcţiei exponenţiale (2-63), ce tinde asimptotic spre ϑ_{max}. Dacă încălzirea iniţială a conductorului este zero ($\vartheta_0=0$), se obţine curba de încălzire din fig. 2-15, *b*.

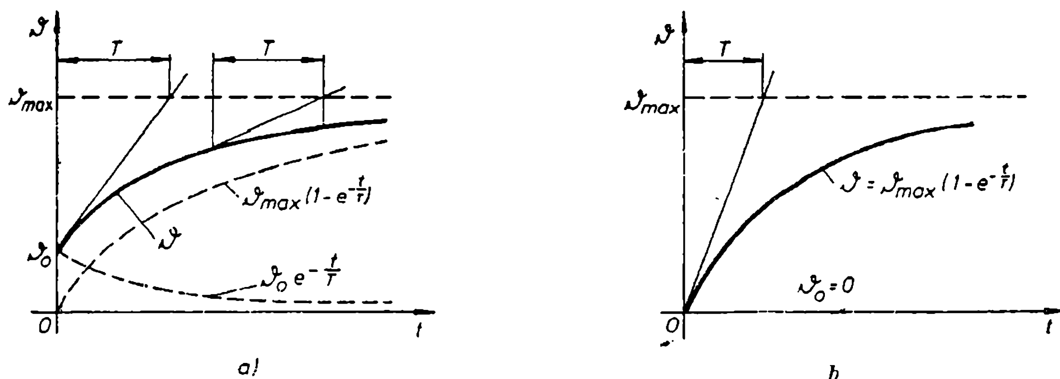


Fig. 2-15. Curbe exponenţiale de încălzire a conductorului omogen parcurs de curent :

a — încălzirea iniţială diferită de zero (ϑ_0); *b* — încălzirea iniţială egală cu zero.

Presupunînd că încălzirea maximă este egală cu încălzirea admisibilă ($\vartheta_{max}=\vartheta_a$), din relaţia (2-60) se obţine :

$$\frac{RI^2}{\alpha_r S_r}=\vartheta_a,$$

de unde rezultă ·

$$I^2 = J^2 S^2 = \frac{\alpha_r S_r \vartheta_a}{R}$$

sau

$$J^2 = \frac{\alpha_r S_r \vartheta_a}{S^2 \rho \frac{l}{S}} = \frac{\alpha_r S_r \vartheta a}{\rho S l}.$$

Considerînd că suprafața de răcire este întreaga suprafață laterală a conductorului de secțiune circulară : $S_r = \pi\, dl$, rezultă :

$$J^2 = \frac{\alpha_r \pi d l \vartheta_a}{\rho \pi \frac{d^2}{4} l} = \frac{4\alpha_r \vartheta_a}{\rho d}$$

adică

$$J = 2\sqrt{\frac{\alpha_r \vartheta_a}{\rho d}} = 2\sqrt{\frac{\alpha_r(\tau_a - \tau_0)}{\rho d}}, \qquad (2\text{-}64)$$

unde s-a considerat $\vartheta_a = \tau_a - \tau_0$.

Din relația (2-64) se remarcă faptul că densitatea admisibilă de curent depinde de valoarea încălzirii admisibile ϑ_a, de natura conductorului (prin ρ), de diametrul d, precum și de condițiile de răcire (prin α_r). Cu cît diametrul conductorului este mai mare, cu atît densitatea de curent admisă este mai mică. Pentru aceleași valori ale lui α_r și ρ, două conductoare obțin aceeași încălzire maximă dacă este îndeplinită relația :

$$\frac{J_1}{J_2} = \sqrt{\frac{d_2}{d_1}}. \qquad (2\text{-}65)$$

În tabela 2-4 sînt redate valorile densității admisibile de curent pentru cîteva secțiuni normalizate ale conductoarelor din cupru izolate și neizolate. Cunoscînd densitatea de curent admisă și secțiunea, se obține simplu curentul nominal prin conductor ($I = JS$).

Densitatea de curent admisibilă pentru conductoare din cupru

Tabela 2-4

S [mm²]	Conductor cupru izolat J [A/mm²]	Conductor cupru neizolat	
		Încăperi închise J [A/mm²]	În aer J [A/mm²]
4	9	14,2	14,5
6	7,7	12,2	12,6
10	6,8	10,3	10,8
16	5,7	8,1	9,4
25	4,9	6,6	8,2
35	4,3	6,0	7,7
50	3,8	5,3	6,7
70	3,5	4,8	6,1
95	3,1	4,3	5,4

Aplicația 2-6. Un conductor din cupru, neizolat, are secțiunea $S=10$ mm^2 și este parcurs de un curent de 100 A. Știind că $\alpha_r=0,36$ J/°C m^{2}s, să se calculeze temperatura conductorului, temperatura mediului ambiant fiind $\tau_0=20$ °C.

Rezolvare. Temperatura maximă a conductorului se determină cu relația (2-60), de unde se deduce :

$$\tau_{max}=\frac{RI^2}{\alpha_r S_r}+\tau_0.$$

Considerînd lungimea conductorului $l=1$ m, se obțin :

$$R=\rho\frac{l}{S}=1,725\cdot10^{-3}\ \Omega,$$

$$d=\sqrt{\frac{4S}{\pi}}=3,6\cdot10^{-3}\ \text{m},$$

$$S_r=\pi dl=1,2\cdot10^{-2}\ \text{m}^2,$$

$$\tau_{max}=\frac{1,725\cdot10^{-3}\cdot100^2}{0,36\cdot1,2\cdot10^{-2}}+20=60\ °\text{C}.$$

2.6.3. APLICAȚIILE EFECTULUI TERMIC AL CURENTULUI ELECTRIC

Siguranțe fuzibile. Fuzibilele sînt corpuri metalice filiforme sau lamelare care se topesc prin efectul termic al curentului electric de conducție, fiind elemente componente ale siguranțelor electrice. Materialul pentru confecționarea fuzibilelor trebuie să aibă următoarele calități principale : temperatură de topire joasă, rezistivitate electrică mică, inerție termică mică, să fie inoxidabil și cu preț de cost redus. Nici un material nu satisface simultan toate aceste condiții. În practică, pentru confecționarea fuzibilelor se utilizează mai mult : argintul pur, cuprul, cuprul argintat, zincul și aliajele de staniu cu cadmiu.

Siguranțele electrice sînt aparate de protecție contra supracurenților, în special contra curenților de scurtcircuit. Siguranța electrică întrerupe instantaneu circuitul electric în care este instalată cînd curentul în acel circuit depășește o anumită limită. În felul acesta, conductoarele și receptoarele sînt protejate contra solicitărilor termice și mecanice la care ar fi supuse sub acțiunea supracurentului.

Siguranțele fuzibile se clasifică după : tensiunea nominală, curentul nominal, capacitatea de rupere, caracteristica de topire și tipul constructiv Se deosebesc : *curentul nominal al siguranței* — pentru care sînt dimensionate piesele conductoare de curent și piesele de contact — și *curentul nominal al fuzibilului*. *Capacitatea de rupere* reprezintă cel mai mare curent pe care siguranța îl poate întrerupe. Caracteristica de topire este curba care exprimă dependența duratei pînă la topirea fuzibilului de intensitatea curentului care îl străbate (fig. 2-16).

După forma caracteristicii de topire se deosebesc : siguranțe rapide și siguranțe cu întîrziere (inerte). La siguranțele rapide, timpul de topire este foarte scurt la un anumit supracurent. La siguranțele cu întîrziere, prin măsuri constructive speciale se obține un timp de topire relativ lung la supracurenții mici

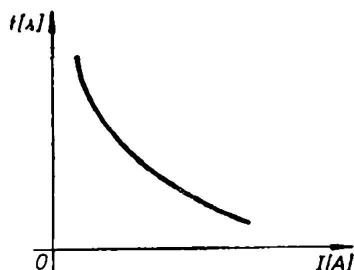


Fig. 2-16. Caracteristica siguranței fuzibile.

(curenții de pornire ai motoarelor electrice), respectiv un timp de topire scurt la supracurenții mari (scurtcircuite).

După tensiunea pentru care sînt construite, se deosebesc: siguranțe fuzibile de joasă tensiune (pînă la 1 kV) și siguranțe fuzibile de înaltă tensiune.

Cuptoare electrice. După sistemul de producere a căldurii, cuptoarele electrice se clasifică în cuptoare cu rezistoare, cuptoare cu arc electric și cuptoare de inducție.

Cuptorul electric cu rezistoare are ca sursă de căldură efectul Joule-Lenz din unul sau mai multe rezistoare parcurse de curent. Rezistoarele pot fi piese independente sau pot fi constituite din însuși materialul de tratat.

La cuptorul cu rezistoare independente se utilizează pentru încălzire căldura produsă de rezistoare speciale, șarja nefăcînd parte din circuitul electric de încălzire. Rezistoarele se confecționează din aliaje de crom-nichel (pentru temperaturi de 1 100°—1 200 °C), aliaje fier-nichel-crom (pînă la 995 °C), aliaje cupru-nichel (sub 540 °C).

La *cuptorul cu arc electric cu încălzire directă*, căldura este dezvoltată de curentul electric care străbate șarja conductoare situată între electrozi.

Lampa electrică cu incandescență. Corpul incandescent care emite radiații luminoase este filamentul, care se încălzește la trecerea prin el a curentului electric, la o temperatură în jur de 2 000 °C. Această temperatură este necesară pentru a se realiza o lumină cît mai apropiată de cea albă. Ca material pentru filament e folosit actualmente mai ales wolframul, avînd o temperatură de topire foarte înaltă, evaporare lentă și rezistență mecanică mare.

O altă aplicație a efectului termic al curentului electric o constituie *sudarea electrică* (sudare cu arc electric și sudare prin rezistență de contact).

2.7. CURENTUL ELECTRIC ÎN SEMICONDUCTOARE

Materialele a căror rezistivitate are ordinul de mărime $10^{-1}...10^{-4}\,\Omega$ cm constituie grupa *semiconductoarelor*. Din această grupă fac parte: germaniul, seleniul, siliciul, precum și o serie de compuși chimici.

Conductibilitatea electrică a semiconductoarelor se explică pe baza teoriei cuantice în care electronii nu mai sînt priviți ca simple corpuscule ce gravitează în jurul nucleului, ci sînt luate în considerare proprietățile lor ondulatorii, respectiv stările lor energetice cuantificate. Conform acestei teorii, electronii se găsesc în stare de echilibru numai pentru anumite niveluri energetice „permise". *Principiul lui Pauli* precizează că la același nivel energetic nu poate exista decît un singur electron.

Un nivel energetic se caracterizează prin valoarea energiei electronului situat la acest nivel, exprimată în electronvolți [eV]. Cu cît un nivel energetic este mai îndepărtat de nucleu, cu atît electronul de pe acel nivel posedă o energie mai mare.

Nivelurile energetice apropiate între ele formează o zonă „permisă", care este separată de următoarea zonă permisă printr-o zonă „interzisă". Totalitatea nivelelor și zonelor energetice constituie *spectrul energetic* al atomului. În fig. 2-17, *a* este reprezentat spectrul energetic al atomului de hidrogen, liniile orizontale *1* reprezentînd nivelurile energetice de excitație, iar linia orizontală *2* reprezentînd nivelul energetic neexcitat. În fig. 2-17, *b* sînt reprezentate zonele de niveluri energetice permise, separate între ele prin zone interzise.

Pentru ca un electron să treacă de pe un nivel energetic inferior pe un nivel energetic superior trebuie să primească o anumită cantitate de energie din

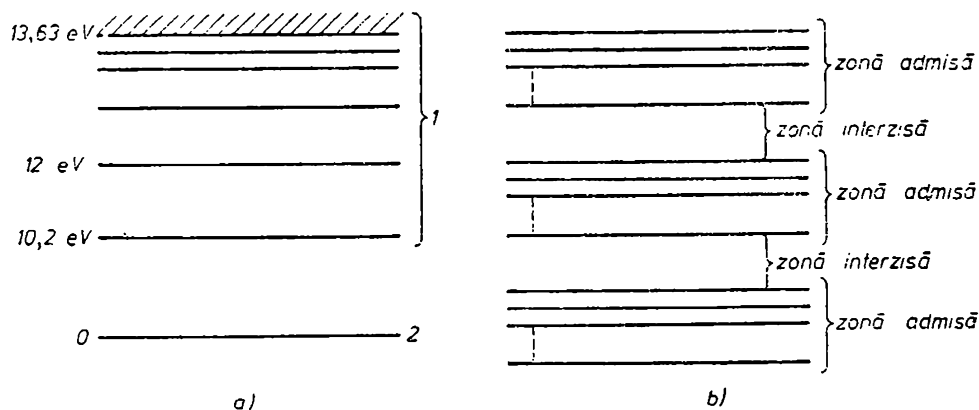


Fig. 2-17. Spectrul energetic al atomului :
a — linii energetice la atomul de hidrogen; *b* — zone admise și interzise.

exterior. La trecerea electronului de pe un nivel exterior pe unul inferior se eliberează energie sub formă de radiație. Aceste treceri de pe un nivel pe altul au loc prin salturi.

Deasupra zonei de valență se găsește zona de conducție în care se situează electronii liberi (gazul electronic). La metale, zona de conducție se întrepătrunde cu zona de valență, astfel că o cantitate mică de energie primită din exterior (energia calorică, energia cîmpului electric etc.) este suficientă pentru trecerea electronilor din zona de valență în zona de conducție. În schimb, la izolatoare (dielectrici), între zona de valență și zona de conducție există o zonă interzisă care nu poate fi depășită de electroni decît pentru energii foarte mari primite din exterior.

Semiconductoarele pure se caracterizează printr-o zonă interzisă îngustă (1 eV), situată între zona de valență și zona de conducție, care poate fi depășită mai ușor de către electronii din zona de valență. Puritatea materialului influențează în mare măsură lățimea zonei interzise.

Electronul care, datorită agitației termice sau datorită energiei primite din exterior de către semiconductor, trece prin zona interzisă în zona de conducție, lasă în zona de valență un „gol" care este echivalent cu o sarcină electrică elementară pozitivă. Golul creat poate fi ocupat de un alt electron din rețeaua cristalină, ceea ce înseamnă crearea unui gol în altă parte. O mișcare ordonată a electronilor din semiconductor înseamnă o mișcare ordonată a golurilor în sens opus. Deci, la semiconductoare, spre deosebire de metale, curentul electric este determinat nu numai de mișcarea ordonată a electronilor liberi din zona de conducție, ci și de mișcarea ordonată a golurilor din zona de valență. Trebuie reținut însă că mișcarea golurilor are loc prin salturi, din loc în loc.

În concluzie, semiconductoarele pure dispun de o conductibilitate mixtă, electronică şi prin goluri, densitatea de curent fiind :

$$\bar{J}=(NqK_{-}+N_g|q|K_{+})\,\bar{E}=\sigma\bar{E}, \qquad (2\text{-}66)$$

unde N şi N_g sînt numărul de electroni liberi, respectiv de goluri, din unitatea de volum ;
q — sarcina electronului, respectiv $|q|$ sarcina golului ;
K_{-} — factorul de mobilitate al electronilor liberi ;
K_{+} — factorul de mobilitate al golurilor ;
$\bar{E}$ — intensitatea cîmpului electric ;
σ — conductivitatea semiconductorului.

În cazul semiconductoarelor impure, caracterul conductibilităţii electrice se schimbă fundamental, chiar dacă gradul de impuritate este foarte mic, de circa $1/10^8$. Prin introducerea impurităţii se formează noi nivele energetice, situate în zona interzisă a materialului de bază, corespunzătoare electronilor de valenţă ai atomului de impuritate. Ne referim, de exemplu, la cazul cînd materialul de bază este germaniul (tetravalent) căruia i se adaugă o impuritate de stibiu (pentavalent). Înlocuind în reţeaua cristalină un atom de germaniu printr-un atom de stibiu, patru electroni de valenţă ai stibiului vor servi la stabilirea legăturilor covalente (chimice) cu atomii de germaniu, iar un electron rămas liber va putea fi desprins relativ uşor de atomul său. Cum nivelele energetice ale electronilor de valenţă ai impurităţii pentavalente sînt în imediata apropiere a zonei de conducţie a germaniului, rezultă că este suficientă o cantitate mică de energie dată din exterior pentru ca electronii de valenţă a impurităţii, rămaşi neocupaţi în legăturile covalente, să treacă în zona de conducţie. O astfel de impuritate, capabilă să cedeze electroni, se numeşte *impuritate donoare*, iar semiconductorul respectiv de *tip n*.

Semiconductoarele de tipul *n* se mai numesc şi semiconductoare cu conductibilitate electronică deoarece ponderea cea mai mare a purtătorilor de sarcini este constituită din electronii cedaţi în zona de conducţie de impuritatea donoare, denumiţi *electroni majoritari*. Pe lîngă aceştia, mai există în zona de conducţie şi *electroni minoritari*, de mare energie, cedaţi de materialul de bază, respectiv în zona de valenţă a materialului de bază există *goluri minoritare*.

Dacă se adaugă germaniului o impuritate de indiu (trivalent) atunci, în urma stabilirii legăturilor covalente între atomii reţelei cristaline aparţinînd germaniului, respectiv indiului, rămîn ioni de indiu care dispun de un gol (lipsa unui electron) şi care poate fi ocupat de un electron al atomului de germaniu. Dar, de unde a plecat acest electron se creează un alt gol ş.a.m.d. Zona de conducţie a impurităţii trivalente fiind situată în vecinătatea superioară a zonei de valenţă a germaniului, înseamnă că, la primirea unei mici cantităţi de energie din exterior, un anumit număr de electroni trec pe nivelurile energetice din această zonă, iar în zona de valenţă se creează *goluri majoritare*. Electronii materialului de bază situaţi în zona de conducţie constituie *electronii minoritari*. Impuritatea care contribuie la crearea golurilor (capabile să accepte electroni) se numeşte *acceptoare* iar semiconductorul este de *tipul p*.

Semiconductoarele de tipul *p* se mai numesc şi semiconductoare cu *conductibilitate prin goluri*, deoarece ponderea cea mai mare a purtătorilor mobili de sarcini electrice o constituie golurile majoritare.

Dacă, folosind o sursă exterioară, se creează în interiorul semiconductorului de tip *n*, sau de tip *p*, un cîmp electric $\bar{E}$, semiconductorul este străbătut de

curent datorită mișcării ordonate a purtătorilor mobili de sarcini electrice (electronii și golurile).

Folosind diverse tipuri de materiale semiconductoare, se realizează diverse dispozitive ca : *diode semiconductoare*, realizate prin joncțiunea *pn* (fig. 2—18, *a*), *tranzistoare*, realizate prin joncțiunile *pnp* (sau *npn*) (fig. 2-18, *b*), *tiristoare*,

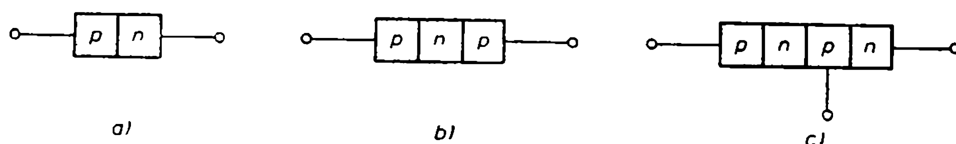


Fig. 2-18. Joncțiuni între semiconductoare :
a — dioda; *b* — tranzistorul; *c* — tiristorul.

realizate prin joncțiunile *pnpn* (fig. 2-18, *c*) etc. Funcționarea acestor dispozitive se explică pe baza celor arătate mai sus în legătură cu crearea și mișcarea purtătorilor mobili de sarcini electrice.

2.8. CURENTUL ELECTRIC ÎN VID ŞI ÎN GAZE

2.8.1. CURENTUL ELECTRIC ÎN VID

Ne referim la tuburile electronice cu vid (dioda, trioda etc.) în care, sub acțiunea unui cîmp electric creat prin aplicarea unei diferențe de potențial între anod și catod, electronii emiși de catod se deplasează spre anod și determină un curent electric prin tub (în vid). Un astfel de curent, corespunzător mişcării orientate a electronilor în vid este un *curent de convecție*.

Legea lui Ohm nu mai este valabilă pentru cazul cînd curentul electric are loc în vid deoarece aceasta este o lege de material, în expresia ei intervenind o constantă de material (rezistivitatea sau conductivitatea electrică), care pentru vid nu poate fi definită.

Eliberarea electronilor de către catod se numește *emisiune electronică* care se explică după cum urmează : electronii liberi sînt reținuți în metal de forțele cîmpului electric provocat de ionii rețelei cristaline, mișcarea lor (dezordonată și ordonată) fiind analoagă cu mișcarea moleculelor unui gaz închis într-un recipient, respectiv printr-o conductă. Pentru ca electronii să poată părăsi metalul, trebuie să primească din exterior o energie suficient de mare, astfel încît să fie învinsă așa-numita „barieră de potențial". Presupunem că datorită unei cauze, electronii părăsesc metalul, dar nu au energie suficientă să se îndepărteze de suprafața acestuia, fiind reținuți de forțele determinate de ionii pozitivi formați în metal prin ieșirea electronilor. Se creează astfel la suprafață un strat de sarcini electrice duble, pozitive în metal și negative în exterior. Datorită acestor sarcini apare un cîmp electric orientat spre exteriorul suprafeței metalului și o variație bruscă a potențialului ($V_1 > V_2$). În aceste condiții, pentru ca un electron să părăsească complet metalul, trebuie să se cheltuiască lucrul mecanic :

$$W_a = q\,(V_1 - V_2) = qU, \qquad (2\text{-}67)$$

unde $U=V_1-V_2$ se numeşte *barieră de potenţial.* Din această energie se scade energia cinetică maximă a electronilor liberi :

$$W_i=\frac{1}{2}m_e v_{max}^2<W_a \tag{2-68}$$

şi se obţine surplusul de energie pe care electronii liberi trebuie să-l primească din exterior, denumit lucrul mecanic de ieşire :

$$W_0=W_a-W_i. \tag{2-69}$$

Lucrul mecanic de ieşire este dependent de natura metalului şi se măsoară în eV (4,54 eV la wolfram, 2,51 eV la bariu, 1,43 eV la cesiu etc.).

După felul cum se obţine surplusul de energie W_0 se deosebesc :

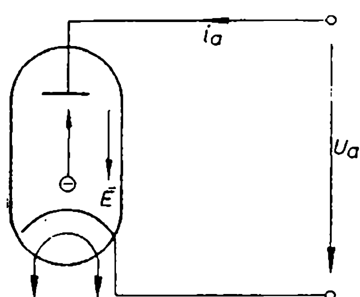


Fig. 2-19. Dioda electronică.

— emisiune termoelectronică, cînd suprafaţa emisivă este încălzită ;

— emisiune fotoelectronică, cînd suprafaţa emisivă primeşte un flux de fotoni (radiaţii electromagnetice) ;

— emisiune electronică secundară, cînd suprafaţa emisivă este bombardată de un flux de electroni sau ioni ;

— emisiune autoelectronică, cînd spre suprafaţa emisivă este îndreptat un cîmp electric exterior de intensitate foarte mare.

Curentul anodic i_a la dioda electronică (fig. 2-19) se exprimă în funcţie de tensiunea anodică u_a prin relaţia stabilită de Langmuir :

$$i_a=gu_a^{3/2}, \tag{2-70}$$

cunoscută şi sub denumirea de teorema exponentului $^3/_2$, unde g este o constantă ce depinde de construcţia tubului.

2.8.2. CURENTUL ELECTRIC ÎN GAZE

Trecerea curentului electric prin gaze sau prin vapori metalici intervine la numeroase dispozitive şi aparate, dintre care se pot cita : tuburile ionice (gazotroane, tiratroane etc.), tuburile luminoase, lămpile cu vapori metalici, aparatele cu arc electric etc. Pentru explicarea fenomenelor ce au loc se consideră un tub umplut cu gaz sau cu vapori metalici la o presiune scăzută. În stare normală, atomii de gaz sînt neutri din punct de vedere electric. În realitate, în masa gazului, datorită influenţei razelor cosmice, cît şi a radiaţiilor radioactive emanate de scoarţa pămîntului, există purtători de sarcină electrică : electroni, ioni pozitivi sau negativi în stare liberă (ionizare naturală). Aceste particule se mişcă haotic atît timp cît între electrozii tubului nu se aplică o diferenţă de potenţial electric. În momentul aplicării unei tensiuni la electrozii tubului, cîmpul electric dintre electrozi va ordona mişcarea particulelor încărcate cu sarcini electrice. Datorită mobilităţii superioare a electronilor liberi faţă de ioni, curentul electric prin gaz este stabilit practic de către electroni (curent electronic).

Între electronii liberi în stare de mișcare și atomii de gaz (neutri) se produc ciocniri, în urma cărora electronii cedează energie cinetică atomilor. Se disting trei feluri de ciocniri :

— ciocniri elastice, în urma cărora nu se modifică starea atomilor de gaz ;

— ciocniri neelastice care provoacă excitarea atomilor de gaz ;

— ciocniri neelastice care provoacă ionizarea gazului.

Sub aspectul trecerii curentului electric prin gaz, prezintă interes deosebit ciocnirile care au ca efect ionizarea gazului. De fapt, în afară de ionizarea prin șoc, mai poate avea loc, așa cum s-a amintit, și ionizarea prin radiații (fotoionizarea), respectiv ionizarea prin încălzirea gazului (termoionizarea) .

Caracteristica tensiune-curent a unui tub cu gaz este reprezentată în fig. 2-20. Pentru tensiuni aplicate între electrozi mai mici decît cea corespunzătoare punctului A, are loc deplasarea către electrozii corespunzători a electronilor și ionilor pozitivi, rezultați din procesul de ionizare naturală. Curentul electric prin gaz este extrem de mic, de ordinul 10^{-18} A, și se supune legii lui Ohm.

Între punctele A și B ale caracteristicii volt-amper are loc un fenomen de saturație prin curent în sensul că, la variații relativ mari pentru tensiune, se obțin variații relativ mici pentru curent. Datorită mobilității superioare a electronilor, aceștia ajung la anod mai repede decît ajung la catod ionii pozitivi. Se creează astfel în tub o *sarcină spațială* (volumetrică) pozitivă care, în anumite situații, nu favorizează creșterea curentului prin tub odată cu majorarea intensității cîmpului electric.

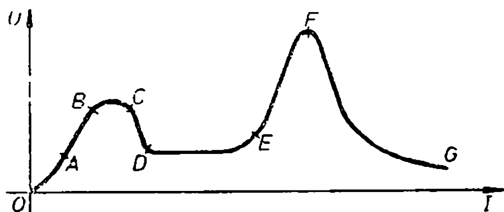


Fig. 2-20. Caracteristica tensiune-curent a unui tub cu gaz.

Bombardarea catodului de către ionii pozitivi provoacă fenomenul de *emisiune secundară de electroni* care, la rîndul lor, sînt supuși acțiunii cîmpului electric și sarcinilor spațiale din tub.

Cînd tensiunea dintre electrozi are valori cuprinse între punctele B și C, electronii liberi din gaz, rezultați atît prin ionizare naturală cît și prin emisiune secundară, posedă o energie cinetică suficientă pentru a provoca ionizarea prin șoc a atomilor de gaz. În urma ionizării prin șoc apar noi purtători de sarcini electrice care, accelerați de cîmpul electric de tub, vor produce la rîndul lor ionizarea altor atomi de gaz ș.a.m.d. Multiplicarea numărului de electroni liberi produce o ionizare cumulativă (în progresie geometrică), numită *avalanșă electronică*. Dacă, înainte de a apare ionizarea cumulativă, menținerea stării de ionizare din tub a avut nevoie de un agent exterior (descărcare neautonomă), după apariția ionizării cumulative starea de ionizare din tub se menține, independent de agentul exterior (descărcare autonomă). Evident, datorită avalanșei electronice curentul prin tub crește în măsură pronunțată odată cu majorarea tensiunii între electrozi.

În momentul în care tensiunea între electrozi obține valoarea corespunzătoare punctului C, denumită *tensiune de aprindere*, tubul trece în domeniul de descărcare luminiscentă. La început apar radiații luminoase în cîteva suprafețe mici (puncte) ale catodului, care se extind odată cu creșterea curentului. Evident, descărcarea se menține în continuare autonomă și, datorită distribuției sarcinilor pozitive spațiale, descărcarea luminiscentă se menține pentru valori mai mici ale tensiunii între electrozi.

Porţiunea *DE* a caracteristicii corespunde descărcării luminiscente normale din tub, cînd tensiunea păstrează o valoare practic constantă. Pe această porţiune se situează punctul de funcţionare al tuburilor luminiscente cu catod rece.

Pe porţiunea *EF* a caracteristicii are loc o descărcare luminiscentă anormală, însoţită de o creştere masivă a sarcinilor pozitive care se deplasează spre catod. Bombardarea intensă a catodului de către ionii pozitivi produce încălzirea acestuia, aducîndu-l în stare de emisiune termoelectronică (emisiune de electroni primari).

Porţiunea *FG* a caracteristicii corespunde descărcării în arc electric, caracterizat atît printr-o emisiune masivă de electroni primari de către catodul încălzit (pată catodică), cît şi printr-o ionizare termică intensă a coloanei de gaz. Langmuir a denumit *plasmă* această stare de ionizare intensă a gazului. După Steubeck, plasma reprezintă *a patra stare de agregare a materiei.*

Sub aspectul conductibilităţii electrice, proprietăţile plasmei se aseamănă atît cu ale metalelor, cît şi cu cele ale electroliţilor. Asemănarea cu metalele constă în faptul că în plasmă există electroni liberi a căror sarcini se compensează cu sarcinile ionilor pozitivi existenţi în acelaşi volum (deşi ionii nu formează o reţea fixă ca la metale, totuşi datorită dimensiunilor lor mari şi a mobilităţii reduse, pot fi consideraţi imobili faţă de electroni). Asemănarea cu un electrolit constă în faptul că purtătorii mobili de sarcini electrice sînt nu numai electronii liberi, ci şi ionii rezultaţi în urma procesului de ionizare a gazului.

2.9. CURENTUL ELECTRIC ÎN ELECTROLIŢI

2.9.1. CONDUCTIBILITATEA ELECTROLIŢILOR

La conductoare de prima speţă (metalele şi carbonul) conductibilitatea electrică este mijlocită de „gazul" electronic format din electronii liberi. Trecerea curentului electric prin aceste conductoare nu este însoţită de reacţii chimice.

La conductoarele de a doua speţă, denumite electroliţi (acizi, baze şi săruri în soluţie), conductibilitatea electrică este mijlocită de ionii pozitivi şi negativi formaţi în soluţie prin disociere electrolitică. Trecerea curentului electric prin aceste conductoare este însoţită de reacţii chimice.

Un exemplu de conductor electrolitic este soluţia de sare de bucătărie în apă. Majoritatea moleculelor de NaCl se disociază în ioni de sodiu şi de clor :



$$NaCl \rightarrow Na^{+} + Cl^{-}$$

Disociaţia electrolitică se datoreşte faptului că moleculele solventului (apa) slăbesc forţele electrice care leagă ionii substanţei de dizolvat (NaCl). Se numeşte *grad de disociere* α raportul dintre numărul de molecule disociate şi numărul total de molecule dizolvate. La electroliţii tari, cum sînt acizii, bazele şi sărurile lor $\alpha \cong 1$, adică majoritatea moleculelor sînt disociate.

Conductibilitatea electroliţilor depinde de concentraţia soluţiei. În fig. 2-21 este reprezentată variaţia conductivităţii electrice în funcţie de concentraţie pentru electrolitul format din acid sulfuric dizolvat în apă distilată.

Curentul electric prin electrolit este determinat de mişcarea în sensuri opuse a ionilor pozitivi şi a ionilor negativi, sub acţiunea forţelor determinate de cîmpul electric din electrolit (fig. 2-22). În mişcarea lor, ionii sînt frînaţi

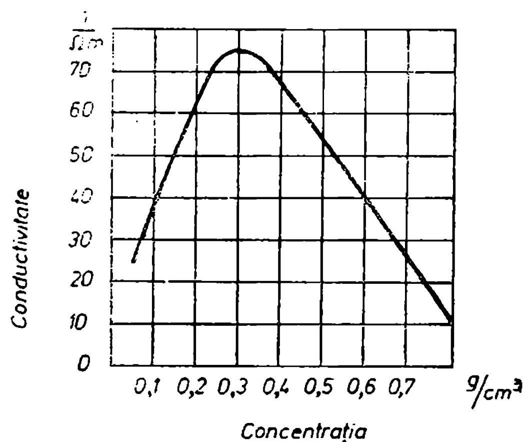


Fig. 2-21. Dependența conductivității de concentrația electrolitului.

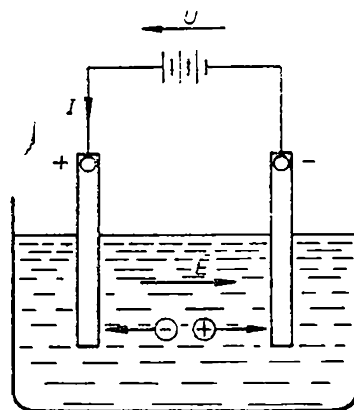


Fig. 2-22. Mișcarea ionilor în electrolit.

de ciocnirile cu particulele electrolitului. În stare de echilibru electrocinetic, viteza de mișcare a ionilor în electrolit obține o valoare proporțională cu intensitatea cîmpului electric :

$$\bar{v}_{-}=K_{-}\bar{E},\quad \bar{v}_{+}=K_{+}\bar{E}, \tag{2-71}$$

unde K_{-} și K_{+} reprezintă factorul de mobilitate al ionilor negativi, respectiv pozitivi.

Densitatea de curent prin electrolit se obține prin însumarea sarcinilor negative și pozitive care trec în unitatea de timp, prin unitatea de suprafață (v. relația 2-11) :

$$\bar{J}=\rho_{0-}\bar{v}_{-}+\rho_{0+}\bar{v}_{+}=(\rho_{0-}K_{-}+\rho_{0+}K_{+})\,\bar{E}=\sigma\bar{E}, \tag{2-72}$$

unde ρ_{0-} și ρ_{0+} sînt densitățile de volum ale sarcinilor (ionilor) pozitive și negative din electrolit, iar σ este conductivitatea electrolitului.

La creșterea temperaturii, conductivitatea electrică a electroliților crește (rezistivitatea scade), ceea ce se justifică prin mărirea gradului de disociere în urma creșterii agitației termice.

2.9.2. ELECTROLIZA ȘI APLICAȚIILE INDUSTRIALE

Reacția chimică produsă într-o soluție de electrolit la trecerea curentului electric se numește *electroliză*.

Sub influența cîmpului electric creat în electrolit de o sursă de curent continuu exterioară, ionii negativi se deplasează prin electrolit spre electrodul pozitiv, denumit anod, iar ionii pozitivi spre electrodul negativ, denumit catod (fig. 2-22). Ionii negativi se numesc *anioni*, iar ionii pozitivi se numesc *cationi*.

Ionii respectivi fiind fragmente de moleculă, mișcarea lor este însoțită și de un transport de substanță deoarece, ajungînd la electrozi, primesc sau cedează electroni, transformîndu-se în molecule neutre, în mod direct, sau în urma unor reacții chimice.

Electroliza are aplicații industriale deosebit de importante, cum sînt : rafinarea metalelor, prepararea metalelor din săruri, metalizarea, obținerea unor produse chimice etc.

Rafinarea metalelor constă în purificarea lor prin electroliză. De exemplu, prin rafinarea cuprului impur se obține cupru pur (cupru electrolitic). În acest caz, electrolitul este o soluție de sulfat de cupru amestecat cu acid sulfuric, anodul este format dintr-o bară de cupru (impur), iar catodul constă dintr-o tablă de cupru pe care se depune cuprul pur.

Prepararea metalelor din sărurile lor. De exemplu, aluminiul, un metal foarte mult întrebuințat în tehnica modernă, este obținut în întregime prin electroliza sărurilor sale. Ca electrolit se întrebuințează florura dublă de aluminiu și sodiu topită, iar ca electrozi plăci de cărbune. Sarea rămîne topită prin temperatura ridicată (950—980 °C), rezultată din căldura dezvoltată la trecerea curentului prin electrolit. La noi în țară se prepară aluminiu pe această cale la Combinatul de Aluminiu din Slatina, intrat în funcțiune în 1965.

Metalizarea constă în acoperirea prin electroliză a suprafețelor metalice cu un strat subțire de metal rezistent la coroziune (exemplu : nichelarea, cromarea etc.).

2.9.3. LEGEA ELECTROLIZEI

Legea electrolizei, stabilită de *Faraday*, arată că masa unui element, sau radical chimic, depusă la electrod prin electroliză, este proporțională cu cantitatea de sarcină electrică ce trece prin electrolit și cu echivalentul chimic al elementului respectiv, adică :

$$m=\frac{1}{F_0}\cdot\frac{A}{\nu}\int i\,\mathrm{d}t=\frac{1}{F_0}\cdot\frac{A}{\nu}Q=K_eQ, \qquad (2\text{-}73)$$

unde:

i este curentul electric din electrolit, în A ;

A — masa atomică a substanței ;

ν — valența produsului depus ;

$\frac{A}{\nu}$ — echivalentul chimic ;

$Q=\int i\,\mathrm{d}t$ — sarcina electrică ;

F_0=96 490 coulombi — constanta lui Faraday (sarcina electrică necesară pentru a depune o masă egală cu masa echivalentă $m_e=\frac{A}{\nu}$).

Mărimea :

$$K_e=\frac{1}{F_0}\,\frac{A}{\nu} \qquad (2\text{-}74)$$

se numește echivalent electrochimic și reprezintă cantitatea de substanță depusă de unitatea de sarcină electrică (1 C).

Energia electrică consumată pentru electroliză în industrie este destul de însemnată. De exemplu, pentru electroliza aluminiului rezultă circa 18 000 ... 20 000 kWh/tonă. Curentul continuu folosit la electroliză ajunge la zeci de mii de amperi.

Polarizarea electrozilor este un fenomen ce apare în procesul de electroliză și constă în depunerea unei pelicule de gaz pe suprafața electrozilor, aderînd la neuniformitățile microscopice ale acestei suprafețe (la catod se depune o peliculă de hidrogen, la anod o peliculă de oxigen). Pelicula de gaz împreună cu electrozii formează un element galvanic avînd o t.e.m. egală cu circa 1 V (tensiune de polarizare) ce acționează în sens invers față de curentul dat de sursa exterioară. În practică se iau măsuri pentru evitarea sau diminuarea acestui fenomen nefavorabil.

2.10. CÎMPURI ELECTRICE IMPRIMATE

În afară de forțele determinate de cîmpul electric ce acționează asupra purtătorilor mobili de sarcini electrice, asupra acestora mai pot acționa, în anumite condiții, și forțe care nu sînt de natură electrică. Dacă $\bar{F}_{ne}$ este o astfel de forță și Q este sarcina particulei asupra căreia acționează, se poate considera că această forță este determinată de un cîmp electric, denumit *cîmp electric imprimat*, a cărui intensitate este :

$$\bar{E}_i = \frac{\bar{F}_{ne}}{Q}. \tag{2-75}$$

Prin definiție, integrala de linie a intensității cîmpului electric imprimat reprezintă tensiunea electromotoare :

$$\int \bar{E}_i \, dl = U_e. \tag{2-76}$$

Cîmpurile electrice imprimate pot fi împărțite în două categorii : de volum și de contact. Cîteva exemple de *cîmpuri electrice imprimate în volumul conductoarelor* sînt expuse în continuare.

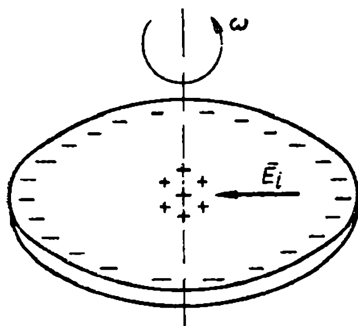


Fig. 2-23. Disc metalic rotitor.

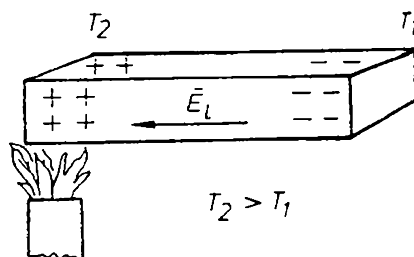


Fig. 2-24. Cîmp imprimat termic.

Cîmpuri imprimate de accelerație. Se consideră un disc metalic menținut în mișcare de rotație cu o viteză unghiulară foarte mare (fig. 2-23). Forța centrifugă ce acționează asupra electronilor liberi din metal îi deplasează spre periferia discului, la centru rămînînd sarcini electrice pozitive necompensate. Vectorul intensității cîmpului electric imprimat este orientat radial, de la periferia discului spre centru.

Cîmpuri imprimate termice. Se consideră o bară din metal încălzită la unul din capete (fig. 2-24). Datorită energiei termice primită de la sursă, concen-

trația electronilor liberi devine mai mare în zona încălzită față de zona rece. Diferența de concentrație face ca electronii liberi să difuzeze spre capătul rece al barei, la capătul cald rămînînd sarcini (ioni) pozitive în surplus. Intensitatea cîmpului electric imprimat are orientarea de la capătul rece spre capătul încălzit al barei.

Cîmpuri imprimate de concentrație. Se consideră un vas separat în două compartimente printr-un perete poros (fig. 2-25). În cele două compartimente se pune acid clorhidric concentrat, respectiv diluat. În urma fenomenului de disociere electrolitică, rezultă ioni pozitivi de hidrogen (H^+), respectiv ioni negativi de clor (Cl^-). Mobilitatea ionilor de hidrogen fiind mult mai mare decît mobilitatea ionilor de clor, aceștia difuzează mai ușor, respectiv în număr mai mare, din compartimentul cu concentrație ridicată în compartimentul cu concentrație scăzută. Astfel în compartimentul cu soluție diluată apare un surplus de sarcini electrice pozitive, iar în compartimentul cu soluție concentrată rămîne un surplus de sarcini electrice negative. Cîmpul electric imprimat are sensul arătat în figură.

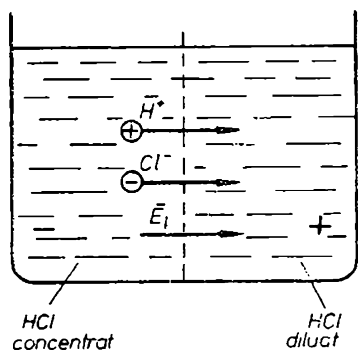


Fig. 2-25. Cîmp imprimat de concentrație.

Cîmpuri electrice imprimate de contact apar la elementele galvanice și la termoelemente la care se fac referiri în cele ce urmează.

2.11. ELEMENTE GALVANICE

Elementele galvanice sînt surse chimice de curent continuu la care energia chimică se transformă în energie electrică. În general, un element galvanic constă din doi electrozi introduși într-un electrolit (sau în doi electroliți diferiți), la electrozi fiind legate cele două borne, plus și minus, ale elementului.

Parametrii prin care se caracterizează un element galvanic sînt:

— tensiunea electromotoare, în volți;

— rezistența interioară, în ohmi;

— capacitatea, în amperi-ore.

Capacitatea unui element galvanic se exprimă prin relația:

$$C_{\mathrm{Ah}}=\int_0^t i_a \, dt = i_{am} t, \tag{2-77}$$

adică reprezintă produsul dintre curentul mediu de descărcare i_{am} și timpul de descărcare t, în așa fel încît tensiunea finală a elementului să nu scadă sub o valoare fixată prin condițiile de exploatare normală.

În timpul funcționării elementelor galvanice apare *fenomenul de polarizare* care constă în:

— modificarea concentrației ionilor în imediata vecinătate a electrozilor față de concentrația ionilor din restul soluției (polarizare de concentrație);

— modificarea compoziției chimice a electrolitului (polarizare chimică).

Fenomenul de polarizare are ca efect micşorarea t.e.m. a elementului şi mărirea rezistenţei interioare. Evitarea polarizării se realizează prin folosirea unor substanţe depolarizante aşezate în jurul electrozilor (bioxid de mangan, sulfat de cupru, acid azotic etc.).

Elementele galvanice sînt de două tipuri : elemente galvanice primare (pile) şi elemente galvanice secundare (acumulatoare). Elementele galvanice primare nu sînt reversibile, adică în aceste elemente energia electrică nu poate fi transformată în energie chimică (prin încărcare). În schimb, cele secundare sînt reversibile, adică prin încărcarea lor energia electrică este transformată în energie chimică.

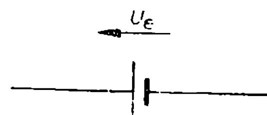


Fig. 2-26. Simbolul elementului galvanic.

Simbolul folosit pentru notarea surselor chimice de curent este cel din fig. 2-26 (linia mai lungă şi subţire reprezintă borna pozitivă a sursei).

Mai multe elemente galvanice grupate între ele în serie, în paralel sau mixt constituie *bateriile electrice*.

2.11.1. ELEMENTE GALVANICE PRIMARE (PILE ELECTRICE)

Dependent de natura electrozilor şi a electrolitului, respectiv a substanţei depolarizante, elementele galvanice primare sînt de mai multe tipuri.

Pila Volta, la care cei doi electrozi sînt unul din zinc (minus) şi altul din cupru (plus), iar electrolitul este o soluţie apoasă de acid sulfuric (SO_4H_2 + H_2O). Tensiunea electromotoare a unui astfel de element este 1,104 V. Fenomenul de polarizare ce apare la acest tip de element este foarte pronunţat.

Pila Leclanché are electrodul negativ din zinc, cel pozitiv din cărbune, electrolitul este o soluţie de clorură de amoniu (NH_4Cl), iar depolarizantul este bioxidul de mangan (situat în jurul electrodului pozitiv pentru reducerea hidrogenului ce polarizează acest electrod). T.e.m. a pilei Leclanché este circa 1,5 V, iar rezistenţa interioară 3 ... 10 Ω. Este o pilă robustă, cu o durată de funcţionare foarte mare.

Elementul normal Weston este folosit în laboratoare ca etalon pentru tensiunea electromotoare. Electrodul pozitiv este constituit din mercur, cel negativ din amalgam de cadmiu (HgCa), iar electrolitul este o soluţie a sulfatului de cadmiu. La temperatura de 20 °C, t.e.m. a acestui element este 1,01829 V.

Elementul normal Weston nu poate fi folosit ca sursă de curent, ci numai ca sursă de comparaţie pentru tensiune.

Elementul galvanic Daniel-Iacobi, pe care îl descriem mai în detaliu, constă dintr-un vas despărţit în două compartimente printr-un perete poros (fig. 2—27). Într-un compartiment se pune o soluţie diluată de sulfat de zinc (SO_4Zn), în care se introduce un electrod de zinc (Zn), iar în celălalt compartiment se pune o soluţie concentrată de sulfat de cupru (SO_4Cu), în care se introduce un electrod de cupru (Cu).

Datorită presiunii de dizolvare a zincului în soluţia diluată de sulfat de zinc, ionii pozitivi de zinc (Zn^{++}) vor trece în soluţie, pe electrod rămînînd un surplus de electroni. Apar în felul acesta la suprafaţa de contact dintre electrod şi electrolit sarcini electrice duble care determină un cîmp electric coulombian cu intensitatea $\bar{E}'_c$, respectiv între două puncte situate pe o parte

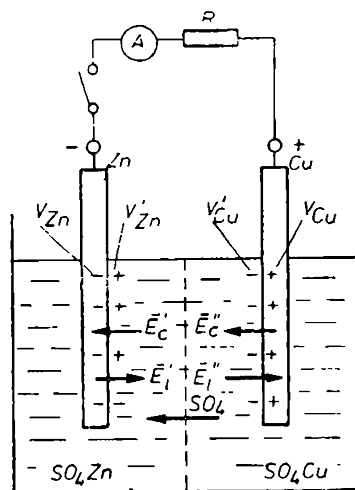


Fig. 2-27. Elementul galvanic Daniel-Iacobi.

şi de alta a suprafeţei de separaţie ia naştere diferenţa de potenţial $V'_{Zn} - V_{Zn}$.

În compartimentul cu soluţie concentrată de sulfat de cupru, datorită presiunii osmotice, ionii pozitivi de cupru (Cu^{++}) se depun pe electrod, în soluţie rămînînd ionii negativi ai radicalului SO_4^{--}. La suprafaţa de contact apare cîmpul electric coulombian $\bar{E}''_c$, respectiv diferenţa de potenţial $V_{Cu} - V'_{Cu}$ între două puncte situate de o parte şi de alta a suprafeţei.

Starea de echilibru se stabileşte în momentul cînd forţa determinată de cîmpul $\bar{E}'_c$, respectiv $\bar{E}''_c$, este egală şi de sens opus cu forţa datorită presiunii de dizolvare, respectiv cu forţa datorită presiunii osmotice. În această stare, mişcarea ionilor încetează. Electrodul de Zn se va găsi la un potenţial negativ (V_{Zn}), iar electrodul de cupru la un potenţial pozitiv (V_{Cu}).

Dacă între cei doi electrozi se conectează un rezistor în serie cu un ampermetru, se va constata trecerea prin circuit a unui curent electric. Energia calorică dezvoltată la trecerea curentului prin rezistor apare în contul energiei eliberate în timpul reacţiilor chimice din interiorul elementului. Într-adevăr, la dizolvarea zincului se eliberează o cantitate de energie mai mare decît se consumă la depunerea cuprului din soluţie pe electrod. Diferenţa dintre aceste două energii se transformă în căldură prin efect Joule-Lenz.

Presiunea de dizolvare a zincului în soluţie, respectiv presiunea osmotică de depunere a cuprului pe electrod determină forţe de natură neelectrică care acţionează asupra ionilor pozitivi de metal şi îi pun în mişcare. Aceste forţe pot fi considerate ca fiind datorate unui cîmp electric imprimat, $\bar{E}_i$, definit prin relaţia (2-75). Sensul lui $\bar{E}_i$ este opus cîmpului electric coulombian $\bar{E}_c$ determinat de sarcinile electrice (fig. 2—27). Starea de echilibru are loc atunci cînd cîmpul rezultant este nul, adică :

$$\bar{E} = \bar{E}_c + \bar{E}_i = 0. \tag{2-78}$$

Efectuînd $\int \bar{E}\,dl$ de-a lungul unei linii ce începe din electrodul de Zn, trece prin electrolit şi se termină în electrodul de Cu, deci străbate cele două suprafeţe unde există cîmpurile electrice $\bar{E}_c$ şi $\bar{E}_i$, se obţine :

$$\int_{Zn}^{Cu} \bar{E}\,d\bar{l} = 0 = \int_{Zn}^{Cu} \bar{E}_i\,d\bar{l} + \int_{Zn}^{Cu} \bar{E}_i\,d\bar{l}. \tag{2-79}$$

Integrala de linie a intensităţii cîmpului electric imprimat este, prin definiţie, tensiunea electromotoare, iar integrala de linie a cîmpului electric coulombian este egală cu diferenţa de potenţial. În cazul de faţă, rezultă :

$$\int_{Zn}^{Cu} \bar{E}_i\,d\bar{l} = U_e, \tag{2-80}$$

$$\int_{Zn}^{Cu} \bar{E}_c\,d\bar{l} = \int_{Zn}^{electrolit} \bar{E}'_c\,d\bar{l} + \int_{electrolit}^{Cu} \bar{E}''_c\,d\bar{l} = (V_{Zn} - V'_{Zn}) + (V'_{Cu} - V_{Cu}) \tag{2-81}$$

Înlocuind relațiile (2-80) și (2-81) în (2-79), se obține:

$$U_e+(V_{Zn}-V_{Zn})+(V'_{Cu}-V_{Cu})=0,$$

de unde rezultă:

$$U_e=(V'_{Zn}-V_{Zn})+(V_{Cu}-V'_{Cu}). \qquad (2\text{-}82)$$

La elementul Daniel-Iacobi s-a constatat experimental că $V'_{Zn}-V_{Zn}=$ $=0,770$ V și $V_{Cu}-V'_{Cu}=0,329$ V, deci $U_e=1,099$ V.

În mod analog se explică și funcționarea celorlalte tipuri de elemente galvanice primare.

Sensul tensiunii electromotoare la elementele galvanice este de la electrodul negativ spre electrodul pozitiv (fig. 2-26). Se poate spune că tensiunea electromotoare acționează în interiorul sursei ca o „pompă" care face să treacă curentul de la electrodul cu potențial mai mic (negativ), spre electrodul cu potențial mai ridicat (pozitiv). Cînd sursa debitează curent, echilibrul exprimat prin relația (2-75) se modifică, intensitatea cîmpului electric coulombian devenind mai mică decît intensitatea cîmpului imprimat ($\bar{E}_c<\bar{E}_i$). Diferența dintre aceste două intensități de cîmp este cea care menține mișcarea permanentă a purtătorilor de sarcini electrice.

Pilele electrice industriale se realizează sub formă de baterii, avînd mai multe elemente legate în serie. După domeniul de întrebuințare, se deosebesc:

— elemente pentru baterii de buzunar;
— elemente pentru baterii anodice;
— elemente pentru baterii de semnalizare și telecomunicații etc.

T.e.m. pe element, în stare nouă, este circa 1,5 V. După descărcare, t.e.m. ajunge la circa 0,5...0,6 V. Datorită fenomenului de autodescărcare, t.e.m. scade în timp, chiar dacă bateria nu este folosită.

Capacitatea pilelor industriale variază între 0,25...500 Ah. Valoarea acestei capacități depinde de cantitatea de substanță activă pe care o conține elementul.

Se construiesc baterii pentru funcționarea continuă și pentru funcționarea intermitentă.

2.11.2. ACUMULATOARE ELECTRICE

Acumulatoarele electrice sînt elemente chimice reversibile, care permit transformarea energiei chimice în energie electrică și invers. După natura electrolitului, se deosebesc două tipuri de acumulatoare: *acide și alcaline*. Din categoria acumulatoarelor acide fac parte acumulatoarele cu plumb, iar din categoria acumulatoarelor alcaline fac parte acumulatoarele fero-nichel și cadmiu-nichel.

Acumulatoarele cu plăci din plumb sînt cele mai răspîndite datorită calităților electrice remarcabile și tehnologiei de fabricație relativ ușoară, comparativ cu alte tipuri. Electrolitul este o soluție a acidului sulfuric (SO_4H_2) în apă distilată (H_2O), cu o concentrație de 20...30% (densitate 1,2...1,3).

O celulă (un element) al acumulatorului constă din mai multe plăci pozitive legate între ele și intercalate între plăcile negative (fig. 2-28), astfel ca

suprafața de contact cu electrolitul să fie cît mai mare, iar distanța dintre plăci cît mai mică. Substanța de bază atît a plăcilor pozitive, cît și a celor negative este plumbul. Suporturile plăcilor se realizează sub formă de grătare dintr-un aliaj de plumb cu antimoniu pentru a avea o rezistență mecanică mare. În cavitățile suporților se introduce pasta, compusă din amestecul în diferite proporții a: tetraoxidului de plumb (Pb_3O_4 — miniu de plumb), monoxid de plumb (PbO — litargă), pilitură de plumb, sulfat de amoniu, zaharat de bariu, sulfat de magneziu, grafit și glicerină. Pasta plăcilor pozitive are un conținut diferit față de cel al plăcilor negative și anume, la plăcile pozitive se adaugă agenți de porozitate (sulfat de amoniu, sulfat de magneziu), iar la plăcile negative se adaugă agenți de conductivitate (grafit, sulfat de bariu). Distanța dintre plăci se realizează cît mai mică pentru a obține o rezistență interioară de valoare redusă.

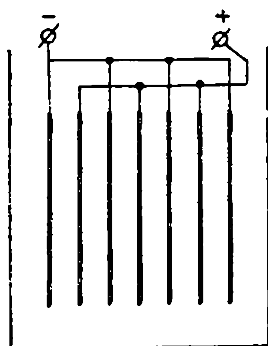


Fig. 2-28. Plăcile acumulatorului cu plumb.

Un acumulator cu plumb nou, înainte de a fi dat în folosință, trebuie supus operației de *formare*, care constă în încărcarea și descărcarea repetată, cu un curent de valoare mică și electrolit de concentrație redusă.

În stare încărcată, plăcile pozitive conțin bioxid de plumb (PbO_2), cele negative conțin plumb poros (spongios), iar electrolitul are concentrație ridicată (densitate 1,29).

În timpul descărcării, atît la plăcile pozitive, cît și la cele negative se formează sulfat de plumb (SO_4Pb), iar electrolitul se diluează (densitatea ajunge la 1,15). Suprasolicitarea acumulatorului în timpul descărcării poate conduce la sulfatarea ireversibilă a plăcilor, respectiv la micșorarea capacității și a duratei de funcționare a acumulatorului.

În fig. 2-29 sînt reprezentate curbele de variație a tensiunii și a concentrației electrolitului în timpul încărcării și descărcării, cu un curent constant, a acumulatorului cu plumb. Timpul normal de încărcare este de circa 10 ore, ceea ce înseamnă un curent de încărcare mediu egal cu 1/10 din capacitatea

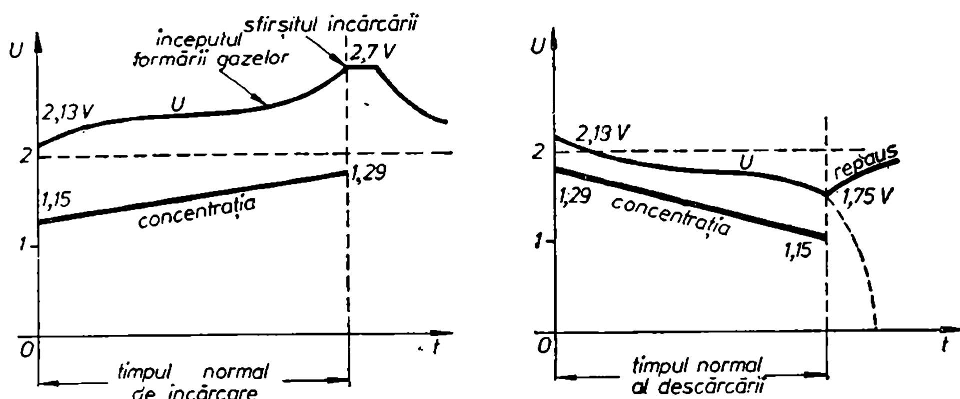


Fig. 2-29. Variația tensiunii și concentrației la încărcarea și descărcarea acumulatorului cu plumb (pentru un element).

acumulatorului. Sfîrșitul operației de încărcare se evidențiază prin intensificarea formării gazelor datorită electrolizei apei (acumulatorul fierbe).

Randamentul acumulatorului se exprimă prin raportul dintre energia electrică cedată de acumulator în timpul descărcării și energia consumată în timpul încărcării. Acest randament este influențat în mare măsură de fenomenul de electroliză a apei ce apare la încărcare și care nu poate fi evitat la soluțiile apoase.

Acumulatoarele alcaline, al căror electrolit este o soluție alcalină, sînt de două tipuri :

— acumulatoare fero-nichel (Fe-Ni) ;

— acumulatoare cadmiu-nichel (Cd-Ni).

Comparativ cu acumulatoarele cu plumb, aceste acumulatoare sînt mai ușoare, mai robuste și nu necesită o întreținere specială. Electrozii sînt realizați din tablă sau sîrmă din oțel nichelat, pe care sînt fixate substanțele active. La electrodul pozitiv substanța activă este hidratul negru de nichel — $Ni(OH)_3$, care se prepară foarte greu pe cale chimică, în schimb se obține foarte ușor prin oxidare electrochimică, la formarea acumulatorului, din hidratul verde de nichel — $Ni\ (OH)_2$. Deoarece hidratul negru de nichel este rău conducător de electricitate i se adaugă :

— solzi de Ni metalic, la acumulatoarele Fe-Ni ;

— solzi de grafit, la acumulatoare Cd-Ni.

La electrozii negativi substanța activă este :

— fierul, la acumulatoarele Fe-Ni ;

— cadmiul spongios (cu 15% Fe), la acumulatoarele Cd-Ni.

Bacul și capacul sînt realizate din tablă de oțel nichelat, îmbinate prin sudare.

Electrolitul este o soluție apoasă de potasă caustică (KOH), cu greutatea specifică 1,19...1,21. Spre deosebire de acumulatoarele acide, la acumulatoarele alcaline electrolitul nu participă la reacțiile chimice ce au loc în timpul descărcării și încărcării și, ca urmare, concentrația sa rămîne nemodificată.

Tensiunea electromotoare a acumulatoarelor alcaline are valoarea de 1,41 V pentru acumulatoarele Fe-Ni și 1,38 V pentru acumulatoarele Cd-Ni.

La acumulatoarele Fe-Ni borna „minus" este legată la masă, iar la acumulatoarele Cd-Ni este legată la masă borna „plus".

2.12. TERMOELEMENTE

Experimental se constată că punînd în contact capetele a două conductoare metalice diferite, apare o tensiune electromotoare care poate fi măsurată cu ajutorul unui milivoltmetru legat la capetele rămase libere. Valoarea tensiunii măsurate depinde de temperatura locului de contact, din care cauză astfel de dispozitive se numesc termoelemente.

Explicația apariției t.e.m. la termoelemente constă în faptul că concentrațiile N_A și N_B a electronilor liberi din cele două metale A și B sînt diferite. Lipind între ele aceste metale (fig. 2-30), apare fenomenul difuziei, adică electronii din metalul cu concentrație mai mare, de exemplu A, trec prin supra-

fața de lipire în metalul B cu concentrație mai mică ($N_B < N_A$). Valoarea t.e.m. este dată de relația:

$$U_{eBA} = 2{,}87 \cdot 10^{-7}\ T \ln \frac{N_A}{N_B}\ [V] \qquad (2\text{-}83)$$

unde T este temperatura absolută a suprafeței de contact.

Dacă cele două conductoare sînt lipite la ambele capete (fig. 2-31) și temperatura suprafețelor de lipire este aceeași, rezultă t.e.m. pentru circuitul închis egală cu zero, adică:

$$U_{eBA} + U_{eBA} = 2{,}87 \cdot 10^{-7}\ T \ln \frac{N_A}{N_B} + 2{,}87 \cdot 10^{-7}\ T \ln \frac{N_B}{N_A} = 0.$$

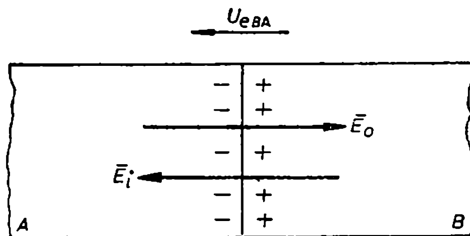


Fig. 2-30. Suprafața de contact între două conductoare diferite.

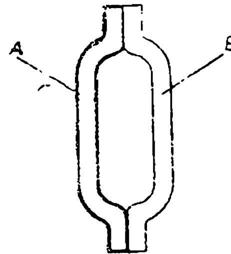


Fig. 2-31. Conductoarele în contact la ambele capete.

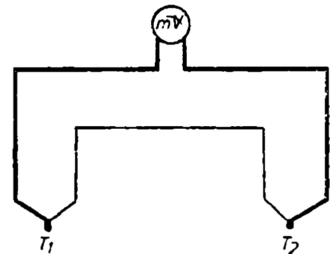


Fig. 2-32. Termocuplul cu milivoltmetru.

Dacă temperaturile la cele două suprafețe de contact sînt diferite, T_1 și T_2 [°K], atunci t.e.m. din circuitul închis este diferită de zero (*efectul Seebeck*):

$$U_e = 2{,}87 \cdot 10^{-7} \ln \frac{N_A}{N_B} (T_1 - T_2) \qquad (2\text{-}84)$$

sau

$$U_e = K\ (T_1 - T_2), \qquad (2\text{-}85)$$

adică t.e.m. este proporțională cu diferența dintre temperaturile absolute ale celor două suprafețe de contact, K fiind o constantă a cuplului respectiv, denumită t.e.m. specifică:

$$K = 2{,}87 \cdot 10^{-7} \ln \frac{N_A}{N_B}. \qquad (2\text{-}86)$$

Pe baza celor arătate mai sus, se construiesc termocuplele folosite în tehnică pentru măsurarea diferențelor de temperatură (fig. 2-32). Milivoltmetrul care măsoară t.e.m. a termocuplului este gradat în unități de temperatură.

Industrial, se folosesc termocuplele realizate din materialele specificate în tabela 2-5.

Pe baza efectului Seebeck descris mai sus se construiesc generatoarele termoelectrice (pile termoelectrice) care realizează conversia directă a energiei calorice în energie electrică. Numai că, astfel de generatoare sînt de puteri mici (de ordinul zecilor de watt).

Tabela 2-5

Date caracteristice ale unor termocupluri

Termocuplul	Temperatura maximă de utilizare [°C]	T.e.m. pentru $T_2-T_1=$ $=100°C$ [mV]
Constantan-cupru	500	5
Constantan-cromnichel	900	6,2
Constantan-fier	900	5,1
Nichel-cromnichel	(de la 300) 1 000	4,1
Platin-platin rodiu	(de la 600) 1 600	0,9
Iridiu-iridiu rodiu	2 000	0,5
Wolfram-wolfram molibden	3 000	0,3

Efectul Seebeck devine mult mai pronunțat la joncțiunile metal-semiconductor, datorită, pe de o parte, conductibilității termice mai reduse a semiconductoarelor și, pe de altă parte, densității purtătorilor de sarcini de numai $10^{18}/cm^3$ la semiconductoare, față de $10^{23}/cm^3$ la metale.

Aplicația 2-7. Tensiunea electromotoare măsurată de instrumentul atașat unui termocuplu din platin-platin rodiu este de 13 mV, termocuplul fiind introdus în interiorul unui cuptor. Să se determine temperatura din cuptor față de temperatura mediului ambiant.

Rezolvare. Temperatura din cuptor se determină folosind relația (2-85) și datele din tabela 2-5, adică:

$$T_2-T_1=\frac{U_e}{K}=\frac{13}{0,009}=1\,444\ °K.$$

Capitolul 3

REȚELE ELECTRICE DE CURENT CONTINUU

3.1. CIRCUIT ELECTRIC ȘI REȚEA ELECTRICĂ. SENSURI DE REFERINȚĂ

Prin circuit electric se înțelege ansamblul mediilor prin care poate circula curentul electric. Aceste medii pot fi conductoare, semiconductoare sau medii dielectrice. În medii conductoare și semiconductoare există curent electric de conducție, iar în medii dielectrice curent de deplasare.

În general, un circuit este constituit din *elemente de circuit* care sînt : rezistoarele, bobinele, condensatoarele și sursele de tensiune electromotoare. Aceste elemente pot fi grupate între ele în serie, în paralel, mixt (serie-paralel) sau complex.

Elementele de circuit se caracterizează prin următorii parametri : R — rezistența electrică, L — inductanța, C — capacitatea electrică, U_e — tensiunea electromotoare. Dacă ne referim, spre exemplu, la un rezistor folosit în laborator, realizat din sîrmă bobinată, acesta se caracterizează atît prin rezistența electrică R, cît și prin inductanța L a spirelor și capacitatea C dintre spire, parametrul predominant fiind însă rezistența electrică. În situație analoagă se prezintă și bobinele, respectiv condensatoarele folosite în practică.

Prin abstractizare, în teoria circuitelor electrice se introduc așa-numitele *elemente ideale de circuit* și anume : rezistorul ideal caracterizat numai prin parametrul R, bobina ideală caracterizată numai prin parametrul L, condensatorul ideal caracterizat numai prin parametrul C, generatorul ideal de tensiune, a cărui tensiune la borne este independentă de curent și generatorul ideal de curent, la care curentul debitat este independent de tensiunea la borne. În anumite situații concrete și în anumite limite date, elementele de circuit folosite în practică pot fi considerate ca fiind ideale.

Pentru reprezentarea elementelor ideale de circuit se folosesc simbolurile din fig. 3-1.

Un ansamblu de circuite electrice, conectate între ele într-un mod oarecare, constituie *rețeaua electrică.*

Reprezentarea grafică prin simboluri a elementelor de circuit sau de rețea și a modului cum acestea sînt conectate între ele se numește *schemă electrică* (fig. 3-2, *a*). În timp ce circuitul (rețeaua) constituie un sistem fizic real, schema circuitului (rețelei) reprezintă o abstractizare, o reprezentare simbolică a circuitului sau rețelei. O schemă electrică se consideră corect întocmită dacă ecuațiile stabilite pe baza ei descriu cu aproximație satisfăcătoare comportarea circuitului (rețelei) reprezentate prin schema respectivă.

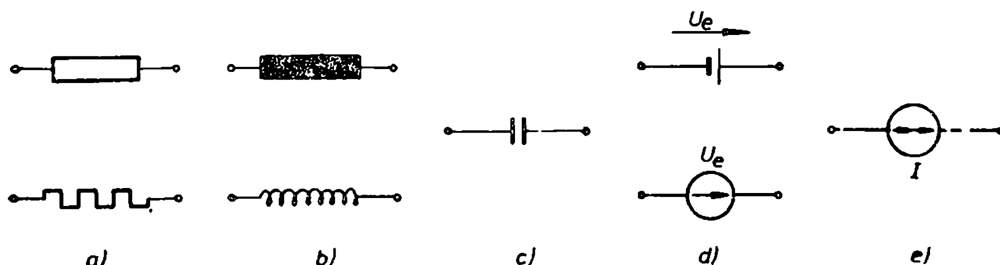


Fig. 3-1. Simboluri ale unor elemente de circuit :
a — rezistor; *b* — bobină; *c* — condensator; *d* — generator ideal de tensiune; *e* — generator ideal de curent.

Analizînd schema unei rețele electrice (fig. 3-2, *a*) se disting: laturi, noduri, ochiuri și arbori. Se numește *latură* de rețea o porțiune mărginită și neramificată a ei. *Nodul* este punctul în care se leagă împreună cel puțin trei capete de laturi.

Se numește *ochi* de rețea o succesiune de laturi care formează o curbă închisă. Partea rețelei care nu conține ochiuri se numește *arbore* (rețea arborescentă).

În unele considerațiuni de ordin mai general, nu interesează elementele conținute în laturile rețelei, motiv pentru care acestea nu se mai desenează în schemă, obținîndu-se *graful* rețelei sau *schema topologică* (fig. 3-2, *b*).

Dacă latura de rețea conține surse, ca de exemplu latura *AB* din fig. 3-2, *a*, ea se numește *activă* ; în caz contrar se spune că latura este *pasivă* (de exemplu latura *BC*).

Un circuit electric este *filiform* dacă densitatea de curent este constantă în punctele secțiunii sale transversale. În caz contrar, circuitul este *masiv*.

Dacă parametrii elementelor unui circuit sînt independenți de tensiune sau de curent, atunci circuitul este *liniar*. Circuitul este *neliniar* dacă cel puțin unul din parametrii săi depinde de tensiune sau de curent.

Circuitele electrice pot fi cu parametrii *concentrați* sau cu parametrii *repartizați* în lungul lor. În ultimul caz se folosesc parametrii lineici specifici, adică raportați la unitatea de lungime (Ω/m, H/m, F/m). Delimitarea între circuitele cu parametrii concentrați și circuitele cu parametrii repartizați se face atît în raport cu lungimea fizică a circuitului, cît și în raport cu frecvența curentului din circuit.

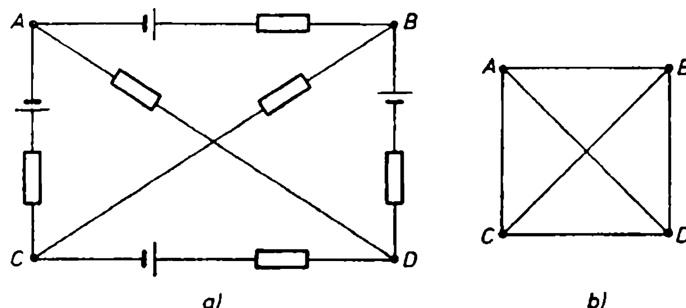


Fig. 3-2. Rețea electrică (*a*) și graful său (*b*).

În ceea ce priveşte sensurile de referinţă dintr-un circuit electric, acestea se referă la următoarele mărimi fizice scalare, definite prin integrale de linie şi de suprafaţă a unor mărimi vectoriale:

— tensiunea electromotoare: $U_e = \int \bar{E}_i \, d\bar{l}$;

— tensiunea la borne: $U_b = \int \bar{E} \, d\bar{l}$;

— curentul electric: $i = \int \bar{J} \, d\bar{s}$.

Se numeşte *sens de referinţă* sau *sens pozitiv* al mărimii fizice scalare sensul vectorului element de integrare ($d\bar{l}$, $d\bar{s}$). La rîndul său, sensul vectorului element de integrare se stabileşte fie arbitrar, fie pe baza unor reguli.

După ce s-a stabilit sensul de referinţă al uneia dintre mărimile scalare precizate mai sus, se face calculul acestei mărimi, obţinîndu-se o valoare pozitivă sau negativă în raport cu sensul de referinţă ales.

Se numeşte *sens efectiv*, acel sens de referinţă pentru care mărimea fizică respectivă rezultă pozitivă. Tensiunea electromotoare U_e rezultă pozitivă cînd sensul de referinţă, adică sensul elementului de integrare $d\bar{l}$ prin interiorul sursei este orientat de la borna negativă spre cea pozitivă. Curentul electric i rezultă pozitiv cînd vectorul elementului de suprafaţă $d\bar{s}$ este în acelaşi sens cu $\bar{J}$ sau, în general, cînd unghiul dintre cei doi vectori este mai mic decît 90°. Sensul de referinţă al tensiunii la borne se indică în schemă printr-o săgeată desenată între borne.

Există două convenţii (reguli) privind asocierea sensurilor de referinţă ale tensiunii la bornele unei laturi de reţea şi a curentului ce trece prin ea. Pentru laturi de reţea *receptoare*, săgeţile care indică sensurile pozitive ale tensiunii la borne şi ale curentului pleacă, respectiv intră, în aceeaşi bornă (fig. 3-3, *b*). Pentru laturi de reţea *generatoare*, cele două sensuri de referinţă sînt opuse în raport cu aceeaşi bornă (fig. 3-3, *a*).

Dacă nu se poate preciza de la început caracterul de receptor sau de generator al unei laturi de reţea, sensurile pozitive (de referinţă) pentru tensiunea la borne şi pentru curent se aleg arbitrare, fie ca la receptor, fie ca la generator. După efectuarea calculelor rezultă sensurile efective ale acestor mărimi, respectiv se poate preciza dacă latura de reţea are sau nu caracterul de receptor sau de generator adoptat iniţial.

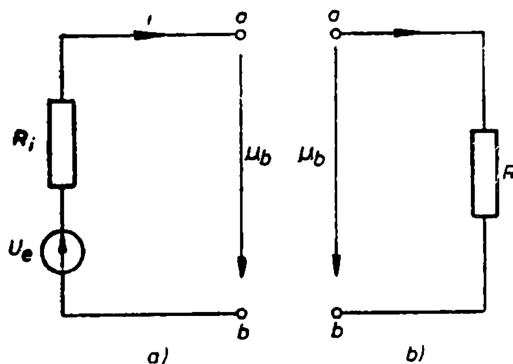


Fig. 3-3. Laturi de reţea:
a — generatoare; *b* — receptoare.

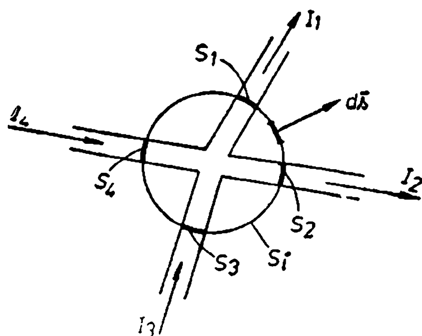


Fig. 3-4. Nod de reţea.

3.2. TEOREMELE LUI KIRCHHOFF

Teoremele lui Kirchhoff se referă la circuite și rețele electrice în regim staționar și cvazistaționar.

3.2.1. TEOREMA I A LUI KIRCHHOFF

Prima teoremă a lui Kirchhoff se referă la curenții din laturile de rețea ce concură într-un nod. Fie nodul de rețea reprezentat în fig. 3-4 în care concură patru laturi, prin care circulă curenții cu intensitățile I_1, I_2, I_3 și I_4, cu sensurile de referință indicate prin săgeți. Pentru stabilirea teoremei a I-a a lui Kirchhoff se consideră o suprafață închisă S_t în jurul nodului pentru care se aplică legea conservării sarcinilor electrice libere. În regim electrocinetic staționar această lege se exprimă prin relația:

$$\int_{S_t} \bar{J}\, d\bar{s} = 0. \tag{3-1}$$

Integrala de suprafață a densității de curent este diferită de zero numai în porțiunile de suprafață S_1, S_2, S_3 și S_4 ce intersectează conductoarele, unde $\bar{J} \neq 0$. Ținînd seama și de faptul că $d\bar{s}$ este orientat spre exteriorul suprafeței închise și că $\bar{J}$ are sensul de referință indicat prin săgeți (sensul curentului), din relația (3-1) se obține:

$$\int_{S_t} \bar{J}\, d\bar{s} = \int_{S_1} \bar{J}_1\, d\bar{s} + \int_{S_2} \bar{J}_2\, d\bar{s} + \int_{S_3} \bar{J}_3\, d\bar{s} + \int_{S_4} \bar{J}_4\, d\bar{s} = 0$$

adică:

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0. \tag{3-2}$$

În general, dacă există m laturi care concură în nod, rezultă:

$$\sum_{\nu=1}^{m} I_\nu = 0. \tag{3-3}$$

Această relație exprimă teorema I a lui Kirchhoff și se enunță astfel: *suma algebrică a curenților din laturile ce concură într-un nod de rețea este egală cu zero.* Se consideră pozitivi curenții care ies din nod și negativi curenții care intră în nod.

Se mai poate enunța teorema I a lui Kirchhoff și în modul următor: suma curenților ce ies dintr-un nod de rețea este egală cu suma curenților care intră în același nod (ex. fig. 3-4: $I_1 + I_2 = I_3 + I_4$).

Numărul de ecuații independente ce se obțin cu teorema I a lui Kirchhoff pentru o rețea cu n noduri este $n-1$.

3.2.2. TEOREMA A II-A A LUI KIRCHHOFF

Se consideră un ochi de rețea format din k laturi, de forma celui reprezentat în fig. 3-5. Teorema a II-a a lui Kirchhoff precizează că *suma algebrică a tensiunilor electromotoare ce acționează într-un ochi de rețea este egală cu suma*

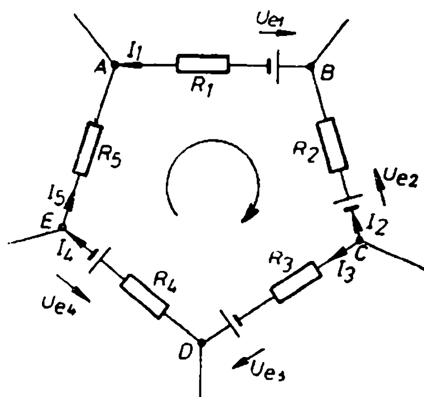


Fig. 3-5. Ochi de rețea.

algebrică a căderilor de tensiune pe rezistoarele din laturile ochiului, adică :

$$\sum_{\nu=1}^{k} U_{e\nu} = \sum_{\nu=1}^{k} R_\nu I_\nu. \qquad (3\text{-}4)$$

Pentru a însuma algebric t.e.m. și căderile de tensiune este necesar să se stabilească în prealabil un sens de referință în ochi. De exemplu, pentru ochiul de rețea reprezentat în fig. 3-5 se fixează în mod arbitrar sensul de referință indicat prin săgeată cu care rezultă următoarea exprimare pentru teorema a II-a a lui Kirchhoff :

$$U_{e1} - U_{e2} - U_{e3} - U_{e4} = -R_1 I_1 - R_2 I_2 + + R_3 I_3 + R_4 I_4 + R_5 I_5. \qquad (3\text{-}5)$$

T.e.m., respectiv căderea de tensiune, se ia cu semnul „+“ cînd sensul t.e.m., respectiv al curentului, coincide cu sensul de referință și cu semnul „—“ în caz contrar.

Numărul de ecuații independente ce se pot scrie cu teorema a II-a a lui Kirchhoff pentru o rețea cu n noduri și l laturi este egal cu numărul de ochiuri independente :

$$o = l - n + 1. \qquad (3\text{-}6)$$

3.3. GRUPAREA REZISTOARELOR ȘI SURSELOR DE CURENT CONTINUU

3.3.1. GRUPAREA REZISTOARELOR

În majoritatea cazurilor, rețelele de curent continuu conțin mai multe rezistoare legate în serie, în paralel sau mixt. Problema care se pune, este de a determina rezistența echivalentă a rezistoarelor grupate într-un anumit mod.

Considerînd cunoscut cum se deduc expresiile de calcul ale rezistenței echivalente, se prezintă numai relațiile respective, fără justificări.

La *legarea în serie* a n rezistoare avînd rezistențele R_1, R_2, ..., R_n, rezistența echivalentă este :

$$R_e = \sum_{\nu=1}^{n} R_\nu. \qquad (3\text{-}7)$$

La *legarea în paralel* a rezistoarelor se obține :

$$\frac{1}{R_e} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{R_\nu}. \qquad (3\text{-}8)$$

Dacă se leagă în paralel numai două rezistoare, rezistența echivalentă se determină cu relația :

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \qquad (3\text{-}9)$$

Rezistența echivalentă la *legarea mixtă* (în serie și în paralel) a rezistoarelor se calculează ținînd seama de relațiile de mai sus. De exemplu, rezistența echivalentă a rezistoarelor grupate mixt ca în fig. 3-6 este:

$$R_e = R_1 + R_2 + R_{34} = R_1 + R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}.$$

3.3.2. GRUPAREA SURSELOR DE CURENT CONTINUU

Pentru alimentarea receptoarelor de curent continuu, există situații cînd se folosesc mai multe surse de energie electrică grupate în serie, în paralel sau mixt, după necesități. De exemplu, la autovehicule se folosesc baterii de acumulatoare de 6 V sau 12 V, obținute prin legarea în serie a mai multor elemente de acumulatoare cu plumb de cîte 2 V fiecare etc.

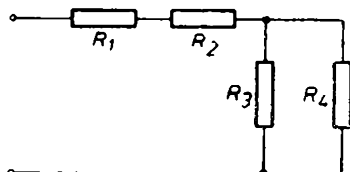


Fig. 3-6. Rezistoare grupate mixt.

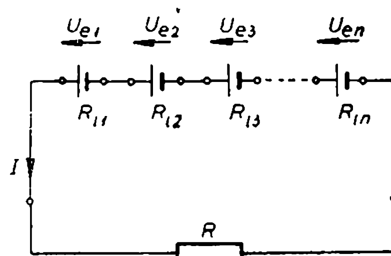


Fig. 3-7. Surse de t.e.m. legate în serie.

Legarea în serie a surselor de curent continuu se face atunci cînd este necesar să se obțină o tensiune mai mare. Aceasta se realizează legînd borna „+" a unei surse cu borna „—" a sursei următoare ș.a.m.d. (fig. 3-7). Tensiunea electromotoare totală a bateriei este:

$$U_e = \sum_{\nu=1}^{n} U_{e\nu}. \tag{3-9}$$

Dacă la bornele bateriei se conectează un receptor cu rezistența R, conform legii lui Ohm aplicată la un circuit închis, curentul prin circuit este:

$$I = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} U_{e\nu}}{R + \sum_{\nu=1}^{n} R_{i\nu}}, \tag{3-10}$$

unde $R + \sum_{\nu=1}^{n} R_{i\nu}$ este rezistența echivalentă a circuitului, $R_{i\nu}$ fiind rezistența interioară a unei surse.

În situația că cele n surse sînt identice, adică au aceeași tensiune electromotoare U_e și aceeași rezistență interioară R_i, atunci:

$$I = \frac{nU_e}{R + nR_i} = \frac{U_e}{\frac{R}{n} + R_i}. \tag{3-11}$$

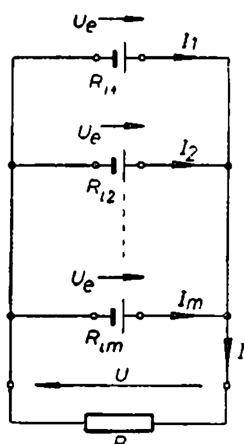


Fig. 3-8. Surse de t.e.m. legate în paralel.

Trebuie subliniat faptul că la legarea în serie, curentul prin circuit nu trebuie să depăşească curentul nominal al sursei celei mai mici. De asemenea, este evident că pot fi legate în serie şi surse cu tensiuni diferite.

Legarea în paralel a surselor de curent continuu se face unind între ele bornele „+" şi, respectiv, bornele „—" ale surselor (fig. 3-8).

Sursele legate în paralel trebuie să aibă aceeaşi tensiune electromotoare şi aceeaşi rezistenţă interioară. Dacă t.e.m. ale surselor legate în paralel nu sînt egale şi bateria este în gol, sursa cu t.e.m. mai mare se va descărca pe sursa cu t.e.m. mai mică. Cu alte cuvinte, în această situaţie apar curenţi de circulaţie între surse, chiar dacă bateria nu alimentează un receptor exterior.

Dacă t.e.m. a surselor legate în paralel sînt practic aceleaşi, dar rezistenţele interioare sînt diferite, atunci, avînd în vedere că în timpul funcţionării la bornele surselor se stabileşte aceeaşi tensiune:

$$U=U_e-R_{i1}I_1=U_e-R_{i2}I_2=\ldots=U_e-R_{im}I_m; \tag{3-12}$$

înseamnă că sursa cu rezistenţa interioară mai mare debitează un curent mai mic. Curentul prin rezistenţa R a receptorului este:

$$I=\frac{U_e}{R_e}=\frac{U_e}{R+\dfrac{1}{\sum\limits_{\nu=1}^{m}\dfrac{1}{R_{i\nu}}}}, \tag{3-13}$$

unde R_e este rezistenţa echivalentă a circuitului.

În ipoteza că $R_{i1}=R_{i2}=\ldots=R_{im}$, rezultă:

$$I=\frac{U_e}{R+\dfrac{R_i}{m}}=\frac{mU_e}{mR+R_i}. \tag{3-14}$$

Legarea în paralel a surselor se face atunci cînd curentul cerut de receptor este mai mare decît curentul nominal al unei singure surse.

Legarea mixtă a surselor de c.c. se foloseşte atunci cînd bateria respectivă trebuie să asigure atît o tensiune, cît şi un curent de valori mari. Dacă n este numărul de surse identice legate în serie şi m este numărul de surse identice legate în paralel, curentul dat de baterie prin rezistenţa R a unui receptor este:

$$I=\frac{nmU_e}{mR+nR_i}. \tag{3-15}$$

Această relaţie se deduce simplu din relaţiile (3-11) şi (3-14), obţinute pentru legarea în serie, respectiv în paralel, a surselor.

Aplicaţia 3-1. Un număr de 7 rezistoare avînd fiecare rezistenţa $R=1\ \Omega$ sînt grupate între ele ca în fig. 3-9. Să se determine:

a. Rezistenţa echivalentă.

b. Lungimea sîrmei din nichelină, cu secțiunea de 0,5 mm², necesară pentru confecționarea rezistoarelor.

Rezolvare.

a. Rezistența echivalentă este :

$$R_e=\frac{\left(\frac{\left(\frac{R^2}{2R}+R\right)2R}{\frac{R^2}{2R}+R+2R}+R\right)R}{\frac{\left(\frac{R^2}{2R}+R\right)2R}{\frac{R^2}{2R}+R+2R}+R+R}=\frac{13}{20}R.$$

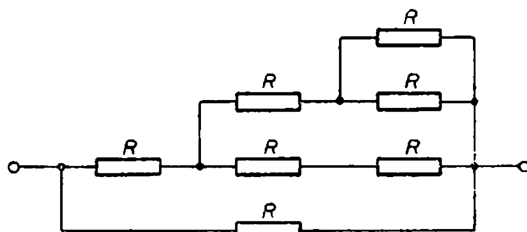


Fig. 3-9. Rețea de rezistoare.

Pentru $R=1\ \Omega$, rezultă : $R_e=0{,}65\ \Omega$.

b. Rezistivitatea pentru nichelină este $\rho=1{,}1\ \Omega\frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$. Din relația $R=\rho\frac{l}{S}$ se deduce :

$$l=\frac{RS}{\rho}=\frac{1\cdot 0{,}5}{1{,}1}=0{,}454\ \text{m}.$$

Deci, pentru cele 7 rezistoare este necesară lungimea : $L=7l=3{,}178$ m.

Aplicația 3-2. O rețea de curent continuu conține surse identice și rezistoare grupate între ele ca în fig. 3-10. Să se determine t.e.m. rezultantă U_{et} a surselor și curentul total I dat de surse. T.e.m. a unei surse este $U_e=2{,}2$ V și rezistența interioară $R_i=0{,}2\ \Omega$.

Rezolvare. Tensiunea electromotoare a bateriei este :

$$U_{et}=3U_e=6{,}6\ \text{V}.$$

Rezistența echivalentă receptorului este :

$$R=\frac{\left(5+\frac{10\cdot 10}{20}\right)10}{5+\frac{10\cdot 10}{20}+10}=6{,}66\ \Omega.$$

Curentul total dat de baterie se calculează cu relația (3-15) în care se introduce $n=3$ și $m=2$, obținîndu-se :

$$I=\frac{3\cdot 2\cdot U_e}{2R+3R_i}=\frac{3\cdot 2\cdot 2{,}2}{2\cdot 6{,}66+3\cdot 0{,}2}=0{,}941\ \text{A}.$$

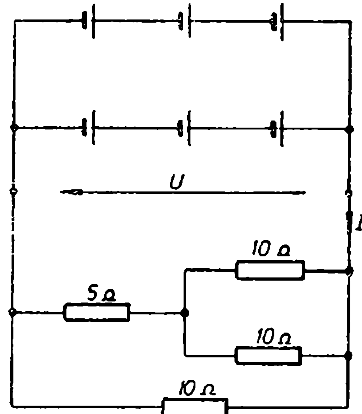


Fig. 3-10. Rețea de surse și rezistoare.

3.4. METODE DE CALCUL A REȚELELOR LINIARE DE CURENT CONTINUU

În general, prin calculul unei rețele de c.c. se înțelege determinarea curenților din laturile rețelei atunci cînd sînt cunoscute rezistențele rezistoarelor și tensiunile electromotoare ale surselor (sau tensiunile la borne) din rețeaua respectivă. Desigur, se pot pune și alte probleme, de exemplu determinarea valorii rezis-

tenței unor rezistoare, astfel ca acestea să fie parcurse de anumiți curenți sau să dezvolte, prin efect Joule-Lenz, o anumită putere.

Există mai multe metode de calcul a rețelelor liniare de c.c. dintre care, în continuare se vor prezenta numai cele mai des folosite în practică.

3.4.1. METODA TEOREMELOR LUI KIRCHHOFF

Se consideră o rețea de c.c. care are n noduri și l laturi. Numărul de ecuații independente ce se pot scrie pentru această rețea, cu ajutorul teoremelor I și a II-a a lui Kirchhoff este :

$$(n-1)+(l-n+1)=l. \quad (3\text{-}16)$$

Sistemul de ecuații obținute permite determinarea intensităților curenților din fiecare latură.

Pentru aplicarea celor două teoreme este necesar să se precizeze mai întîi sensul de referință pentru curenți și pentru ochiurile independente. Dacă, în urma calculelor, curenții din unele laturi rezultă cu valori negative, înseamnă că sensul lor efectiv este opus față de sensul de referință stabilit anterior.

Aplicația 3-3. Se consideră rețeaua complexă reprezentată în fig. 3-11 și se cere condiția ce trebuie să o satisfacă parametrii rețelei astfel ca $I_5=0$.

Rezolvare. Rețeaua considerată are $n=4$ noduri și $l=6$ laturi. Deci, aplicînd teorema I a lui Kirchhoff se scriu $4-1=3$ ecuații independente și aplicînd teorema a II-a se scriu $6-4+1=3$ ecuații independente:

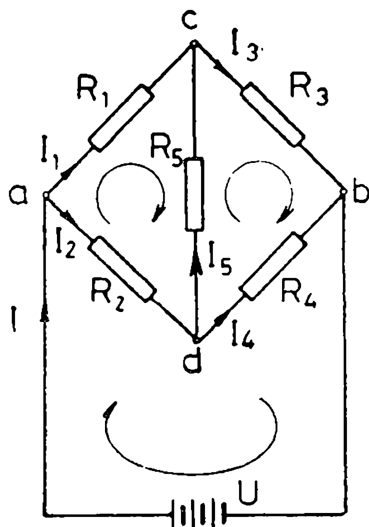


Fig. 3-11. Rețea cu schema electrică în punte.

$$I=I_1+I_2 \qquad U=I_1R_1+I_3R_3$$

$$I_2=I_4+I_5 \qquad 0=I_1R_1-I_2R_2-I_5R_5$$

$$I_1+I_5=I_3 \qquad 0=I_3R_3-I_4R_4+I_5R_5$$

Rezolvînd acest sistem de 6 ecuații cu 6 necunoscute (curenții), se obține pentru I_5 :

$$I_5=\frac{R_1R_4-R_2R_3}{R_2R_4\,(R_1+R_3)+R_1R_3\,(R_2+R_4)+R_5\,(R_1+R_3)\,(R_2+R_4)}.$$

Condiția ca $I_5=0$ este satisfăcută dacă :

$$R_1R_4-R_2R_3=0$$

sau

$$R_3=\frac{R_1}{R_2}R_4. \quad (3\text{-}17)$$

$I_5=0$ înseamnă că nodurile c și d se găsesc la același potențial, deci :

$$I_1R_1=I_2R_2\,;\; I_3R_3=I_4R_4\,;\; I_1=I_3\,;\; I_2=I_4. \quad (3\text{-}18)$$

Schema electrică din fig. 3-11 are aplicații la puntea industrială (Wheatstone) folosită pentru măsurarea rezistențelor electrice.

3.4.2. METODA SUPERPOZIȚIEI

Această metodă poate simplifica calculul rețelelor complexe în care există mai multe surse de energie electrică. Metoda se bazează pe principiul suprapunerii efectelor aplicabil la rețelele liniare.

Pentru exemplificare, se consideră rețeaua electrică a cărei schemă este reprezentată în fig. 3-12, *a*. Curentul într-o latură oarecare a rețelei poate fi considerat ca suma algebrică a curenților produși în acea latură de fiecare sursă în parte. Deci, se consideră mai întîi că în rețea acționează numai sursa cu t.e.m. U_{e1} iar t.e.m. a celei de-a doua surse se consideră egală cu zero, reținîndu-se numai rezistența interioară R_{i2} a acesteia (fig. 3-12, *b*). Apoi, se consideră că în rețea acționează numai a doua sursă, de la prima sursă reținîndu-se numai rezistența sa interioară R_{i1} (fig. 3-12, *c*). În mod analog se procedează și dacă rețeaua conține trei sau mai multe surse.

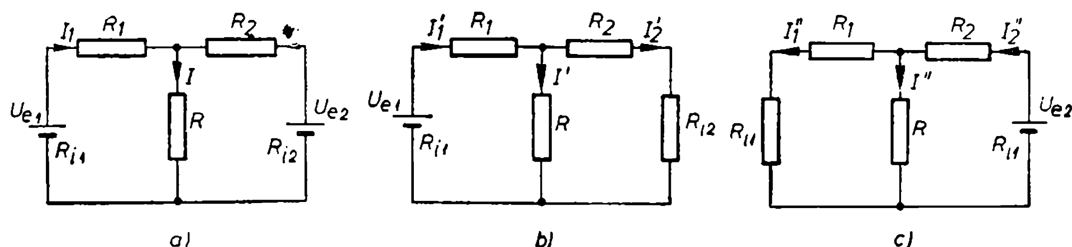


Fig. 3.12. Schemă explicativă la metoda superpoziției :
a — rețeaua dată; *b*, *c* — rețeaua cu cîte o singură sursă.

Rezolvînd circuitele din fig. 3-12, *b* și fig. 3-12, *c* se obțin valorile curenților notați cu „prim", respectiv cu „secund". Apoi, se suprapun rezultatele și se obțin curenții reali din laturi, adică :

$$I_1=I_1'-I_1'' ; \; I_2=-I_2'+I_2'' ; \; I=I'+I''. \tag{3-19}$$

3.4.3. METODA TRANSFIGURĂRII

Există situații cînd o rețea de c.c. conține rezistoare în conectare poligonală sau în conectare stelată. În astfel de cazuri, pentru calculul rețelei trebuie să se facă transfigurarea poligonului în stea sau a stelei în poligon. Transfigurarea poligonului în stea este univocă, oricare ar fi numărul de laturi ale rețelei poligonale, pe cînd transfigurarea stelei în poligon este univocă numai pentru numărul de laturi egal cu trei.

Metoda transfigurării este aplicabilă atît la rețelele pasive, cît și la rețelele active (ce conțin în laturi surse de tensiune electromotoare).

Se consideră în fig. 3-13, *a* rezistoarele R_{12}, R_{23} și R_{31} conectate în triunghi. Transfigurînd conexiunea triunghi în conexiune stea, se obține schema din

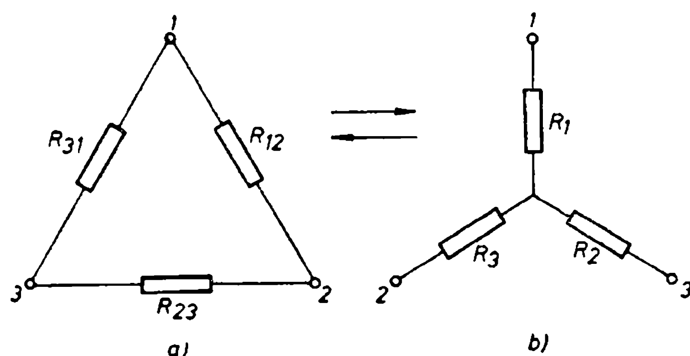


Fig. 3-13. Transfigurarea triunghi-stea.

fig. 3-13, *b* în care rezistențele R_1, R_2 și R_3 trebuie determinate în funcție de R_{12}, R_{23}, R_{31}. Pentru aceasta, se pune condiția ca rezistențele echivalente dintre punctele *1—2*, *2—3* și *3—1* să fie aceleași pentru cele două conexiuni, adică :

$$R_1+R_2=\frac{R_{12}(R_{23}+R_{31})}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}$$

$$R_2+R_3=\frac{R_{23}(R_{31}+R_{12})}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \qquad (3\text{-}20)$$

$$R_3+R_1=\frac{R_{31}(R_{12}+R_{23})}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}$$

de unde rezultă :

$$R_1R_{23}=R_2R_{31}=R_3R_{12}=\frac{R_{12}R_{23}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}=R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1. \qquad (3\text{-}21)$$

Din aceste relații se calculează R_1, R_2, R_3. Aceleași relații se folosesc și dacă se face transfigurarea stelei în triunghi, în care caz se determină R_{12}, R_{23}, R_{31} în funcție de R_1, R_2, R_3.

Aplicația 3-4. Să se determine curenții din laturile rețelei a cărei schemă este reprezentată în fig. 3-14, pentru următoarele valori ale parametrilor : $U_{ab}=24$ V, $R_1=1$ Ω, $R_2=5$ Ω

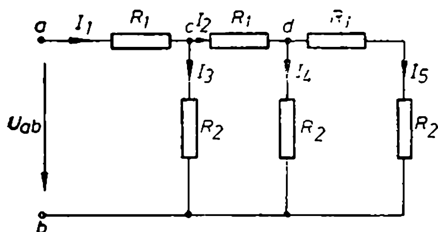


Fig. 3-14. Rețea cu rezistoare legate în triunghi.

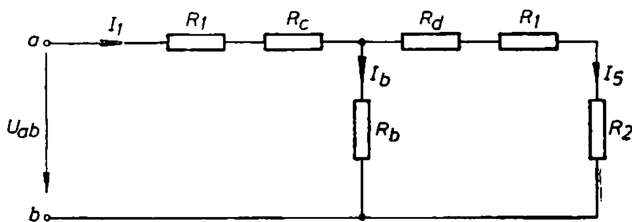


Fig. 3-15. Rețeaua obținută prin transfigurare.

Rezolvare. Este necesar ca triunghiul *bcd* să fie transfigurat în stea, obținîndu-se schema din fig. 3-15, în care, conform relațiilor (3-21), avem :

$$R_b=\frac{R_2R_2}{R_2+R_1+R_2}=2{,}27\ \Omega,$$

$$R_c=\frac{R_1R_2}{R_2+R_1+R_2}=0{,}45\ \Omega,$$

$$R_d=\frac{R_1R_2}{R_2+R_1+R_2}=0{,}45\ \Omega.$$

După transfigurare, rezistența echivalentă a circuitului este :

$$R_e=R_1+R_c+\frac{R_b\,(R_d+R_1+R_2)}{R_b+R_d+R_1+R_2}=3{,}25\ \Omega,$$

cu care rezultă

$$I_1=\frac{U_{ab}}{R_e}=\frac{24}{3{,}25}=7{,}38\ \text{A}.$$

Cunoscînd curentul I_1, se calculează curentul I_3 cu relația :

$$I_3=\frac{U_{ab}-I_1R_1}{R_2}=\frac{24-7{,}38}{5}=3{,}32\ \text{A}.$$

Cu teorema a I-a a lui Kirchhoff rezultă :

$$I_2=I_1-I_3=7{,}38-3{,}32=4{,}06\ \text{A}.$$

Curentul I_4 rezultă din :

$$I_4=\frac{U_{ab}-I_1R_1-I_2R_1}{R_2}=2{,}51\ \text{A},$$

cu care se determină I_5 :

$$I_5=I_2-I_4=4{,}06-2{,}51=1{,}55\ \text{A}.$$

3.4.4. METODA CURENȚILOR CICLICI (OCHIURILOR INDEPENDENTE)

Această metodă permite determinarea curenților din rețelele complexe cu ajutorul unui număr mai redus de ecuații decît prin aplicarea celor două teoreme a lui Kirchhoff. Rețeaua complexă se consideră ca o suprapunere de ochiuri (circuite) independente, fiecare din aceste ochiuri fiind străbătut de un curent propriu (curent ciclic). Numărul de ochiuri independente în care se descompune rețeaua este $o=l-n+1$, l fiind numărul laturilor, iar n numărul de noduri.

Printr-o latură care este comună la două ochiuri independente circulă doi curenți ciclici, unul aparținînd unuia dintre ochiuri, iar al doilea aparținînd celuilalt ochi. În aceste condiții, curenții reali sînt dați de suma algebrică a celor doi curenți ciclici din laturile respective.

Curenții ciclici se obțin prin rezolvarea sistemului de ecuații scris prin aplicarea teoremei a II-a a lui Kirchhoff pentru fiecare ochi independent, după ce în prealabil s-a fixat cîte un sens pozitiv, de referință, în fiecare din aceste ochiuri (care este și sensul curentului ciclic).

Aplicația 3-5. Se consideră rețeaua a cărei schemă este reprezentată în fig. 3-16 și se cere să se calculeze curenții din laturi folosind metoda ochiurilor independente.

Rezolvare. Rețeaua are 4 noduri și 6 laturi, deci se vor obține $6-4+1=3$ ochiuri independente pentru care, aplicînd teorema a II-a a lui Kirchhoff, se obțin ecuațiile :

$$-U_e-U_{e1}=(R_1+R_3)\,i_1-R_3i_3$$

$$-U_e+U_{e2}=(R_2+R_4)\,i_2+R_4i_3$$

$$0=(R_3+R_4+R_5)\,i_3-R_3i_1+R_4i_2$$

unde i_1, i_2 și i_3 sînt curenți ciclici.

La scrierea acestor ecuații s-a ținut seama că rezistența R_3 este parcursă atît de i_1 într-un sens, cît și de i_3 în sens opus și, la fel, rezistența R_4 este parcursă de curenții i_2 și i_3 în același sens.

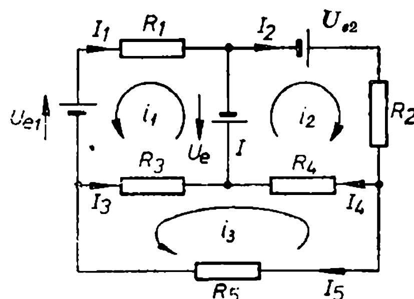


Fig. 3-16. Rețea electrică de c.c.

Rezolvînd sistemul de ecuații, se obțin valorile curenților ciclici i_1, i_2 și i_3. Curenții reali din laturi sînt:

$$I=i_1+i_2\ ;\ I_1=-i_1\ ;\ I_2=i_2$$

$$I_3=i_1-i_3\ ;\ I_4=i_2+i_3\ ;\ I_5=-i_3.$$

Dacă pentru un curent rezultă din calcule valoare negativă, înseamnă că sensul lui este opus față de cel adoptat în schemă.

În formă generală și restrînsă, sistemul de ecuații obținut prin aplicarea teoremei a II-a a lui Kirchhoff pentru fiecare ochi independent, din care se determină curenții ciclici, se poate scrie astfel:

$$U_{e\nu}=\sum_{\lambda}R_{\lambda\nu}i_{\lambda}\ (\nu=1,\ 2,\ \dots,\ o) \tag{3-22}$$

unde $U_{e\nu}$ este t.e.m. rezultantă din ochiul de rețea ν, $R_{\lambda\nu}$ pentru $\lambda=\nu$ este rezistența electrică totală a ochiului ν (mărime pozitivă) și $R_{\lambda\nu}$ pentru $\nu\neq\lambda$ este rezistența electrică de transfer de la ochiul ν la ochiul λ, care este pozitivă dacă i_{λ} este în același sens cu i_{ν} și negativă dacă i_{λ} este de sens opus față de i_{ν}.

Aplicația 3-6. Să se determine curenții din laturile rețelei a cărei schemă este reprezentată în fig. 3-17, pentru următoarele valori ale parametrilor: $R_{12}=4\ \Omega$, $R_{23}=R_{31}=5\ \Omega$, $U_e=10$ V, $R_i=1\ \Omega$.

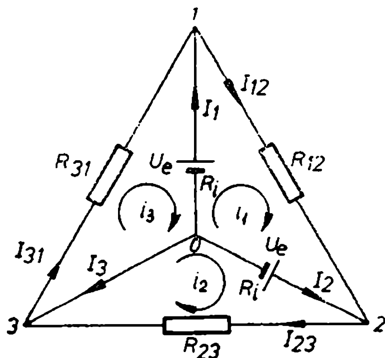


Fig. 3-17. Rețea electrică de c.c.

Rezolvare. Se aplică metoda curenților ciclici. Numărul de ochiuri independente ale rețelei este: $o=l-n+1=6-4+1=3$. Deci, vor exista trei curenți ciclici i_1, i_2 și i_3, cu sensurile din figură, pentru care, cu ajutorul teoremei a II-a a lui Kirchhoff, se scriu ecuațiile:

$$U_e-U_e=0=(R_{12}+2R_i)\,i_1-R_ii_2-R_ii_3$$

$$U_e=-R_ii_1+(R_{23}+R_i)\,i_2$$

$$-U_e=-R_ii_1+(R_{31}+R_i)\,i_3$$

Înlocuind valorile numerice, se obține sistemul de ecuații:

$$6i_1-i_2-i_3=0$$

$$-i_1+6i_2+0i_3=10$$

$$-i_1+0i_2+6i_3=-10$$

care are soluțiile: $i_1=0$, $i_2=1{,}66$ A, $i_3=-1{,}66$ A.

Curenții din laturile rețelei sînt:

$$I_{12}=i_1=0\ ;\ I_{23}=i_2=1{,}66\ \text{A}\ ;\ I_{31}=i_3=-1{,}66\ \text{A}.$$

$$I_1=i_1-i_3=1{,}66\ \text{A}\ ;\ I_2=-i_1+i_2=1{,}66\ \text{A}\ ;\ I_3=-i_2+i_3=-3{,}22\ \text{A}.$$

3.4.5. METODA POTENȚIALELOR NODURILOR

Cunoscînd potențialul nodurilor unei rețele, respectiv diferența de potențial electric între noduri, cu ajutorul legii conducției electrice se pot determina curenții din laturile rețelei. Deci, metoda potențialelor nodurilor constă în calculul acestor potențiale și apoi a curenților din laturi.

Sistemul de ecuaţii cu care se determină potenţialele nodurilor se obţine prin aplicarea teoremei I a lui Kirchhoff, curenţii din laturile concurente într-un nod fiind exprimaţi în funcţie de potenţiale şi de ceilalţi parametri ai elementelor conţinute de laturi. Se pot scrie $n-1$ ecuaţii independente, ceea ce înseamnă că pentru potenţialul unui nod trebuie să se admită o valoare arbitrară, de exemplu valoarea zero (potenţialul electric al pămîntului). Forma generală a sistemului de ecuaţii din care se determină potenţialele nodurilor este :

$$\sum_{\substack{\lambda \\ \nu\neq\lambda}} (V_\nu - V_\lambda) G_{\nu\lambda} + U_{e\nu\lambda} G_{\nu\lambda} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{3-23}$$

unde $G_{\nu\lambda}$ şi $U_{e\nu\lambda}$ sînt conductanţa, respectiv t.e.m. din latura cuprinsă între nodul ν şi nodul λ.

Din (3-23) rezultă :

$$V_\nu \sum_\lambda G_{\nu\lambda} - \sum_\lambda V_\lambda G_{\nu\lambda} + \sum_\lambda U_{e\nu\lambda} G_{\nu\lambda} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1 ; \nu\neq\lambda). \tag{3-24}$$

Curenţii din laturile reţelei se determină cu relaţia :

$$I_{\nu\lambda} = (V_\nu - V_\lambda + U_{e\nu\lambda}) G_{\nu\lambda} \quad (\nu\neq\lambda) \tag{3-25}$$

Aplicaţia 3-7. Folosind metoda potenţialelor nodurilor, să se determine curenţii din laturile reţelei reprezentate în fig. 3-18.

Rezolvare. Sistemul de ecuaţii din care se determină potenţialele celor $n-1=3$ noduri se obţine din (3-24) în forma :

$$V_1 (G_{12}+G_{13}+G_{14}) - V_2 G_{12} - V_3 G_{13} + U_{e12} G_{12} + U_{e13} G_{13} + U_{e14} G_{14} = 0$$

$$V_2 (G_{21}+G_{23}+G_{24}) - V_1 G_{21} - V_3 G_{23} + U_{e21} G_{21} + U_{e23} G_{23} + U_{e24} G_{24} = 0$$

$$V_3 (G_{31}+G_{32}+G_{34}) - V_1 G_{31} - V_2 G_{32} + U_{e31} G_{31} + U_{e32} G_{32} + U_{e34} G_{34} = 0,$$

unde se ţine seama că $\frac{1}{R_{\nu\lambda}} = G_{\nu\lambda}$, $G_{\nu\lambda} = G_{\lambda\nu}$ şi $U_{e\nu\lambda} = -U_{e\lambda\nu}$. S-a considerat $V_4=0$. De asemenea, se observă din schemă că $U_{e23} = U_{e34} = 0$

După ce s-au determinat potenţialele nodurilor, se calculează curenţii din laturi cu relaţiile (3-25), adică :

$$I_{12} = (V_1 - V_2 + U_{e12}) G_{12},$$

$$I_{13} = (V_1 - V_2 + U_{e13}) G_{13},$$

$$I_{14} = (V_1 + U_{e14}) G_{14},$$

$$I_{23} = (V_2 - V_3) G_{23},$$

$$I_{24} = (V_2 + U_{e24}) G_{24},$$

$$I_{34} = V_3 G_{34}.$$

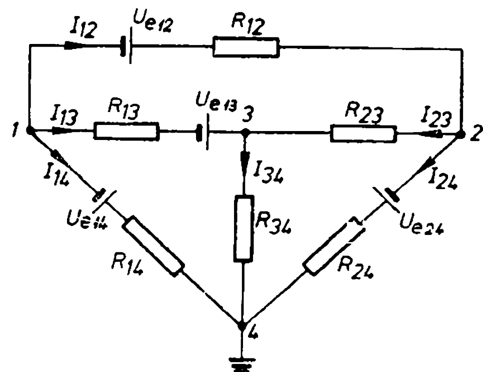


Fig. 3-18. Reţea electrică de c.c.

În afară de metodele de calcul a reţelelor de c.c. prezentate mai sus, mai există şi altele, printre care şi metoda generatorului echivalent, despre care se va discuta la reţelele de c.a.

3.5. CALCULUL ELECTRIC AL UNEI LINII DE CURENT CONTINUU

Pentru alimentarea cu energie electrică a unor consumatori de curent continuu se folosesc liniile de transport de curent continuu prin care se face legătura dintre sursă şi consumatori.

Calculul electric al acestor linii se referă la determinarea secţiunii conductoarelor liniei astfel încît căderea de tensiune pe linie, respectiv pierderile de putere prin efect Joule-Lenz, să se încadreze în limitele stabilite de norme.

Datele pentru calcul sînt :

— puterea consumatorilor ;

— materialul conductoarelor (cupru, aluminiu) ;

— aşezarea topografică a sursei şi a consumatorilor (lungimea liniei) ;

— tensiunea nominală la consumatori.

În general, linia constă din tronsoane, avînd secţiuni diferite de la o porţiune la alta.

Pentru exemplificare, se consideră linia cu schema monofilară din fig. 3-19, unde s-a notat cu A sursa de energie electrică avînd tensiunea U_0 (la începutul

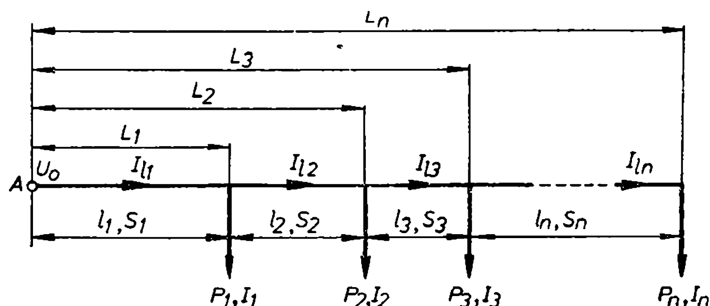


Fig. 3-19. Schema monofilară a liniei de c.c.

liniei), P_1, P_2, P_3, ..., P_n sînt puterile consumatorilor, l_1, l_2, l_3, ..., l_n şi S_1, S_2, S_3, ..., S_n sînt lungimile, respectiv secţiunile pe diferite tronsoane ale liniei, iar L_1, L_2, L_3, ..., L_n sînt distanţele de la sursă la consumatori.

Cunoscînd puterile şi tensiunea nominală U_N considerată aceeaşi pentru toţi consumatorii, se calculează curenţii la consumatori :

$$I_1=\frac{P_1}{U_N},\quad I_2=\frac{P_2}{U_N},\quad \ldots,\quad I_n=\frac{P_n}{U_N}. \tag{3-26}$$

Curenţii pe tronsoanele liniei sînt :

$$\begin{aligned} I_{l_1}&=I_1+I_2+I_3+\ldots+I_n,\\ I_{l_2}&=I_2+I_3+\ldots+I_n,\\ &\ldots\\ I_{ln}&=I_n. \end{aligned} \tag{3-27}$$

Determinarea secţiunii conductoarelor se poate face fie pe bază de încălzire, adică, în funcţie de valoarea curentului, se alege din tabelă secţiunea potrivită, fie pe baza căderii de tensiune astfel ca, de la sursă pînă la consumatorul

cel mai îndepărtat, căderea de tensiune să nu depăşească limita admisă. Dacă se face calculul pe bază de încălzire, se verifică căderea de tensiune şi invers, dacă se face calculul pe baza căderii de tensiune se verifică secţiunea rezultată la încălzire.

Limitarea încălzirii conductoarelor liniei înseamnă în acelaşi timp limitarea pierderilor de putere pe linie.

Căderea de tensiune pe linie, de la sursă pînă la consumatorul k, este :

$$\Delta U_k = 2 \sum_{\nu=1}^{k} R_\nu I_{l\nu}, \tag{3-28}$$

unde

$$R_\nu = \rho \frac{l_\nu}{S_\nu}. \tag{3-29}$$

Tensiunea la consumatorul k este :

$$U_k = U_0 - \Delta U_k. \tag{3-30}$$

Notînd cu $u_a\%$ căderea de tensiune admisibilă, în procente, este necesar ca :

$$\frac{\Delta U_k}{U_N} 100 \leqslant u_a\%. \tag{3-31}$$

Dacă secţiunea conductoarelor liniei este aceeaşi pe toate tronsoanele sale, relaţia (3-28) devine :

$$\Delta U_k = \frac{2\rho}{S} \sum_{\nu=1}^{k} l_\nu I_{l\nu} = \frac{2\rho}{S} \sum_{\nu=1}^{k} L_\nu I_\nu, \tag{3-32}$$

unde s-a ţinut seama de relaţiile (3-27).

Pierderea de putere prin efect Joule-Lenz pe linie este :

$$\Delta P = 2 \sum_{\nu=1}^{n} R_\nu I_{l\nu}^2 \tag{3-33}$$

sau, în cazul cînd secţiunea conductoarelor este aceeaşi :

$$\Delta P = \frac{2\rho}{S} \sum_{\nu=1}^{n} l_\nu I_{l\nu}^2. \tag{3-34}$$

Aceste pierderi de putere nu trebuie să depăşească o limită admisibilă, stabilită prin norme, adică :

$$\frac{\Delta P}{P} 100 \leqslant p_a\%. \tag{3-34}$$

Randamentul liniei de transport se calculează cu relaţia :

$$\eta = \frac{P}{P + \Delta P}, \tag{3-35}$$

unde $P = \sum_{\nu=1}^{n} P_\nu$ este puterea totală a consumatorilor.

Cu relaţiile de mai sus se face calculul electric al liniei de c.c., adică se determină secţiunea conductoarelor.

La proiectarea unei linii de transport de energie electrică trebuie făcut şi un calcul mecanic. Conductoarele liniei trebuie să aibă o astfel de secţiune încît să reziste la solicitările mecanice ce intervin în condiţii grele de exploatare (temperatură scăzută, chiciură, vînt).

3.6. CIRCUITE DE CURENT CONTINUU CU ELEMENTE NELINIARE

3.6.1. CONSIDERAŢIUNI GENERALE. CARACTERISTICI

Un circuit electric este liniar atunci cînd parametrii săi (rezistenţa, capacitatea, inductanţa etc.) sînt mărimi independente de tensiune sau de curent. Dacă aceşti parametri depind de tensiune sau de curent, circuitul este neliniar. Este suficient ca un singur element de circuit să fie neliniar pentru a conferi circuitului caracterul neliniar. În timp ce caracteristica volt-amper a unui element liniar este o dreaptă (fig. 3-20, *a*) caracteristica volt-amper a unui element neliniar este o curbă (fig. 3-20, *b*).

Elementele neliniare simetrice se caracterizează prin aceea că au aceeaşi comportare, adică aceeaşi caracteristică volt-amper pentru ambele sensuri ale curen-

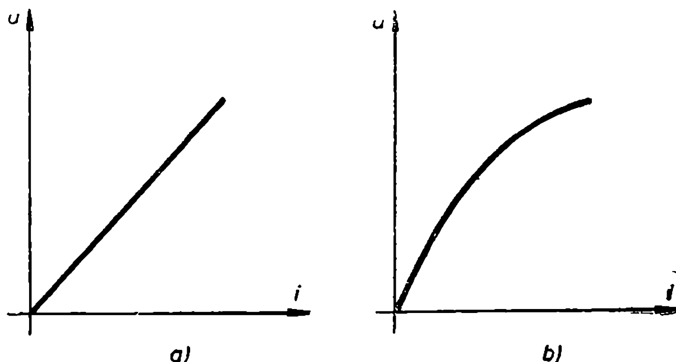


Fig. 3-20. Caracteristica volt-amper liniară *(a)* şi neliniară *(b)*.

tului prin element (exemplu, rezistoarele, a căror rezistenţă variază în funcţie de temperatură, adică de curentul ce trece prin rezistor).

Elementele neliniare nesimetrice au o comportare diferită pentru cele două sensuri ale curentului prin element (exemplu, elementele redresoare etc.).

Circuitele neliniare de c.c. conţin rezistoare neliniare, a căror rezistenţă depinde de curent sau de tensiune. Cîteva exemple de elemente rezistive neliniare sînt expuse în continuare.

Lămpile cu incandescenţă. Rezistenţa electrică a filamentului depinde de temperatură, care, la rîndul său, depinde de curentul prin filament (efectul

Joule-Lenz). În fig. 3-21 sînt reprezentate caracteristica volt-amper a unei lămpi cu filament metalic, cu coeficient de temperatură pozitivă (curba *1*), și caracteristica volt-amper a unei lămpi cu filament de cărbune, cu coeficient de temperatură negativ (curba *2*).

Lămpile cu incandescentă au o inerție termică relativ mare, ceea ce face ca la alimentarea lor cu un curent alternativ (50 Hz), rezistența filamentului să nu se modifice în decursul unei perioade. Această rezistență se modifică numai dacă se schimbă valoarea efectivă a curentului.

Se numesc elemente *neliniare cu inerție* acele elemente a căror caracteristică este liniară pentru valorile momentane ale curentului și tensiunii și este neli-

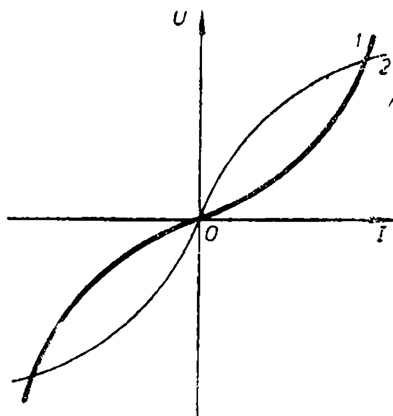


Fig. 3.21. Caracteristica volt-amper a filamentului metalic (*1*) și de cărbune (*2*).

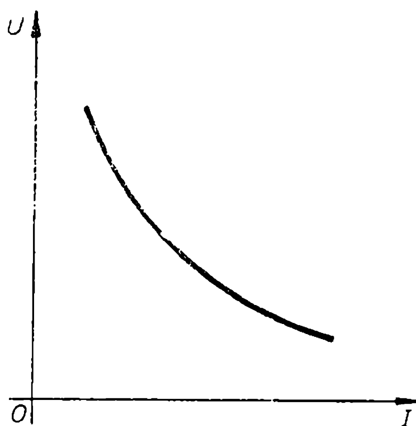


Fig. 3-22. Caracteristica arcului electric în c.c.

niară pentru valorile efective ale acestor mărimi, așa cum este cazul lămpilor cu incandescență. Dacă caracteristica este neliniară atît pentru valorile momentane, cît și pentru valorile efective ale tensiunii și curentului, elementele respective sînt *neliniare fără inerție*, așa cum este cazul bobinelor cu miez feromagnetic saturat.

Arcul electric este un alt exemplu de element de circuit cu caracteristică neliniară.

În c.c. caracteristica $U=\mathrm{f}\,(I)$ a arcului electric are forma reprezentată în fig. 3-22. Odată cu creșterea curentului tensiunea (căderea de tensiune) pe arc se micșorează datorită ionizării mai puternice a spațiului ocupat de arc, ceea ce conduce la creșterea conductibilității arcului.

În curent alternativ valoarea efectivă a tensiunii pe arcul electric scade odată cu creșterea valorii efective a curentului prin arc, adică caracteristica $U=\mathrm{f}\,(I)$ are aceeași formă ca cea reprezentată în fig. 3-22 pentru arcul electric în curent continuu. Trebuie făcută însă deosebire între caracteristica statică și caracteristica dinamică a arcului electric. *Caracteristica statică* se obține la variații lente ale tensiunii și curentului, avînd forma celei reprezentate în fig. 3-22. La variații rapide ale curentului se constată că tensiunea u dintre electrozi este mai mare la creșterea curentului decît la micșorarea acestuia, deoarece, la creșterea curentului, procesul se desfășoară plecînd de la o stare mai puțin ionizată și de la o temperatură mai mică. Ca urmare, *caracteristica în regim dinamic* are

altă formă decît cea statică și depinde de frecvența curentului alternativ (fig. 3-23).

Descărcătoarele electrice folosite în tehnica tensiunilor înalte pentru protecția instalațiilor de transport de energie împotriva supratensiunilor atmosferice sînt de asemenea elemente rezistive neliniare. Acestea sînt executate din tirit, un material ceramic a cărui rezistență scade brusc odată cu atingerea unei anumite valori a tensiunii. În fig. 3-24 este reprezentată schema descărcătorului electric, iar în fig. 3-25 caracteristica $u = f(i)$ a elementului neliniar cu tirit.

La tensiunea nominală, spațiul disruptiv dintre coarnele *a* și *b* ale descărcătorului nu este străpuns și prin descărcător nu trece practic nici un curent.

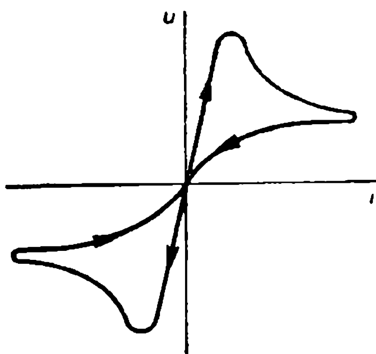


Fig. 3-23. Caracteristica arcului electric în c.a.

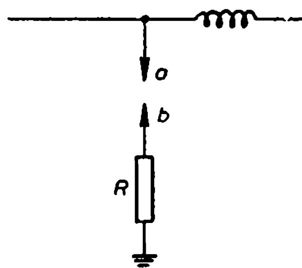


Fig. 3-24. Descărcătorul electric.

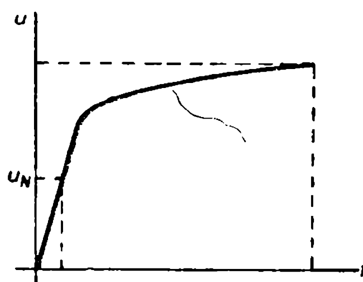


Fig. 3-25. Caracteristica $u = f(i)$ a rezistorului cu tirit.

La creșterea tensiunii liniei peste valoarea nominală, spațiul disruptiv este străpuns și prin coloana cu rezistența *R* din tirit trece un curent mare, deoarece cu creșterea tensiunii rezistența acestui element scade foarte mult. Ca urmare, sarcinile electrice din conductorul liniei de transport se scurg la pămînt și tensiunea sa scade. Odată cu micșorarea tensiunii crește rezistența descărcătorului, se micșorează curentul de scurgere la pămînt și descărcarea electrică din spațiul disruptiv încetează.

Celulele redresoare (ventile electrice), folosite pe scară largă în tehnica modernă, sînt elemente neliniare, nesimetrice, realizate cu seleniu, siliciu, germaniu etc. Caracteristica $i = f(u)$ a acestor elemente are forma reprezentată în fig. 3-26. Rezistența electrică pentru sensul direct al curentului prin element este foarte mică, iar pentru sensul invers este foarte mare. Teoretic, se poate spune că ventilele electrice permit trecerea curentului într-un singur sens (sensul direct). Datorită acestei proprietăți, ventilele electrice sînt folosite pentru redresarea curentului alternativ.

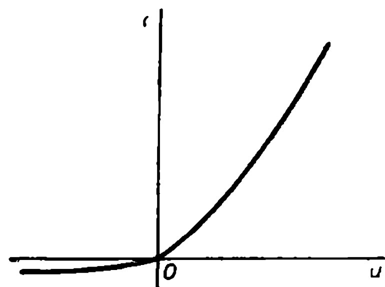


Fig. 3-26. Caracteristica ventilului electric.

În fig. 3-27 este reprezentată schema de redresare a unei singure alternanțe, iar în fig. 3-28 sînt reprezentate schemele cu punct median și

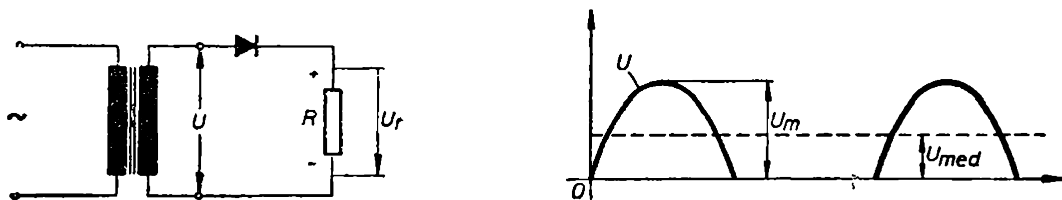


Fig. 3-27. Schema de redresare monofazată a unei singure alternanțe.

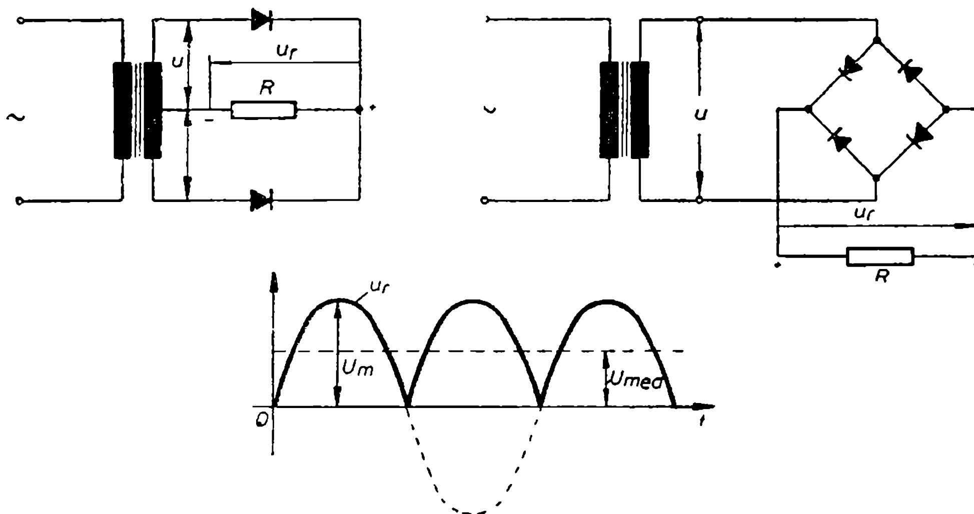


Fig. 3-28. Scheme de redresare monofazată a ambelor alternanțe.

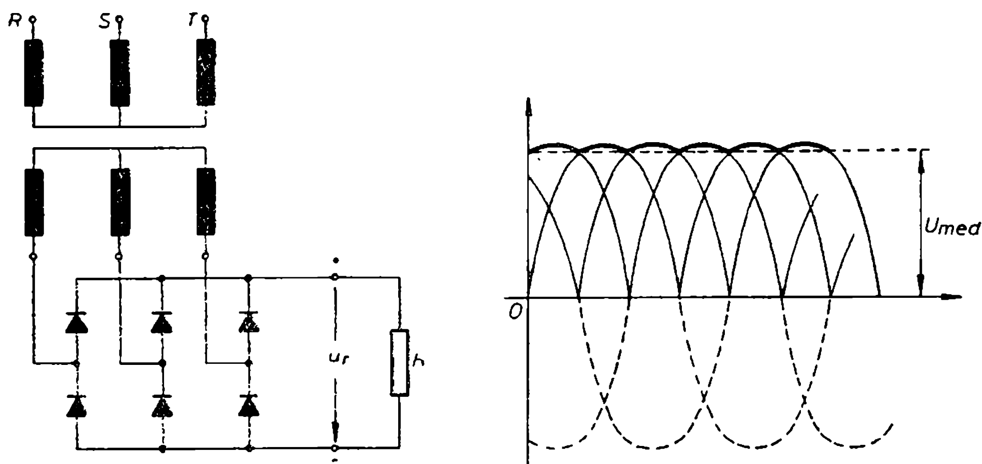


Fig. 3-29. Schema de redresare trifazată în punte.

în punte de redresare a ambelor alternanțe a curentului alternativ monofazat. În fig. 3-29 este reprezentată schema de redresare în punte a curentului alternativ trifazat. S-a notat cu U_{med} valoarea medie a tensiunii redresate u_r și cu U_m amplitudinea tensiunii alternative u.

Se observă că tensiunea redresată u_r nu este perfect continuă, ci pulsează. În cursul unei perioade T de variație a curentului alternativ, tensiunea pulsează

de m ori, unde valoarea lui m depinde de schema de redresare folosită. Valoarea medie a tensiunii redresate se calculează pe baza fig. 3-30 în modul următor:

$$u = U_m \cos \omega t = U_m \cos \alpha \quad (\alpha = \omega t)$$

$$U_{med} = \frac{1}{T_r} \int_{-\frac{T_r}{2}}^{\frac{T_r}{2}} u_r \, dt = \frac{m}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{m}}^{\frac{\pi}{m}} U_m \cos \alpha \, d\alpha = \frac{m}{\pi} U_m \sin \frac{\pi}{m},$$

unde s-a ţinut seama că perioada pulsaţiilor tensiunii redresate este $T_r = \frac{2\pi}{m\omega}$ şi că în acest interval $u_r = u$. Dînd lui m valorile 1, 2, 6 (vezi fig. 3-27 ... 3-29), rezultă:

$$m = 1; \; U_{med} = 0{,}318 \, U_m$$

$$m = 2; \; U_{med} = 0{,}638 \, U_m$$

$$m = 6; \; U_{med} = 0{,}955 \, U_m.$$

Deci, la aceeaşi valoare maximă a tensiunii alternative, tensiunea redresată obţine o valoare medie mai mare şi amplitudini mai mici ale pulsaţiilor pentru valori mari a lui m.

Pentru netezirea pulsaţiilor tensiunii redresate se folosesc filtrele electrice.

Tuburile cu descărcare în gaze (fluorescente), tuburile electronice şi ionice sînt de asemenea elemente neliniare. La tuburile electronice şi ionice, prevăzute cu grilă de comandă, forma caracteristicii neliniare poate fi modificată după necesităţi (elemente neliniare comandate).

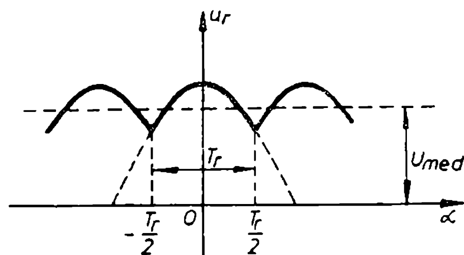


Fig. 3-30. Figură explicativă pentru calculul tensiunii redresate medii.

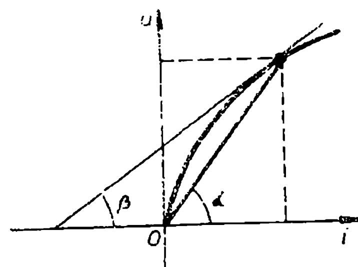


Fig. 3-31. Caracteristica rezistorului neliniar.

La toate elementele neliniare la care rezistenţa variază în funcţie de curent sau de tensiune, pe lîngă *rezistenţa statică*, egală cu raportul dintre tensiune şi curent, mai intervine şi *rezistenţa dinamică* care este raportul dintre variaţia tensiunii şi variaţia curentului (fig. 3-31):

$$R_s = \frac{u}{i} = k \operatorname{tg} \alpha; \; R_d = \frac{du}{di} = k \operatorname{tg} \beta, \tag{3-36}$$

unde k este o constantă prin care se ţine seama de scările de reprezentare a lui u şi i.

Deci, rezistenţa statică este proporţională cu tangenta trigonometrică a unghiului α de înclinare a dreptei dusă din originea coordonatelor în punctul

respectiv al caracteristicii, iar rezistența dinamică este proporțională cu tangenta trigonometrică a unghiului β de înclinare a tangentei geometrice dusă în punctul respectiv.

Este evident că R_s și R_d variază cînd se trece de la un punct la altul al caracteristicii. Pentru elementele pasive, întotdeauna $R_s>0$, însă R_d poate fi pozitiv sau negativ, după cum punctul respectiv se găsește pe porțiunea ascendentă sau descendentă a caracteristicii.

3.6.2. CALCULUL CIRCUITELOR CU ELEMENTE NELINIARE

Elementele rezistive neliniare se reprezintă în schemele electrice prin simbolul din fig. 3-32. Calculul circuitelor (rețelelor) de c.c. cu elemente neliniare este mai dificil decît al celor cu elemente liniare din cauză că legea lui Ohm nu mai este valabilă pentru aceste circuite, iar teorema a doua a lui Kirchhoff conduce la ecuații neliniare de forma :

$$\Sigma U_e = \Sigma R(I)\, I \tag{3-37}$$

unde $R(I)$ este rezistența ca funcție de curent.

Există mai multe metode de calcul a circuitelor cu elemente neliniare, dintre care se prezintă numai metoda grafică.

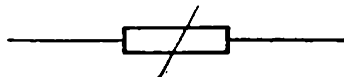


Fig. 3-32. Simbolul rezistorului neliniar.

Se consideră un circuit ce conține două rezistoare neliniare legate în serie (fig. 3-33, *a*), avînd caracteristicile *1* și *2* din fig. 3-33, *b*. Tensiunea U aplicată circuitului este egală cu suma căderilor de tensiune pe cele două rezistoare :

$$U = U_1 + U_2.$$

Ca urmare, caracteristica volt-amper a rezistorului neliniar echivalent, notată în fig. 3-33, *b* cu *1+2*, se obține însumînd ordonatele caracteristicilor *1* și *2* adică $AD = AB + AC$. Apoi, pentru determinarea curentului I din circuit, se duce orizontala corespunzătoare tensiunii U de la borne și din punctul D, unde această orizontală intersectează caracteristica *1+2*, se coboară o verticală,

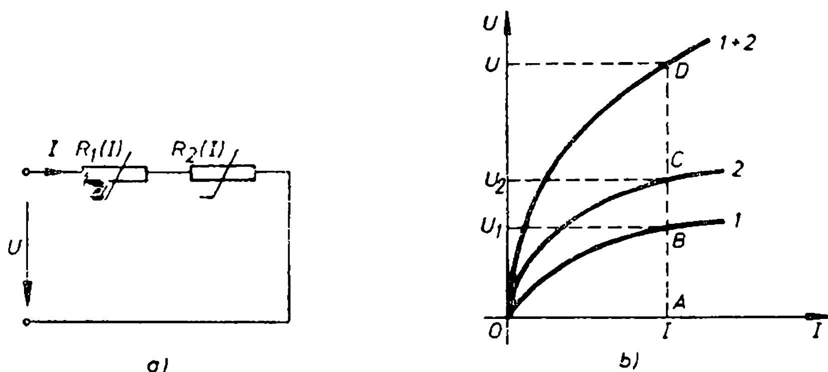


Fig. 3-33. Două rezistoare neliniare legate de serie (*a*) și caracteristicile lor (*b*).

a cărei intersecție în punctul A cu axa absciselor determină curentul I. Căderile de tensiune U_1 și U_2 pe cele două rezistoare se obțin la intersecțiile B și C a verticalei cu caracteristicile *1* și *2*.

În mod analog se procedează dacă circuitul conține trei sau mai multe rezistoare legate în serie, dintre care unele pot fi liniare.

Dacă circuitul conține două rezistoare neliniare legate în paralel (fig. 3-34, *a*), avînd caracteristicele *1* și *2*, din figura 3-34, *b*, caracteristica rezistorului neliniar echivalent, notată în fig. 3-34, *b* cu *1+2*, se obține prin însumarea absciselor

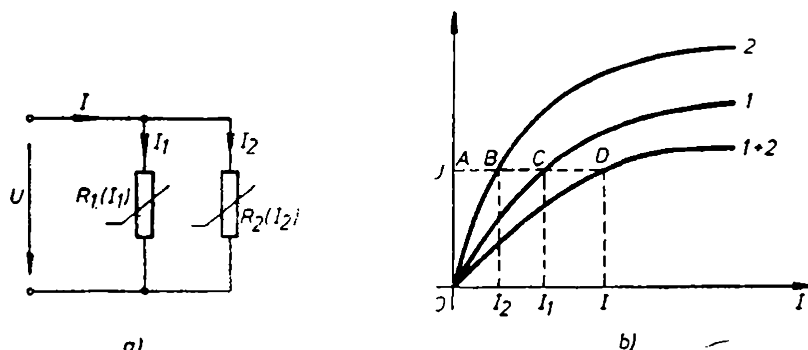


Fig. 3-34. Două rezistoare neliniare legate în paralel (*a*) și caracteristicile lor (*b*).

caracteristicilor *1* și *2*, adică $AD=AC+AB$ (deoarece $I=I_1+I_2$). Pentru determinarea curenților I_1, I_2 și I, se duce o orizontală în dreptul valorii U a tensiunii de la borne și în punctele B, C și D de intersecție a acestei drepte cu caracteristicile *1*, *2* și *1+2*, se duc verticale și se obțin pe abscisă valorile curenților respectivi.

În mod analog se procedează dacă circuitul conține trei sau mai multe rezistoare în paralel, dintre care unele pot fi liniare.

Metoda grafică devine mai complicată în cazul conectării mixte a rezistoarelor neliniare.

Capitolul 4

ELECTRODINAMICA

Electrodinamica este ramura electromagnetismului în care se studiază stările electrice și magnetice variabile în timp. În cadrul electrodinamicii vor fi prezentate și problemele cîmpului magnetic staționar asociat curenților electrici continui, precum şi cîmpul magnetostatic al magneţilor permanenți.

4.1. CÎMPUL MAGNETIC

Experimental se constată că în zona învecinată corpurilor magnetizate precum și în jurul conductoarelor parcurse de curent există o stare nouă, denumită *cîmp magnetic*, ce se manifestă prin forţe şi cupluri ce acţionează asupra unor conductoare parcurse de curent sau asupra unor corpuri magnetizate.

Tot experiența dovedește că într-o zonă din spaţiu în care există un cîmp electric variabil în timp, în acea zonă există şi un cîmp magnetic variabil în timp. De asemenea, dacă într-o zonă din spaţiu există un cîmp magnetic variabil în timp, se constată că în acea zonă există şi un cîmp electric variabil în timp. Aceasta înseamnă că cele două cîmpuri, electric și magnetic variabile în timp, se condiționează reciproc, constituind împreună o unitate denumită *cîmpul electromagnetic*.

Deci, cîmpul magnetic împreună cu cîmpul electric constituie cele două laturi sau cele două aspecte ale cîmpului electromagnetic. Dependent de modul de alegere a sistemului de referinţă, faţă de care se raportează starea de mişcare, se constată că cele două aspecte ale cîmpului electromagnetic sînt relative între ele, dar constituie împreună o realitate obiectivă, unică — cîmpul electromagnetic.

Cîmpul electrostatic este o stare limită a cîmpului electromagnetic, corespunzătoare situației în care sarcinile electrice sînt invariabile în timp şi aparţin corpurilor în stare de repaus faţă de sistemul de referinţă. În această stare, mărimile electrice ale cîmpului electromagnetic sînt constante în timp, iar cele magnetice sînt nule.

Cîmpul magnetostatic este o altă stare limită a cîmpului electromagnetic, fiind produs de magneţii permanenţi în stare de repaus. În această stare, mărimile electrice ale cîmpului sînt nule, iar cele magnetice sînt invariabile în timp.

Cîmpul magnetic produs de corpuri magnetizate (magneți permanenţi) se datorește curenţilor moleculari (curenţii lui Ampère) denumiţi *curenți legați*.

Curenții determinați de mișcarea ordonată a sarcinilor electrice, denumiți *curenți liberi*, produc atît în interiorul conductoarelor cît și în exteriorul lor cîmp magnetic. Curenții de conducție constanți în timp (curenți continui) ce străbat conductoare în repaus, produc *cîmpul magnetic staționar*.

Așadar, cîmpul magnetic este produs de curenți electrici liberi și legați, precum și de cîmpul electric variabil în timp.

Mărimile vectoriale de stare locală ale cîmpului magnetic sînt : inducția magnetică $\bar{B}$ și intensitatea cîmpului magnetic $\bar{H}$.

4.2. CÎMPUL MAGNETIC STAȚIONAR ÎN VID

Ne referim în cele ce urmează la cîmpul magnetic produs în vid de curenți continui ce străbat conductoare în stare de repaus.

4.2.1. INDUCȚIA MAGNETICĂ

Experimental se constată că asupra unui element de conductor $d\bar{l}$, filiform parcurs de un curent electric liber i, situat într-un cîmp magnetic, se exercită o forță $d\bar{F}$. Expresia acestei forțe a fost obținută prin generalizarea rezultatelor experimentale, fiind cunoscută sub denumirea de *forța lui Laplace*, sau *legea acțiunii ponderomotoare în cîmpul magnetic* :

$$d\bar{F}=i\,[d\bar{l}\times\bar{B}] \tag{4-1}$$

adică, forța $d\bar{F}$ este proporțională cu produsul vectorial dintre elementul de linie $d\bar{l}$, ca vector luat în lungul conductorului în sensul curentului, și o mărime vectorială $\bar{B}$, specifică cîmpului magnetic, denumită inducția magnetică, factorul de proporționalitate fiind curentul electric din conductor.

Relația (4-1) este general valabilă, adică atît pentru regimul variabil al mărimilor electrice și magnetice cît și pentru regimul staționar, cînd $i=I$ (curent continuu) iar $\bar{B}$ este constant în timp.

Experiența a dovedit că inducția magnetică $\bar{B}$ depinde de natura mediului în care există cîmpul magnetic, adică de proprietatea de a se magnetiza a mediului redată prin constanta fizică de material denumită *permeabilitatea magnetică*, măsurată în henry/metru [H/m]. Etalonul de comparație al acestei proprietăți este spațiul vid, a cărui permeabilitate magnetică se notează cu μ_0.

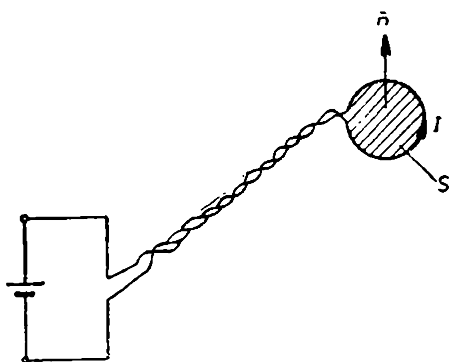


Fig. 4-1. Bucla de curent.

În cîmpul magnetic staționar, inducția magnetică este o funcție de spațiu $\bar{B}(\bar{r})$ ($\bar{r}$ este vectorul de poziție ce fixează punctul din cîmp față de sistemul de referință). Cu alte cuvinte, $\bar{B}$ se modifică ca valoare și ca orientare de la un punct la altul al cîmpului magnetic.

Explorarea inducției magnetice în diverse puncte ale cîmpului magnetic din vid poate fi făcută prin intermediul forței conform relației (4-1). „Corpul de probă" adecvat, folosit în acest scop, se dovedește a fi o buclă punctiformă de curent (fig. 4-1),

adică o mică spiră închisă, de arie S, străbătută de curentul I şi avînd versorul $\bar{n}$ normal la planul spirei (asociat conform regulei burghiului drept faţă de sensul curentului din spiră).

Momentul magnetic al buclei de curent (spirei de probă) se defineşte prin relaţia :

$$\bar{m} = IS\bar{n}. \tag{4-2}$$

Aşezînd spira de probă într-o anumită poziţie în cîmpul magnetic, asupra ei acţionează cuplul :

$$\bar{C} = \bar{m} \times \bar{B}, \tag{4-3}$$

care roteşte spira. Dacă cîmpul magnetic este neomogen, asupra spirei mai acţionează şi o forţă care îi imprimă o mişcare de translaţie.

Se remarcă faptul că în expresia cuplului $\bar{C}$ intervine inducţia magnetică $\bar{B}$ din punctul în care este plasată spira de probă considerată punctiformă, ceea ce justifică rostul unei astfel de spire pentru explorarea cîmpului magnetic.

Unitatea de măsură pentru inducţia magnetică în sistemul de unităţi MKSA se numeşte tesla (simbol T), sau weber/metru patrat [Wb/m^2] şi nu este afectată de raţionalizarea sistemului de unităţi.

4.2.2. INTENSITATEA CÎMPULUI MAGNETIC

Intensitatea $\bar{H}$ a cîmpului magnetic în vid se defineşte prin relaţia :

$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0}, \tag{4-4}$$

unde μ_0 este permeabilitatea magnetică absolută a vidului, o constantă fizică (cu dimensiuni) a cărei valoare depinde de sistemul de unităţi folosit :

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m — MKSA raţionalizat,

$\mu_0' = 10^{-7}$ H/m — MKSA neraţionalizat.

Unitatea de măsură a intensităţii cîmpului magnetic este amperspira/metru [AS/m] în sistemul de unităţi MKSA raţionalizat şi milioersted [mOe] în sistemul de unităţi MKSA neraţionalizat (1 AS/m $= 4\pi$ mOe).

S-a precizat că inducţia magnetică depinde de proprietăţile magnetice ale mediului în care are loc cîmpul magnetic şi se determină experimental. În schimb, în medii omogene şi izotrope, intensitatea cîmpului magnetic este independentă de aceste proprietăţi, fiind considerată ca o mărime de calcul. Cu alte cuvinte, în cazul cîmpului magnetic staţionar, inducţia magnetică depinde atît de curenţii liberi cît şi de curenţii legaţi, în timp ce intensitatea cîmpului magnetic depinde numai de curenţii liberi (de conducţie).

4.2.3. LINIILE CÎMPULUI MAGNETIC

Prin linie a inducţiei magnetice se înţelege aceea linie fictivă din spaţiu la care vectorul inducţiei magnetice este mereu tangent, sensul liniei fiind acelaşi cu sensul vectorului $\bar{B}$ (fig. 4-2). Liniile inducţiei magnetice sînt închise (fără

un început şi un sfîrşit), ceea ce conferă caracterul eminamente solenoidal al cîmpului vectorilor inducţiei magnetice.

Ecuaţia liniilor inducţiei magnetice se obţine avînd în vedere că vectorii $d\bar{l}$ şi $\bar{B}$ sînt coliniari (fig. 4-3), adică:

$$d\bar{l}\times\bar{B}=0 \tag{4-5}$$

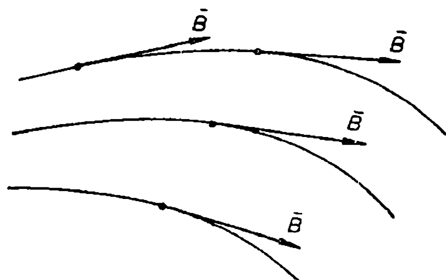


Fig. 4-2. Liniile inducţiei magnetice $\bar{B}$.

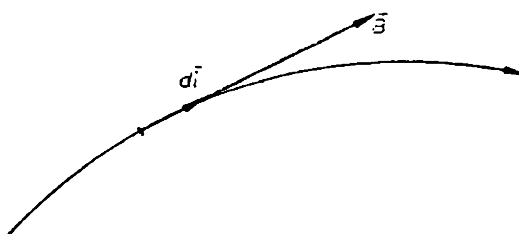


Fig. 4-3. Coliniaritatea între $\bar{B}$ şi $d\bar{l}$.

sau, folosind componentele lui $d\bar{l}$ şi $\bar{B}$ după cele trei axe, rezultă:

$$d\bar{l}\times\bar{B}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ dx & dy & dz\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=(dyB_z-dzB_y)\,\bar{i}+(dzB_x-dxB_z)\,\bar{j}+(dxB_y-dyB_x)\,\bar{k}=0,$$

$$dyB_z-dzB_y=0\ ;\ dzB_x-dxB_z=0\ ;\ dxB_y-dyB_x=0,$$

de unde se obţine următoarea ecuaţie diferenţială a liniilor inducţiei magnetice:

$$\frac{dx}{B_x}=\frac{dy}{B_y}=\frac{dz}{B_z}. \tag{4-6}$$

Deoarece în vid şi în alte medii izotrope şi fără magnetizare permanentă, vectorii $\bar{B}$ şi $\bar{H}$ sînt coliniari, *liniile intensităţii cîmpului magnetic* coincid cu liniile inducţiei magnetice şi se numesc împreună linii ale cîmpului magnetic. Ansamblul liniilor de cîmp dintr-un plan se numeşte *spectrul cîmpului magnetic* în acel plan.

În fig. 4-4 este reprezentat aspectul cîmpului magnetic produs de un curent ce trece printr-un conductor rectiliniu. În acest caz, liniile de cîmp au formă

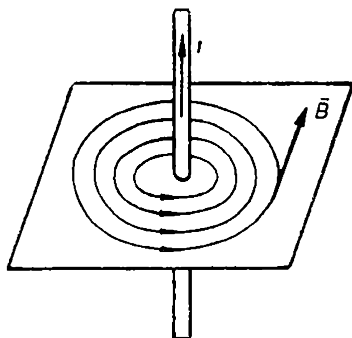


Fig. 4-4. Spectrul cîmpului magnetic produs de curentul dintr-un conductor rectiliniu.

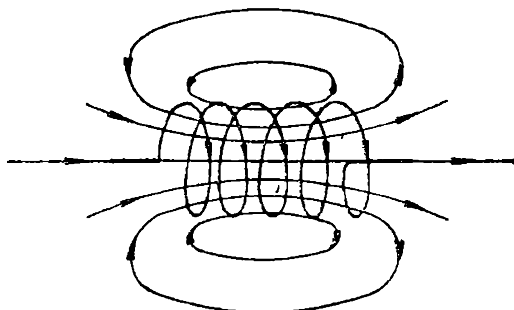


Fig. 4-5. Spectrul liniilor de cîmp la o bobină (solenoid).

circulară, cu sensul determinat cu regula burghiului drept (sensul liniilor este sensul în care trebuie rotit burghiul pentru ca el să înainteze în sensul curentului din conductor). În fig. 4-5 este arătat spectrul liniilor de cîmp la o bobină (solenoid) parcursă de curent. Şi aici sensul liniilor se obţine cu ajutorul regulei burghiului drept (se roteşte burghiul în sensul curentului din spire, sensul de înaintare fiind sensul liniilor de cîmp). La mijlocul bobinei liniile de cîmp sînt practic paralele, iar la extremităţi se depărtează unele de altele.

Se numeşte *cîmp magnetic omogen* (uniform) acel cîmp la care inducţia magnetică $\bar{B}$ şi intensitatea cîmpului magnetic $\bar{H}$ nu se modifică ca valoare şi orientare de la un punct al altul. Cîmpul omogen are liniile de cîmp drepte paralele şi echidistante.

Spectrele cîmpurilor magnetice se pot obţine experimental cu ajutorul piliturii de fier presărată pe o coală de hîrtie şi aşezată în cîmp. Scuturînd încet hîrtia, bucăţelele de fier se vor aşeza după liniile cîmpului magnetic.

Tubul de cîmp magnetic este constituit dintr-un mănunchi de linii ale cîmpului magnetic, fiind mărginit de o suprafaţă laterală şi avînd o anumită secţiune transversală ΔS (fig. 4-6). Tubul de cîmp este *elementar* atunci cînd secţiunea sa transversală ΔS este atît de mică încît vectorii $\bar{B}$ şi $\bar{H}$ nu se modifică de la un punct la altul al acestei secţiuni.

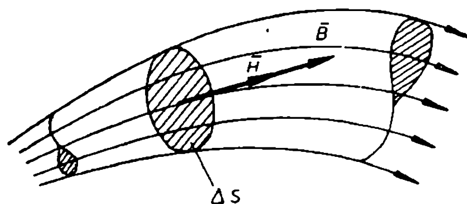


Fig. 4-6. Tubul de cîmp magnetic.

4.3. TEOREMA LUI BIOT-SAVART-LAPACE

Pe baza cercetărilor experimentale şi teoretice efectuate de I. B. Biot, F. Savart şi P. S. Laplace s-a stabilit o legătură între intensitatea cîmpului magnetic $\bar{H}$ produs într-un punct din spaţiul vid de către un curent electric I (staţionar sau cvazistaţionar) care trece printr-un conductor filiform în repaus, adică :

$$\bar{H}=\frac{I}{4\pi}\oint\frac{\bar{r}\times d\bar{l}}{r^3}, \tag{4-7}$$

unde $d\bar{l}$ este elementul de linie luat în lungul conductorului, în sensul curentului, iar $\bar{r}$ este vectorul de poziţie orientat de la punctul P în care se calculează cîmpul spre elementul de linie (fig. 4-7). Integrala din relaţia (4-7) se efectuează pentru conturul închis determinat de curentul I.

Teorema lui Biot-Savart-Laplace mai poate fi exprimată şi sub forma diferenţială :

$$d\bar{H}=\frac{I}{4\pi}\frac{\bar{r}\times d\bar{l}}{r^3}=\frac{I}{4\pi}\frac{\bar{u}_r\times d\bar{l}}{r^2}, \tag{4-8}$$

unde s-a ţinut seama că $\bar{r}=r\bar{u}_r$.

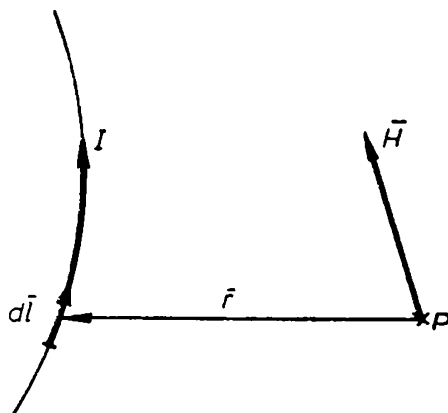


Fig. 4-7. Cîmpul $\bar{H}$ într-un punct produs de curentul I dintr-un conductor filiform.

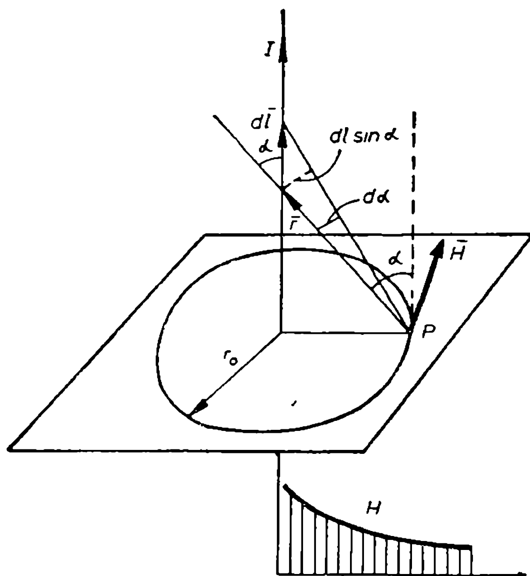


Fig. 4-8. Figură explicativă privind aplicarea teoremei Biot-Savart-Laplace.

Dacă cîmpul magnetic este produs de curenții de conducție din mai multe conductoare, de exemplu n conductoare atunci :

$$d\bar{H} = \frac{1}{4\pi} \sum_{\nu=1}^{n} I_\nu \frac{\bar{r}_\nu \times d\bar{l}_\nu}{r_\nu^3}. \quad (4\text{-}9)$$

Aplicația 4-1. Folosind teorema lui Biot-Savart-Laplace, să se determine intensitatea cîmpului magnetic produs de un curent ce străbate un conductor filiform și rectiliniu, infinit de lung, într-un punct P situat la distanța r_0 de conductor (figura 4-8).

Rezolvare. Folosind relația (4-8) și notațiile din fig. 4-8, rezultă :

$$dH = \frac{I}{4\pi} \frac{r dl \sin\alpha}{r^3} = \frac{I}{4\pi} \frac{dl \sin\alpha}{r^2},$$

$$dl \sin\alpha = r d\alpha, \quad r = \frac{r_0}{\sin\alpha}.$$

Deci,

$$dH = \frac{I}{4\pi} \frac{\sin\alpha \, d\alpha}{r_0},$$

$$H = \frac{I}{4\pi r_0} \int_0^\pi \sin\alpha \, d\alpha = \frac{I}{2\pi r_0} \quad (4\text{-}10)$$

adică, intensitatea cîmpului magnetic variază invers proporțional cu distanța de la punctul P la conductor (fig. 4-8). Relația (4-10) este valabilă numai pînă la suprafața conductorului. Pentru punctele din interiorul conductorului se poate demonstra că intensitatea cîmpului magnetic are o variație liniară în funcție de distanța de la axa conductorului (fig. 4-9).

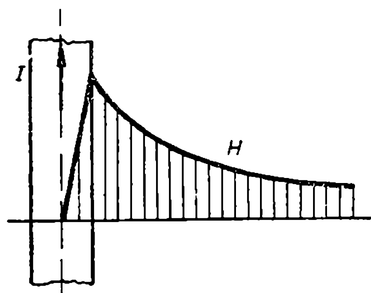


Fig. 4-9. Variația intensității cîmpului magnetic în exteriorul și interiorul unui conductor cu secțiune circulară parcurs de curent.

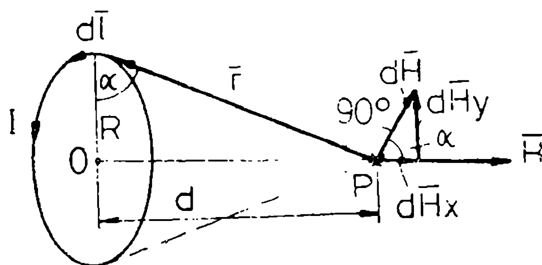


Fig. 4-10. Figură explicativă pentru calculul intensității cîmpului magnetic la o spiră circulară, filiformă, parcursă de curent.

Aplicația 4-2. O spiră circulară filiformă de rază R este parcursă de curentul I (fig. 4-10). Să se determine intensitatea cîmpului magnetic într-un punct P situat pe axa spirei la distanța d de centrul acesteia.

Rezolvare. Calculînd cu ajutorul relației (4-8) intensitatea cîmpului magnetic într-un punct P situat pe axa spirei se obține:

$$dH = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{rdl}{r^3} = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{dl}{r^2},$$

unde s-a ținut seama că unghiul dintre $\bar{r}$ și $\bar{dl}$ este 90°.

Vectorul $d\bar{H}$ are două componente (fig. 4-10):

$$d\bar{H} = d\bar{H}_x + d\bar{H}_y,$$

unde

$$dH_x = dH \cos\alpha \; ; \; dH_y = dH \sin\alpha.$$

Dacă se consideră elementul de linie dl în două poziții diametrale ale spirei, rezultă o sumă geometrică nulă a celor două componente $d\bar{H}_y$ corespunzătoare acestor poziții. Deci, pentru toată spira, intensitatea cîmpului magnetic rezultant nu are o componentă verticală, vectorul $\bar{H} = \bar{H}_x$ fiind situat pe axa spirei și obținîndu-se prin însumarea (integrarea) componentelor dH_x, adică:

$$H = \int dH_x = \int_0^{2\pi R} \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{\cos\alpha}{r^2}\, dl,$$

unde, înlocuind $\cos\alpha = \frac{R}{r}$ se obține:

$$H = \frac{RI}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{R^2 I}{2r^3}.$$

Avînd în vedere că $r = \sqrt{R^2 + d^2}$, rezultă:

$$H = \frac{R^2 I}{2(\sqrt{R^2 + d^2})^3}. \tag{4-11}$$

Dacă punctul P se găsește în centrul spirei ($d = 0$), atunci:

$$H = \frac{I}{2R}. \tag{4-12}$$

Calculele devin foarte complicate dacă punctul P nu este situat pe axa spirei.

Pe baza relației (4-12) se definește unitatea folosită pentru măsurarea intensității cîmpului magnetic, denumită amperspiră pe metru [AS/m], care este intensitatea cîmpului magnetic ce se stabilește în centrul spirei cu diametrul de 1 m, prin care trece un curent de 1 A.

Aplicația 4-3. Să se determine intensitatea cîmpului magnetic într-un punct de pe axa unei bobine cilindrice parcursă de curentul I, avînd raza R, lungimea l și N numărul de spire (fig. 4-11).

Rezolvare. Se consideră bobina cu stratul de spire foarte subțire și spirele foarte aproape una de alta. Un element de lungimea dx al bobinei poate fi identificat cu o spiră echivalentă

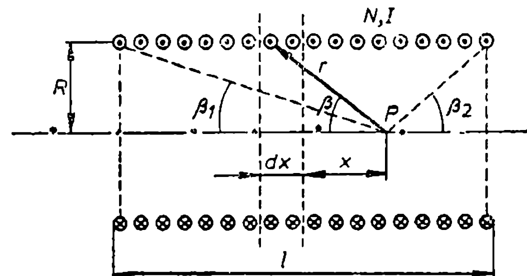


Fig. 4-11. Figură explicativă pentru calculul intensității cîmpului magnetic în interiorul unei bobine cilindrice.

filiformă, parcursă de curentul $\mathrm{d}I=\frac{NI}{l}\mathrm{d}x$. Conform relației (4-11), intensitatea cîmpului magnetic produs de această spiră într-un punct P de pe axa bobinei, la distanța x de spira elementară, este :

$$\mathrm{d}H=\frac{R^2\frac{NI}{l}\mathrm{d}x}{2(\sqrt{R^2+x^2})^3}. \tag{4-13}$$

Din figură rezultă : $x=R\,\mathrm{ctg}\,\beta$, $R^2+x^2=\frac{R^2}{\sin^2\beta}$, respectiv $\mathrm{d}x=-R\frac{\mathrm{d}\beta}{\sin^2\beta}$, cu care relația (4-13) devine :

$$\mathrm{d}H=-\frac{NI\sin\beta\,\mathrm{d}\beta}{2l}.$$

Pentru toată lungimea bobinei, cînd β variază între limitele β_1 și β_2, rezultă :

$$H=\frac{NI}{2l}(\cos\beta_1-\cos\beta_2), \tag{4-14}$$

de unde se vede că intensitatea cîmpului magnetic depinde de poziția punctului P și de lungimea l a bobinei. La o bobină de lungime mare în raport cu diametrul său $\beta_1\cong 0$ și $\beta_2\cong\pi$, deci :

$$H\cong\frac{NI}{l}. \tag{4-15}$$

4.4. FLUXUL MAGNETIC. LEGEA FLUXULUI MAGNETIC

4.4.1. FLUXUL MAGNETIC PRINTR-O SUPRAFAȚĂ DESCHISĂ

Se consideră o suprafață S delimitată de un contur Γ și situată într-un cîmp magnetic (fig. 4-12). Fluxul magnetic, notat cu Φ, se definește prin integrala de suprafață a vectorului inducției magnetice $\bar{B}$:

$$\Phi=\int_S \bar{B}\,\mathrm{d}\bar{s}. \tag{4-16}$$

Valoarea acestui flux este aceeași, oricare ar fi forma suprafeței ce se sprijină pe același contur Γ. În funcție de unghiul α dintre vectorii $\bar{B}$ și $\mathrm{d}\bar{s}$, fluxul Φ poate obține valori pozitive sau negative.

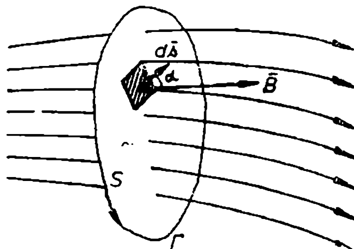


Fig. 4-12. Fluxul magnetic printr-o suprafață deschisă.

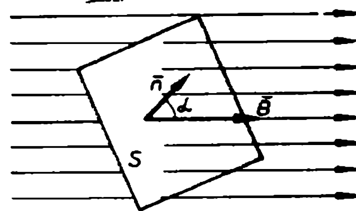


Fig. 4-13. Fluxul magnetic printr-o suprafață plană în cîmp omogen.

Sensul elementului de suprafață $d\bar{s}$ se asociază cu regula burghiului drept în funcție de sensul de referință ales arbitrar pe conturul Γ.

Printr-o suprafață elementară $d\bar{s}$, fluxul elementar este:

$$d\Phi = \bar{B}\, d\bar{s} = B\, ds \cos \alpha.$$

Pentru o suprafață plană, situată într-un cîmp magnetic omogen, a cărei normală $\bar{n}$ formează unghiul α cu vectorul inducției magnetice $\bar{B}$ (fig. 4-13), din relația (4-16) se deduce:

$$\Phi = \int_S B\, ds \cos \alpha = B \cos \alpha \int_S ds = BS \cos \alpha. \qquad (4\text{-}17)$$

Dacă liniile cîmpului omogen sînt normale la suprafață ($\alpha = 0$), atunci:

$$\Phi = BS, \qquad (4\text{-}18)$$

de unde se deduce:

$$B = \frac{\Phi}{S}. \qquad (4\text{-}19)$$

Unitatea de măsură pentru fluxul magnetic în sistemul de unități MKSA se numește Weber [Wb], iar în sistemul de unități CGS_{em} unitatea se numește maxwell [Mx]. Legătura dintre aceste două unități este: 1 Mx $= 10^{-8}$ Wb.

4.4.2. LEGEA FLUXULUI MAGNETIC

Se constată experimental că oricare ar fi modul de producere a cîmpului magnetic, este totdeauna valabilă următoarea lege generală: *fluxul magnetic printr-o suprafață închisă S_i este nul*, oricare ar fi forma suprafeței și în orice moment, adică

$$\int_{S_i} \bar{B}\, d\bar{s} = 0 \qquad (4\text{-}20)$$

(forma integrală a legii fluxului magnetic).

La suprafețele închise, vectorul element de suprafață $d\bar{s}$ se alege orientat spre exteriorul suprafeței.

Pe baza acestei legi se poate face precizarea că liniile inducției magnetice sînt închise, adică nu există în cîmpul magnetic puncte în care să se sfîrșească sau din care să înceapă linii ale cîmpului vectorial $\bar{B}$.

Legea fluxului magnetic mai poate fi exprimată și sub formă diferențială. Avînd în vedere definiția divergenței unui vector

$$\operatorname{div} \bar{B} = \lim_{\Delta O \to 0} \frac{\int_{S_i} \bar{B}\, d\bar{s}}{\Delta O}, \qquad (4\text{-}21)$$

unde ΔO este volumul închis de suprafața S_i și ținînd seama de relația (4-20), se obține următoarea formă diferențială a legii fluxului magnetic:

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0. \qquad (4\text{-}22)$$

Prin urmare, *divergența vectorului inducției magnetice este egală cu zero*, în orice punct din cîmpul magnetic și la orice moment.

Se precizează că divergența unei funcțiuni vectoriale de spațiu se exprimă prin produsul scalar dintre operatorul vectorial nabla (operatorul lui Hamilton)

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}$$

și vectorul respectiv, adică, în cazul inducției magnetice, $\bar{B}$, avem: div $\bar{B} = \nabla \bar{B} = 0$. În coordonate carteziene se obține:

$$\nabla \bar{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \tag{4-23}$$

4.5. TEOREMA LUI AMPÈRE

Teorema lui Ampère este o consecință a legii circuitului magnetic, particularizată pentru cîmpul magnetic staționar și cvazistaționar. Din acest motiv, teorema este cunoscută și sub denumirea de legea circuitului magnetic în regim staționar și cvazistaționar.

Forma integrală a teoremei lui Ampère precizează că, în regim staționar și cvazistaționar, integrala de linie a vectorului intensității cîmpului magnetic $\bar{H}$, calculată pentru un contur închis Γ, imobil, este egală cu suma algebrică a curenților de conducție care străbat suprafața S_Γ ce se sprijină pe acel contur, adică:

$$\oint_\Gamma \bar{H}\, d\bar{l} = \int_{S_\Gamma} \bar{J}\, d\bar{s}, \tag{4-24}$$

unde suma algebrică a curenților este exprimată prin integrala de suprafață a densității curentului de conducție.

Integrala pe contur închis a intensității cîmpului magnetic se mai numește și *tensiune magnetomotoare* (t.m.m.) iar suma algebrică a curenților care străbat suprafața închisă de conturul respectiv se mai numește și *solenație*. Deci, teorema lui Ampère se poate formula și în modul următor: *tensiunea magnetomotoare este egală cu solenația*.

Pentru exemplificarea aplicării acestei teoreme, se consideră în fig. 4-14 trei conductoare străbătute de curenții I_1, I_2, I_3 și conturul închis Γ, cu sensul pozitiv pe contur ales arbitrar. Conform teoremei lui Ampère rezultă:

$$\oint_\Gamma \bar{H}\, d\bar{l} = I_1 + I_2 - I_3,$$

unde, față de sensul pozitiv ales arbitrar pe conturul Γ, s-a stabilit, cu regula burghiului drept, semnul curenților ce străbat suprafața închisă de contur.

Dacă suprafața închisă de conturul de-a lungul căruia se efectuează integrala intensității cîmpului magnetic nu este străbătută de curenți de conducție (fig. 4-15), atunci:

$$\oint_{\Gamma'} \bar{H}\, d\bar{l} = 0. \tag{4-25}$$

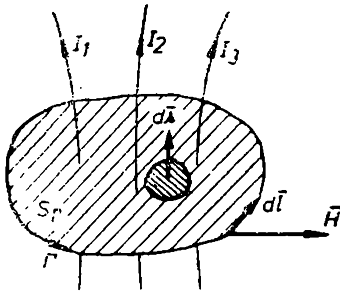


Fig. 4-14. Figură explicativă privind teorema lui Ampère.

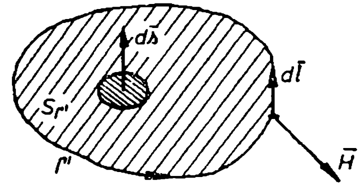


Fig. 4-15. Suprafață care nu este străbătută de curenți de conducție.

Teorema lui Ampère poate fi exprimată și sub formă diferențială. Pentru aceasta, folosind teorema lui Stokes de transformare a unei integrale de linie în integrală de suprafață :

$$\oint_\Gamma \bar{H}\,d\bar{l} = \int_{S_\Gamma} \operatorname{rot} \bar{H}\,d\bar{s} \qquad (4\text{-}26)$$

și înlocuind (4-26) în (4-24) se obține :

$$\int_{S_\Gamma} \operatorname{rot} \bar{H}\,d\bar{s} = \int_{S_\Gamma} J\,d\bar{s},$$

de unde rezultă următoarea formă diferențială a teoremei lui Ampère :

$$\operatorname{rot} \bar{H} = J. \qquad (4\text{-}27)$$

Dacă în punctul în care se calculează rotorul vectorul $\bar{H}$ densitatea de curent $\bar{J}$ este nulă, atunci

$$\operatorname{rot} \bar{H} = 0. \qquad (4\text{-}28)$$

Se precizează că rotorul unei funcțiuni vectoriale de spațiu se exprimă prin produsul vectorial : $\operatorname{rot} \bar{H} = \nabla \times \bar{H}$, unde ∇ este operatorul vectorial a lui Hamilton (v. relația 4-23).

Unitatea de măsură pentru t.m.m., respectiv pentru solenație, în sistemul de unități MKSA raționalizat se numește amperispire [AS].

Aplicația 4-4. Folosind teorema lui Ampère, să se determine intensitatea cîmpului magnetic produs de :

a. Bobina toroidală.

b. Bobina cilindrică.

c. Un conductor rectiliniu parcurs de curent.

Rezolvare. a. Bobină toroidală (fig. 4-16). Se notează cu N numărul de spire al bobinei, cu I curentul prin bobină și cu l lungimea conturului Γ care, în cazul de față, se confundă cu o linie a cîmpului magnetic. Avînd în vedere că $\bar{H}$ este constant de-a lungul liniei de cîmp, prin aplicarea relației (4-24) se obține :

$$\oint_\Gamma \bar{H}\,d\bar{l} = Hl = NI, \qquad (4\text{-}29)$$

deoarece suprafața închisă de conturul Γ este străbătută de N ori de curentul I. Din relația (4-29) rezultă :

$$H = \frac{NI}{l}. \qquad (4\text{-}30)$$

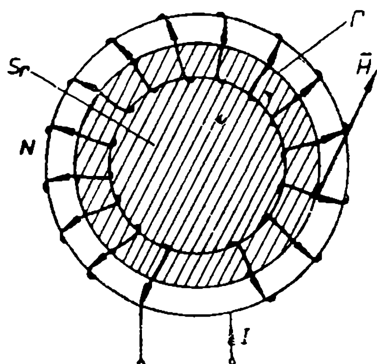


Fig. 4-16. Bobină toroidală.

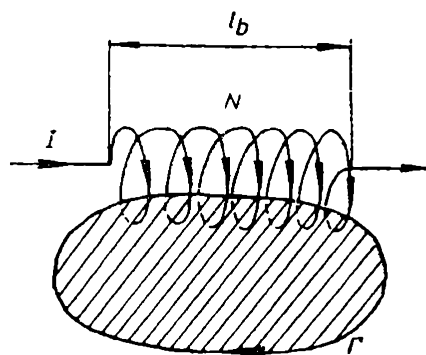


Fig. 4-17. Bobină cilindrică.

b. Bobina cilindrică (fig. 4-17). Se notează cu l_b lungimea, cu N numărul de spire și cu I curentul din bobină. Efectuînd integrala de linie a intensității cîmpului magnetic de-a lungul conturului închis Γ, se obține:

$$\oint_{\Gamma} \bar{H}\, d\bar{l} = NI.$$

Ținînd seama că în interiorul bobinei cîmpul magnetic este practic omogen și că în exterior intensitatea cîmpului magnetic este mică (neglijabilă) rezultă:

$$Hl_b \cong NI.$$

Deci, în ipoteza că intensitatea cîmpului magnetic din exteriorul bobinei cilindrice este neglijabilă și în interior cîmpul este omogen, se obține pentru intensitatea cîmpului magnetic interior relația:

$$H \cong \frac{NI}{l_b}. \qquad (4\text{-}31)$$

Inducția magnetică în interiorul bobinei cilindrice fără miez este:

$$B = \mu_0 H = \mu_0 \frac{NI}{l_b}. \qquad (4\text{-}32)$$

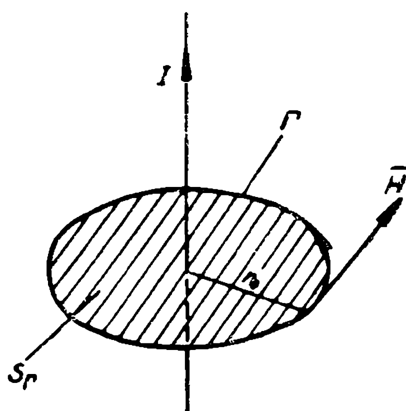


Fig. 4-18. Conductor rectiliniu parcurs de curent.

c. Conductor rectiliniu parcurs de curent (fig. 4-18). Se consideră conturul închis Γ identic cu linia cîmpului magnetic, de formă circulară cu raza r_0. Avînd în vedere că $\bar{H}$ are aceeași valoare în toate punctele conturului, prin aplicarea teoremei lui Ampère, rezultă:

$$\oint_{\Gamma} \bar{H}\, d\bar{l} = H \int_0^{2\pi r_0} dl = H\, 2\pi r_0 = I$$

de unde se deduce:

$$H = \frac{I}{2\pi r_0}.$$

Deci, se obține o expresie de calcul a intensității cîmpului magnetic care este aceeași cu cea obținută prin aplicarea teoremei lui Biot-Savart-Laplace (relația 4-10).

4.6. CÎMPUL MAGNETIC ÎN CORPURI

4.6.1. STAREA DE MAGNETIZARE A CORPURILOR

Starea fizică a corpurilor în care acestea sînt supuse unor acțiuni ponderomotoare (forțe și momente) dacă sînt situate într-un cîmp magnetic, se numește *stare de magnetizare*. Corpurile care se găsesc în stare de magnetizare se mai numesc și corpuri magnetizate.

Starea de magnetizare a corpurilor este *temporară*, dacă se menține numai în prezența unui cîmp magnetic exterior și este *permanentă* dacă se menține și în absența cîmpului magnetic exterior.

În decursul timpului, fizicienii au căutat să explice fenomenologic starea de magnetizare a corpurilor. La început s-a admis ipoteza existenței unor sarcini magnetice pozitive și negative, prin analogie cu sarcinile electrice. S-a constatat însă că aceste sarcini nu pot fi puse în evidență experimental, adică nu se pot despărți sarcinile magnetice pozitive, situate la polul nord al unui magnet, de cele negative situate la polul sud, așa cum se despart corpurile încărcate cu sarcini electrice pozitive de cele încărcate cu sarcini electrice negative.

Fizica modernă a confirmat ipoteza emisă de Ampère, conform căreia magnetizarea corpurilor se datorește curenților moleculari, denumiți și *curenți legați*, determinați de mișcarea la scară microscopică a electronilor în jurul moleculelor sau atomilor, respectiv de *mișcarea de spin* (de rotație în jurul axei proprii). Cu alte cuvinte, există la scară microscopică mici bucle (spire) de curent avînd momentul magnetic:

$$\bar{m}_{mol} = i_{mol}\bar{A}_{mol}, \tag{4-33}$$

unde i_{mol} este curentul molecular, iar $\bar{A}_{mol} = A_{mol}\bar{n}$ este suprafața buclei de curent ca vector (v. relația 4-2). Evident că momentul magnetic al unei molecule (sau atom) este rezultanta momentelor magnetice determinate de mișcarea orbitală sau de spin a tuturor particulelor încărcate cu sarcini electrice elementare ce aparțin moleculei. Sub acest aspect, se disting materiale cu molecule nepolare (*materiale diamagnetice*), la care momentul magnetic molecular rezultant este egal cu zero și materiale cu molecule polare (*materiale paramagnetice*), la care momentul magnetic molecular rezultant este diferit de zero.

Din categoria materialelor diamagnetice fac parte: hidrogenul, gazele inerte, carbonul, cuprul, zincul, aurul etc. Prin introducerea acestor materiale într-un cîmp magnetic se constituie momente magnetice moleculare orientate în sens opus cîmpului exterior, ceea ce conduce la micșorarea cîmpului magnetic în interiorul lor.

Din categoria materialelor paramagnetice fac parte: oxigenul, aluminiul, fierul, nichelul, cobaltul etc. Prin introducerea acestor materiale într-un cîmp magnetic, momentele magnetice moleculare se orientează în același sens cu cîmpul exterior, avînd loc o majorare a cîmpului magnetic din interiorul lor.

O categorie specială de materiale paramagnetice o constituie *materialele feromagnetice* (Fe, Ni, Co) care se magnetizează foarte puternic în prezența unui cîmp exterior și care pot fi aduse în stare de magnetizare permanentă.

4.6.2. POLARIZAREA MAGNETICĂ

Ne referim la materialele paramagnetice (inclusiv feromagnetice), fără magnetizare permanentă, introduse într-un cîmp magnetic. În absența cîmpului magnetic exterior, momentele magnetice ale curenților moleculari sînt orientate dezordonat, astfel încît, la scară macroscopică, efectul lor magnetizant global este nul. În schimb, în prezența cîmpului magnetic de inducție $\bar{B}$ asupra buclelor de curenți moleculari acționează cuplul :

$$\bar{C}_{mol}=\bar{m}_{mol}\times\bar{B} \qquad (4\text{-}34)$$

care orientează momentele magnetice $\bar{m}_{mol}$ în sensul cîmpului magnetic, producîndu-se polarizarea magnetică a materialului (magnetizarea materialului).

Pentru a caracteriza starea locală de magnetizare (polarizare magnetică) a materialelor, se introduce mărimea vectorială $\bar{M}$, denumită *vectorul de polarizare magnetică*, definită prin relația :

$$\bar{M}=\mu_0\lim_{\Delta o\to 0}\frac{\sum\bar{m}_{mol}}{\Delta o}, \qquad (4\text{-}35)$$

adică $\bar{M}$ este proporțional cu limita raportului dintre suma geometrică a momentelor magnetice moleculare cuprinse în volumul Δo și acest volum, cînd $\Delta o\to 0$, factorul de proporționalitate fiind μ_0.

Analizînd dimensiunea vectorului de polarizare magnetică $\bar{M}$, rezultă că este aceeași ca și dimensiunea inducției magnetice $\bar{B}$.

La materialele care, pe lîngă polarizarea magnetică temporară, prezintă și o polarizare magnetică permanentă, vectorul de polarizare magnetică are două componente :

$$\bar{M}=\bar{M}_t+\bar{M}_p, \qquad (4\text{-}36)$$

adică o componentă $\bar{M}_t$ corespunzătoare polarizării magnetice temporare și o componentă $\bar{M}_p$ corespunzătoare polarizării magnetice permanente.

4.6.3. LEGEA POLARIZĂRII MAGNETICE TEMPORARE

Experiența a dovedit că pentru mediile izotope și fără polarizare magnetică permanentă ($\bar{M}_p=0$), vectorul de polarizare magnetică temporară ($\bar{M}_t=\bar{M}$) este proporțional cu intensitatea cîmpului magnetic stabilit în mediul respectiv :

$$\bar{M}_t=\mu_0\eta_m\bar{H}, \qquad (4\text{-}37)$$

constanta de proporționalitate fiind produsul dintre permeabilitatea magnetică μ_0 a vidului și susceptivitatea magnetică η_m (o constantă de material adimensională).

Din relația (4-37) ce exprimă legea polarizării magnetice temporare, se remarcă faptul că vectorii $\bar{M}_t$ și $\bar{H}$ sînt coliniari.

4.6.4. LEGEA LEGĂTURII DINTRE $\bar{B}$, $\bar{H}$ ŞI $\bar{M}$

Enunţul acestei legi este următorul : în orice moment şi în orice punct din cîmpul magnetic este valabilă următoarea relaţie de legătură dintre vectorii $\bar{B}$, $\bar{H}$ şi $\bar{M}$:

$$\bar{B}=\mu_0\bar{H}+\bar{M}. \qquad (4\text{-}38)$$

De aici rezultă constatarea foarte importantă că inducţia magnetică $\bar{B}$ dintr-un mediu omogen magnetizat depinde atît de intensitatea cîmpului magnetic $\bar{H}$, stabilit în acest mediu de cauze exterioare, cît şi de starea locală de polarizare magnetică a mediului respectiv, caracterizată prin $\bar{M}$. Rolul preponderent la determinarea inducţiei magnetice în interiorul mediilor feromagnetice îl are vectorul de polarizare magnetică $\bar{M}$, adică curenţii moleculari. În vid (sau aer) nu apare fenomenul de polarizare magnetică ($\bar{M}=0$), deci :

$$\bar{B}=\mu_0\bar{H}. \qquad (4\text{-}39)$$

În mediile care prezintă numai polarizare magnetică permanentă, aşa cum este cazul magneţilor permanenţi, inducţia magnetică este determinată numai de vectorul de polarizare magnetică permanentă :

$$\bar{B}=\bar{M}_p. \qquad (4\text{-}40)$$

4.6.5. PERMEABILITATEA MAGNETICĂ ABSOLUTĂ ŞI RELATIVĂ

Pentru mediile izotrope şi fără magnetizare permanentă, din relaţiile (4-38) şi (4-37) se obţine :

$$\bar{B}=\mu_0\bar{H}+\mu_0\eta_m\bar{H}=\mu_0\,(1+\eta_m)\,\bar{H},$$

adică

$$\bar{B}=\mu\bar{H}, \qquad (4\text{-}41)$$

unde

$$\mu=\mu_0\,(1+\eta_m) \qquad (4\text{-}42)$$

este permeabilitatea magnetică absolută a mediului, prin care se caracterizează proprietatea mediului respectiv de a se magnetiza.

Din relaţia (4-41) se remarcă faptul că în mediile izotrope şi fără polarizare permanentă vectorii $\bar{B}$ şi $\bar{H}$ sînt coliniari. De asemenea rezultă :

$$\mu=\frac{B}{H}, \qquad (4\text{-}43)$$

ceea ce înseamnă că permeabilitatea magnetică absolută este o constantă fizică de material, cu dimensiuni [H/m].

Dacă μ este independent de H, mediul respectiv este liniar iar dacă μ depinde de H, mediul este neliniar din punct de vedere al proprietăţilor magnetice.

Permeabilitatea magnetică relativă este :

$$\mu_r=\frac{\mu}{\mu_0}=1+\eta_m. \qquad (4\text{-}44)$$

Pentru materialele diamagnetice $\mu_r<1$, iar pentru cele paramagnetice $\mu_r>1$. La materialele feromagnetice $\mu_r\gg1$. În tabela 4-2 pag. 161 sînt prezentate valorile permeabilității magnetice relative pentru cîteva materiale magnetice.

4.7. MATERIALE FEROMAGNETICE

S-a arătat la paragraful precedent că materialele feromagnetice se caracterizează prin permeabilitatea magnetică relativă mult mai mare decît unitatea, de ordinul sutelor și chiar miilor. Starea de magnetizare a acestor materiale, determinată de un cîmp magnetic de excitație, contribuie la o intensificare foarte puternică a cîmpului magnetic, astfel că inducția magnetică crește foarte mult. Fără existența materialelor cu astfel de proprietăți nu ar fi fost posibilă construcția mașinilor și aparatelor electrice la care este necesar să existe inducții magnetice de valori mari.

Din grupul materialelor feromagnetice fac parte, în primul rînd, fierul cu aliajele sale (oțel, fontă etc.), de unde provine și denumirea lor. Proprietăți asemănătoare mai au nichelul, cobaltul și aliajele lor, precum și aliajele unor substanțe neferoase.

Pe lîngă permeabilitatea magnetică de valoarea ridicată, materialele feromagnetice mai au și următoarele proprietăți magnetice:

— prezintă fenomenul de histerezis magnetic și își păstrează în parte magnetizarea după dispariția cîmpului magnetic de excitație;

— permeabilitatea lor magnetică variază cu intensitatea cîmpului magnetic, adică sînt medii magnetice neliniare;

— peste o anumită temperatură critică (punctul Curie) un material feromagnetic se comportă ca unul paramagnetic obișnuit.

4.7.1. CURBA DE MAGNETIZARE

Curba de magnetizare a materialelor feromagnetice reprezintă variația inducției magnetice în funcție de intensitatea cîmpului magnetic: $B=f(H)$. Această curbă se determină experimental pentru fiecare material feromagnetic în parte. În acest scop, se confecționează din materialul respectiv un miez de formă toroidală pe care se așază o bobină parcursă de curent continuu. Modificînd curentul din bobină, are loc o variație a lui H, care depinde liniar de curent, și a lui B, care se exprimă în funcție de H prin relația $B=\mu H$.

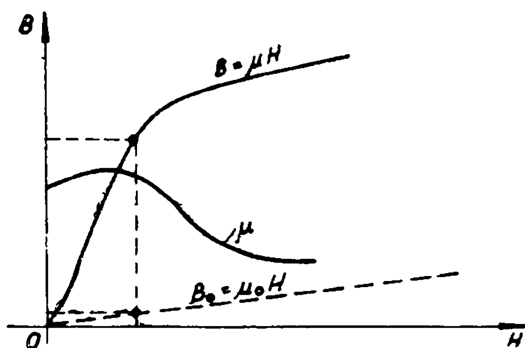


Fig. 4-19. Curba de magnetizare.

Forma curbei de magnetizare a materialelor feromagnetice este arătată în fig. 4-19. Se observă că pentru valori mici ale intensității cîmpului magnetic, inducția B variază proporțional cu H. La o anumită valoare a intensității cîmpului magnetic, curba de magnetizare obține

o anumită curbură, denumită „cotul curbei de magnetizare“. Apoi, în domeniul de saturaţie, B variază din nou aproximativ proporţional cu H, cu observaţia că la variaţii mari ale lui H se obţin variaţii mici pentru B.

Aliura curbei de magnetizare se explică prin orientarea treptată a momentelor magnetice ale curenţilor moleculari sub acţiunea cîmpului magnetic exterior H. Cînd s-a ajuns la cotul curbei de magnetizare, înseamnă că majoritatea momentelor magnetice s-au orientat, rămînînd ca, în continuare, să se orienteze un număr din ce în ce mai mic de momente magnetice, astfel ca, în domeniul de saturaţie, orientarea să înceteze aproape complet. Datorită fenomenului de saturaţie, permeabilitatea magnetică $\mu = \frac{B}{H}$ scade (figura 4-19).

În fig. 4-19 este arătată şi variaţia inducţiei magnetice în vid (sau aer) în funcţie de intensitatea cîmpului magnetic: $B_0 = \mu_0 H$. Se remarcă valorile mult mai mari ale inducţiei în materialul feromagnetic faţă de aer, la aceeaşi valoare a intensităţii cîmpului magnetic.

Curbele de magnetizare pentru materiale feromagnetice uzuale sînt date în cataloagele acestor produse. Importantă este valoarea inducţiei magnetice la care materialul respectiv se saturează. Punctul nominal de funcţionare pe curba de magnetizare se fixează în zona de proporţionalitate (nesaturată), în apropierea cotului curbei.

4.7.2. FENOMENUL DE HISTEREZIS MAGNETIC

Introducînd un material feromagnetic într-un cîmp magnetic cu variaţie alternativă în timp, produs, spre exemplu, de un curent alternativ (fig. 4-20), se constată o întîrziere a variaţiei inducţiei magnetice faţă de variaţia intensităţii cîmpului magnetic. În fig. 4-21 este reprezentat ciclul de histerezis.

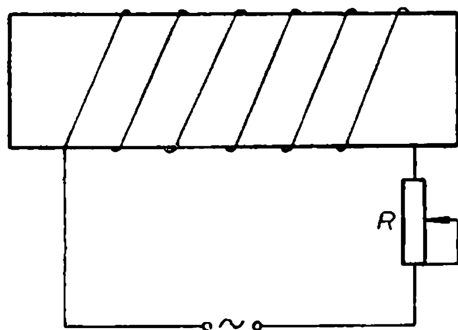


Fig. 4-20. Magnetizarea alternativă a miezului feromagnetic.

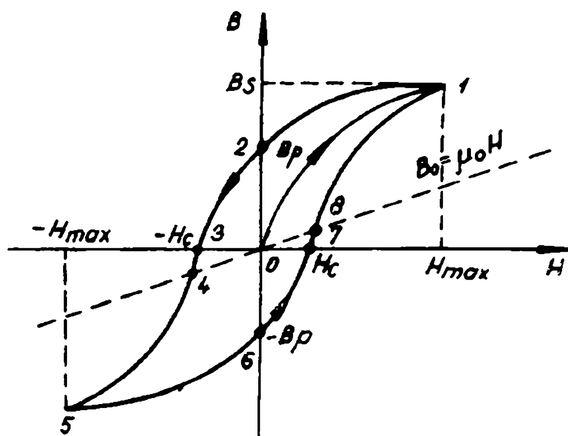


Fig. 4-21. Ciclul de histerezis.

La prima magnetizare, B variază în funcţie de H după curba cuprinsă între $0-1$. Apoi, cînd intensitatea cîmpului magnetic se micşorează de la valoarea H_{max} la zero, inducţia magnetică variază după curba $1-2$. În punctul 2, deşi $H=0$, inducţia magnetică este diferită de zero, $B=B_p$, datorită polarizării

magnetice permanente a materialului feromagnetic — *inducție magnetică remanentă*. Prin schimbarea sensului curentului din bobină, H devine negativ, parcurgîndu-se porțiunea de curbă cuprinsă între *2* și *5*, cînd H crește în sens negativ, și porțiunea de curbă cuprinsă între *5* și *6*, cînd H revine ca valoare la zero. Cînd H crește în sens pozitiv se parcurge porțiunea de curbă cuprinsă între *6* și *1*, ş.a.m.d. Se observă că în punctele *3* și *7* inducția magnetică în material este zero, iar intensitatea cîmpului magnetic este diferită de zero, $H=H_c$. Valoarea H_c a intensității cîmpului magnetic pentru care inducția magnetică în miezul de fier se anulează se numește *cîmp magnetic coercitiv*. În punctele *4* și *8*, inducția magnetică în miezul de fier are valoarea pe care aceași intensitate de cîmp magnetic o produce în vid ($B=\mu_0 H$), adică, în aceste puncte, nu există o polarizare magnetică a materialului care să influențeze asupra valorii inducției magnetice.

Trebuie precizat că forma ciclului de histerezis din fig. 4-21 se obține numai după cîteva magnetizări și demagnetizări succesive. Mărimile ce caracterizează forma ciclului de histerezis sînt: inducția remanentă B_p, cîmpul magnetic coercitiv H_c și inducția magnetică de saturație B_s. Ciclul de histerezis este de formă dreptunghiulară dacă $\frac{B_p}{B_s}=0,96\ldots0,98$.

Curba de magnetizare a materialului se obține prin unirea vîrfurilor ciclurilor de histerezis rezultate prin magnetizări succesive pentru diverse valori a lui H_{max} (fig. 4-23, *a*). Această curbă nu coincide în întregime cu cea obținută la magnetizarea inițială.

Pentru demagnetizarea unui material magnetizat (care prezintă inducție remanentă) se folosește metoda de a-l introduce într-un cîmp magnetic alternativ din ce în ce mai puțin intens (fig. 4-22). Prin aceasta, inducția remanentă devine tot mai mică, tinzînd spre zero.

Pentru orientarea alternată a momentelor magnetice ale curenților moleculari din materialele feromagnetice se consumă o anumită energie, care se transformă în căldură în masa materialului. Este vorba despre *pierderile prin histerezis*, care au loc în materialele feromagnetice supuse unui cîmp magnetic variabil în timp. Puterea pierdută prin histerezis depinde de frecvența f de parcurgere a ciclului, precum și de suprafața închisă de curba acestui ciclu. Pentru calculul acestei puteri se aplică următoarea formulă empirică:

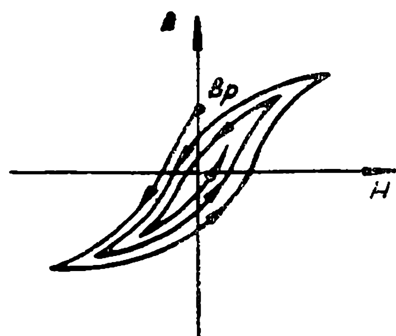


Fig. 4-22. Demagnetizarea miezului feromagnetic.

$$P_H=\sigma_H \frac{f}{100} B^n \quad [\text{W/kg}], \qquad (4\text{-}45)$$

unde f este frecvența, în Hz;
B — inducția magnetică maximă, în Wb/m^2;
σ_H — un coeficient care depinde de natura și calitatea materialului și care se determină experimental (tabela 4-1);
n — 1,6... 2.

În construcția mașinilor și aparatelor electrice, se urmărește folosirea unor materiale feromagnetice cu pierderi prin histerezis, exprimate în W/kg, cît mai mici, ceea ce conduce la îmbunătățirea randamentului acestora.

Tabela 4-1

Valorile coeficientului de pierderi prin histerezis

Materialul	Grosimea tolelor [mm]	σ_H
Oțel obișnuit	0,35	4,7
	0,5	4,4
	1	4,4
Oțel electrotehnic (aliat cu 2—4% siliciu)	0,35	2,4
	0,5	3

Ciclurile de histerezis majore, sau principale, ale unui material feromagnetic se obțin la magnetizările alternative cu valori maxime diferite ale intensității cîmpului magnetic (fig. 4-23, *a*). Există o anumită limită de la care, oricît s-ar majora această valoare maximă, ciclul de histerezis nu se modifică, acesta fiind *ciclul de histerezis limită.*

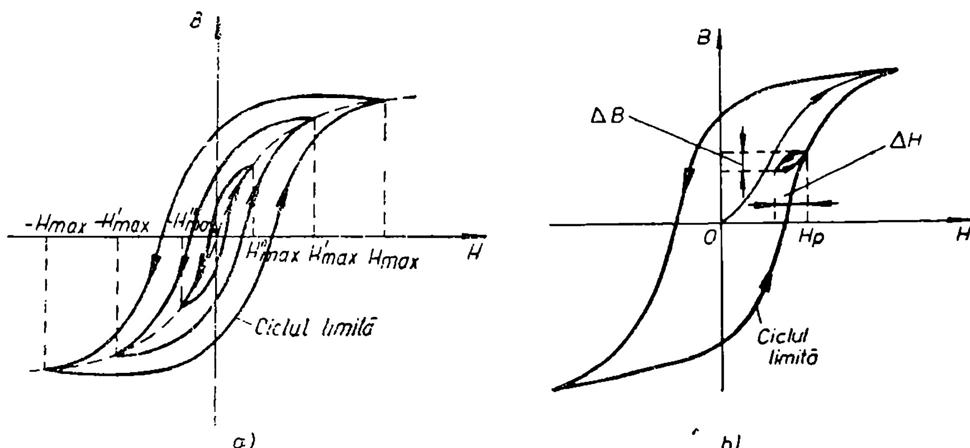


Fig. 4-23. Cicluri de histerezis :
a — principale (majore) și limită; *b* — limită și secundar (minor).

Premagnetizarea materialului feromagnetic constă în stabilirea în interiorul său a unui cîmp magnetic constant, determinat de o bobină parcursă de c.c., peste care se suprapune cîmpul magnetic alternativ. În fig. 4-23, *b* este notat cu H_p intensitatea cîmpului magnetic de premagnetizare, peste care se suprapune cîmpul magnetic alternativ avînd intensitatea cu amplitudinea ΔH. Rezultă astfel un ciclu de *histerezis minor, sau secundar,* deplasat față de centrul axelor de coordonate.

Procedeul de premagnetizare se folosește în practică la amplificatoarele magnetice, la releele electromagnetice polarizate etc.

Pe baza ciclului de histerezis a materialelor feromagnetice se definesc următoarele valori pentru permeabilitatea magnetică relativă (fig. 4-23) :

— permeabilitatea magnetică relativă statică :

$$\mu_{rs} = \frac{B}{\mu_0 H}; \qquad (4\text{-}46,\ a)$$

— permeabilitatea magnetică relativă medie :

$$\mu_{rm} = \frac{B_{max}}{\mu_0 H_{max}} ; \qquad (4\text{-}46,\ b)$$

— permeabilitatea magnetică relativă reversibilă ;

$$\mu_{rr} = \lim_{\Delta H \to 0} \left(\frac{\Delta B}{\mu_0 \Delta H} \right)_{H \neq 0} ; \qquad (4\text{-}47)$$

— permeabilitatea magnetică relativă inițială :

$$\mu_{ri} = \lim_{\Delta H \to 0} \left(\frac{\Delta B}{\mu_0 \Delta H} \right)_{H=0,\ B=0} . \qquad (4\text{-}48)$$

Se observă din (4-46, *a*) că permeabilitatea magnetică relativă statică obține valoare infinită în punctul de pe ciclul de histerezis în care $H=0$ și $B=B_p$, motiv pentru care această mărime nu are sens a fi folosită la calculul bobinelor de c.a. cu miez feromagnetic, la care se ține seama și de ciclul de histerezis. În această situație se folosește permeabilitatea magnetică relativă medie (4-46, b).

În ceea ce privește permeabilitatea magnetică relativă reversibilă, aceasta intervine la miezurile cu premagnetizare.

4.7.3. CLASIFICAREA MATERIALELOR FEROMAGNETICE

Materialele feromagnetice au multiple aplicații în tehnică și în special în industria electrotehnică. Folosirea unor miezuri cu calități magnetice superioare reduce considerabil greutatea mașinilor și aparatelor electrice, reduce consumurile specifice de materiale, mărește randamentul și performanțele acestora.

În funcție de proprietățile lor magnetice, materialele feromagnetice se clasifică în materiale „moi" și materiale „tari".

Materiale feromagnetice moi sînt caracterizate prin cîmp coercitiv mic și permeabilitate magnetică relativă foarte mare. Pierderile prin histerezis la aceste materiale sînt mici.

Materiale feromagnetice tari (*dure*) sînt caracterizate prin cîmp coercitiv mare, inducție remanentă mare și permeabilitate magnetică relativă mică. Astfel de materiale se folosesc la construcția magneților permanenți.

În tabela 4-2 sînt prezentate caracteristicile cîtorva materiale feromagnetice moi și tari, folosite în practică.

Feritele se folosesc pe scară largă în ultimul timp în construcția unor dispozitive ale calculatoarelor electronice. Ciclul de histerezis al acestor materiale este aproape dreptunghiular, cu o suprafață foarte mică, deci pierderi prin histerezis minime.

Tabela 4-2

Date caracteristice pentru unele materiale feromagnetice

Materialul	Permeabilitatea magnetică relativă		Inducția remanentă [Wb/m²]	Cîmpul coercitiv [AS/m]
	inițială	maximă		
Materiale feromagnetice moi				
Fier pur (tratat în hidrogen)	25 000	250 000	1,4	4
Tole din oțel silicios (4% Si)	500	7 000	0,8	40
Permaloy (78,5% Ni, 21,5% Fe)	10 000	50 000	0,6	4
Supermaloy (79% Ni, 15% Fe, 5% Mo, 0,5% Mu)	100 000	300 000	0,6	0,4
Ferită de mangan-zinc	2 000	3 000	0,15	10
Materiale feromagnetice tari				
Oțel (cu 1% C)	40		0,7	5 000
Oțel crom, oțel wolfram	30		1,1	5 000
Alnico I (12% Al, 20% Ni, 5% Co, 63% Fe)	4		0,73	34 000
Oerstit 900 (20% Ni, 30% Co, 20% Ti, 30% Fe)	3		0,55	65 000
Aliaj platină-cobalt (77% Pt, 23% Co)	1		0,45	26 000
Ferită de bariu	1		0,2...0,4	100 000... 250 000

4.8. CIRCUITE MAGNETICE

Prin circuit magnetic se înțelege sistemul de medii prin care se închid liniile cîmpului magnetic.

La realizarea concretă a circuitelor magnetice se folosesc materiale feromagnetice care, avînd permeabilitatea magnetică mare, concentrează cea mai mare parte a liniilor inducției magnetice, necesitînd solenații (amperspire) minime pentru producerea unor fluxuri magnetice de valoare mare.

Cîmpul magnetic dintr-un circuit magnetic poate fi produs de magneți permanenți sau de bobine de excitație. În fig. 4-24, *a* este reprezentat un circuit magnetic realizat cu un magnet permanent, iar în fig. 4-24, *b* și *c* sînt

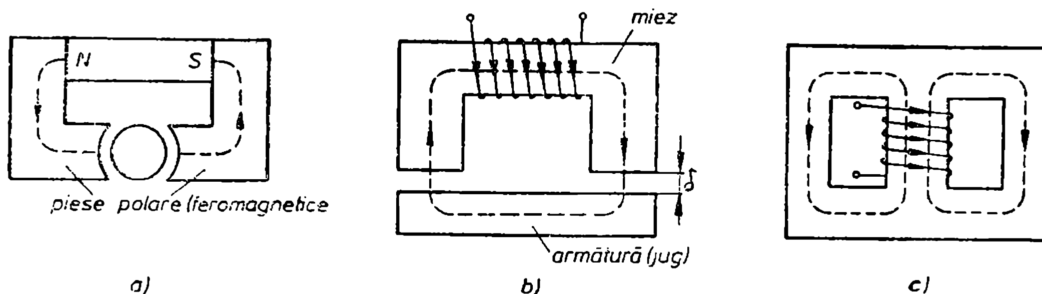


Fig. 4-24. Circuite magnetice :
a — neomogen cu magnet permanent; *b* — neomogen și neramificat, cu bobină; *c* — omogen și ramificat, cu bobină.

reprezentate circuite magnetice prevăzute cu o bobină de excitație. Curentul din bobina de excitație poate fi continuu sau alternativ, ceea ce depinde de destinația aparatului în componența căruia intră circuitul magnetic respectiv.

Circuitul magnetic este *omogen*, dacă este realizat din medii cu aceeași permeabilitate magnetică și este *neomogen*, dacă este realizat din medii cu permeabilități magnetice diferite.

Din punctul de vedere al proprietăților de material, se deosebesc circuite magnetice *liniare*, la care permeabilitatea magnetică este independentă de intensitatea cîmpului magnetic ($\mu =$ const.), așa cum este cazul circuitelor magnetice realizate din miezuri feromagnetice nesaturate și circuite magnetice *neliniare* la care permeabilitatea magnetică depinde de intensitatea cîmpului magnetic, $\mu(H)$.

În ceea ce privește configurația geometrică, se disting circuite magnetice *neramificate* (fig. 4-24, *a* și *b*) și circuite magnetice *ramificate* (fig. 4-24, *c*)

4.8.1. REZISTENȚA MAGNETICĂ (RELUCTANȚA)

Pentru a defini noțiunea de rezistență magnetică, se consideră un tub de cîmp magnetic elementar, reprezentat în fig. 4-25, avînd secțiunea transversală ΔS și extremitățile *1* și *2*. Prin analogie cu rezistența electrică a unui tub de curent, rezistența magnetică a tubului de cîmp magnetic se definește prin relația :

$$R_{m12}=\int_1^2 \frac{\bar{H}\,\mathrm{d}\bar{l}}{\int_{\Delta S}\bar{B}\,\mathrm{d}\bar{s}}. \tag{4-49}$$

Avînd în vedere că vectorii $\bar{B}$, $\bar{H}$, $\mathrm{d}\bar{l}$, și $\mathrm{d}\bar{s}$ sînt coliniari și că la tubul elementar inducția $\bar{B}$ este aceeași în toate punctele secțiunii transversale ΔS, din relația (4-49) se obține :

$$R_{m12}=\int_1^2 \frac{H\,\mathrm{d}l}{\int_{\Delta S} B\,\mathrm{d}s}=\int_1^2 \frac{H\,\mathrm{d}l}{B\int_{\Delta S}\mathrm{d}s}=\int_1^2 \frac{H\,\mathrm{d}l}{\mu H \Delta S},$$

adică

$$R_{m12}=\int_1^2 \frac{\mathrm{d}l}{\mu \Delta S}. \tag{4-50}$$

Dacă secțiunea ΔS a tubului de cîmp este aceeași în tot timpul său ($\Delta S = S =$const.) și mediul în care are loc cîmpul magnetic este liniar și omogen ($\mu =$ const.), rezultă :

$$R_m=\frac{l}{\mu S}, \tag{4-51}$$

unde l este lungimea circuitului magnetic.

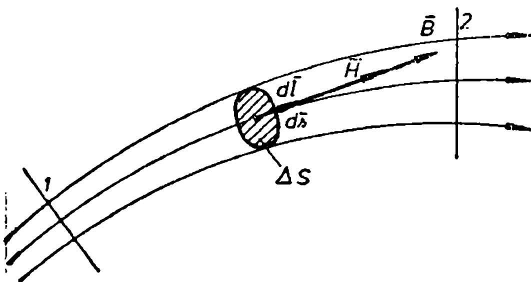


Fig. 4-25. Tub elementar de cîmp magnetic.

Rezistența magnetică este, în majoritatea cazurilor, un parametru

neliniar deoarece permeabilitatea magnetică este funcție de intensitatea H a cîmpului magnetic.

Valoarea inversă a rezistenței magnetice (reluctanței) se numește *permeanță magnetică* :

$$\Lambda=\frac{1}{R_m}\cdot \tag{4-52}$$

Pentru un circuit magnetic închis și neramificat, la care fluxul $\Phi=\int \bar{B}\,d\bar{s}$ este același în tot lungul său, rezistența magnetică este :

$$R_m=\oint\frac{\bar{H}\,d\bar{l}}{\int \bar{B}\,d\bar{s}}=\oint\frac{\bar{H}\,d\bar{l}}{\Phi}=\frac{1}{\Phi}\oint \bar{H}\,d\bar{l},$$

adică

$$R_m=\frac{U_m}{\Phi}, \tag{4-53}$$

unde $U_m=\oint \bar{H}\,d\bar{l}$ este tensiunea magnetomotoare (t.m.m.) ce acționează în acel circuit.

Din relația (4-53) se deduce :

$$\Phi=\frac{U_m}{R_m}, \tag{4-54}$$

adică o relație analoagă cu legea lui Ohm pentru circuitele de curent continuu. Produsul ΦR_m se numește *cădere de tensiune magnetică*, echivalentă cu căderea de tensiune electrică, IR.

Aplicația 4-5. Să se determine rezistența magnetică totală a circuitului magnetic neomogen (cu întrefier) și neramificat, de forma toroidală din fig. 4-26.

Rezolvare. Tensiunea magnetomotoare pentru conturul Γ este :

$$U_m=\oint_{\Gamma}\bar{H}\,d\bar{l}=H_f l_f+H_\delta\delta,$$

unde H_f și H_δ sînt intensitățile cîmpului magnetic în miezul de fier, respectiv în aer, iar l_f și δ sînt lungimea miezului de fier și lungimea întrefierului.

Neglijînd dispersia, fluxul magnetic este același în secțiunea S_f a miezului de fier și în secțiunea S_δ a întrefierului, adică :

$$\Phi=B_f S_f=B_\delta S_\delta.$$

Făcînd raportul ultimelor două relații, se obține rezistența magnetică a circuitului :

$$R_m=\frac{U_m}{\Phi}=\frac{l_f}{\mu S_f}+\frac{\delta}{\mu_0 S_\delta},$$

unde s-a introdus $B_f=\mu H_f$ și $B_\delta=\mu_0 H_\delta$.

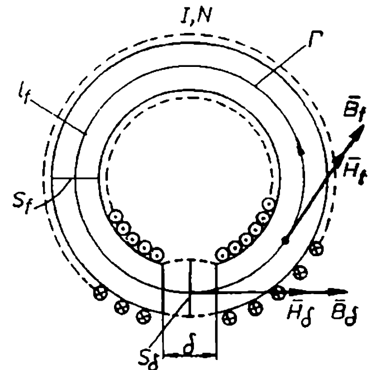


Fig. 4-26. Circuit magnetic cu întrefier (neomogen).

Deci, rezistența magnetică totală a circuitului magnetic din fig. 4-26 este egală cu suma rezistențelor magnetice ale porțiunilor de circuit din fier și din aer, legate în serie. Valoarea cea mai mare o are rezistența magnetică a întrefierului deoarece $\mu_0 \ll \mu$. Deci, căderea de tensiune magnetică în întrefier este mult mai mare decît în miezul feromagnetic.

4.8.2. TEOREMELE LUI KIRCHHOFF APLICATE LA CIRCUITELE MAGNETICE

Se consideră circuitul magnetic ramificat din fig. 4-27, *a* în care acționează două tensiuni magnetomotoare (există două bobine de excitație).

Teorema a I-a a lui Kirchhoff este o consecință a legii fluxului magnetic (fig. 4-27, *b*) :

$$\int_{S_i} \bar{B}\,d\bar{s}=0=\int_{S_1} \bar{B}\,d\bar{s}+\int_{S_2} \bar{B}\,d\bar{s}+\int_{S_3} \bar{B}\,d\bar{s}, \qquad (4\text{-}55)$$

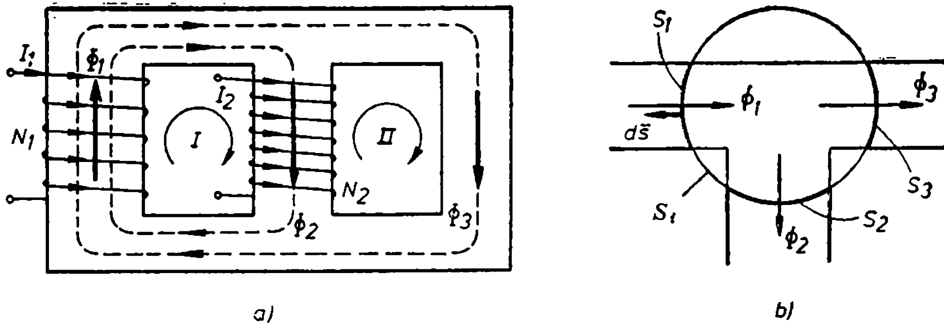


Fig. 4-27. Ochiuri ale circuitului magnetic (*a*) și nod al circuitului magnetic (*b*).

unde s-a ținut seama că numai prin suprafețele S_1, S_2 și S_3, B este diferit de zero, prin restul suprafeței închise S_i inducția fiind nulă.

Pe baza definiției fluxului magnetic printr-o suprafață deschisă, relația (4-55) **devine** :

$$-\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3=0 \qquad (4\text{-}56)$$

sau, în general

$$\sum_{\nu=1}^{n} \Phi_\nu=0, \qquad (4\text{-}57)$$

adică *suma algebrică a fluxurilor magnetice din secțiunile laturilor concurente într-un nod al unui circuit magnetic este egală cu zero.* Sînt pozitive fluxurile orientate dinspre nod și negative cele orientate înspre nod.

Teorema a II-a a lui Kirchhoff se aplică pentru ochiuri ale circuitului magnetic și se enunță în modul următor : *suma algebrică a tensiunilor magnetomotoare* (solenațiilor) *ce acționează într-un ochi al circuitului magnetic este egală cu suma algebrică a căderilor de tensiune magnetică din acel ochi* :

$$\sum_{\nu=1}^{l} U_{m\nu}=\sum_{\nu=1}^{l} \Phi_\nu R_{m\nu}, \qquad (4\text{-}58)$$

unde l este numărul de laturi ale ochiului. Pentru aplicarea acestei teoreme **este necesar** să se stabilească anticipat, arbitrar, un sens de referință în ochiul de **circuit** în raport cu care se stabilește semnul fiecărei tensiuni magneto-

motoare (solenații), respectiv a căderilor de tensiune magnetică. Pentru circuitul ramificat din fig. 4-27, *a*, rezultă :

— pentru ochiul *I* :

$$\oint \bar{H}\, d\bar{l} = N_1 I_1 - N_2 I_2 = \Phi_1 R_{m1} + \Phi_2 R_{m2},$$

— pentru ochiul *II* :

$$\oint \bar{H}\, d\bar{l} = N_2 I_2 = -\Phi_2 R_{m2} + \Phi_3 R_{m3},$$

unde Φ_1, Φ_2 și Φ_3 sînt fluxurile magnetice prin secțiunile celor trei laturi ale circuitului, iar R_{m1}, R_{m2} și R_{m3} sînt rezistențele magnetice ale acestor laturi.

Cele explicate mai sus referitor la teoremele lui Kirchhoff permit o reprezentare simbolică a circuitului magnetic ramificat din fig. 4-27, *a* prin schema echivalentă din fig. 4-28. O astfel de reprezentare este valabilă pentru orice circuit magnetic, oricît de complex ar fi. Pe această bază, calculul circuitelor (rețelelor) magnetice se face în mod analog cu calculul rețelelor electrice, cu următoarea corespondență între mărimi : $\Phi \Leftrightarrow I$, $U_m \Leftrightarrow U_e$, $R_m \Leftrightarrow R$, $V \Leftrightarrow V_H$.

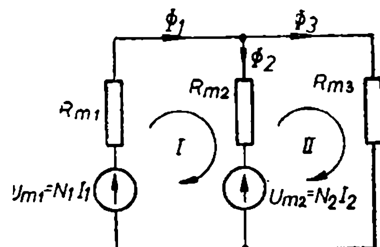


Fig. 4-28. Schema echivalentă a circuitului magnetic.

4.8.3. CALCULUL CIRCUITELOR MAGNETICE PREVĂZUTE CU BOBINE DE EXCITAȚIE

Calculul circuitelor magnetice prevăzute cu bobine de excitație se referă la următoarele probleme :

1. Determinarea secțiunii și lungimii circuitului magnetic.

2. La dimensiuni geometrice date, să se determine solenația (amperspirele), astfel ca în întrefierul circuitului magnetic să se realizeze o inducție magnetică de o anumită valoare (circuitele magnetice prevăzute cu întrefier sînt cele mai des întîlnite în construcția mașinilor și aparatelor electrice).

3. Determinarea inducției magnetice în întrefier (sau a fluxului) pentru o solenație dată și dimensiuni geometrice cunoscute ale circuitului.

Rezolvarea primei probleme este simplă, în sensul că pentru a realiza un anumit flux magnetic în miezul circuitului, se determină secțiunea acestui miez, astfel ca inducția magnetică să aibă o valoare corespunzătoare zonei nesaturate, sau în apropierea cotului curbei de magnetizare, a materialului folosit pentru realizarea miezului. În ceea ce privește lungimea circuitului magnetic, aceasta rezultă din considerente constructive.

Pentru problema a doua, modul de rezolvare se arată cu referire la o situație concretă. Se consideră circuitul magnetic neomogen din fig. 4-26. Fie $B_{\delta 1}$ valoarea impusă a inducției magnetice în întrefier, pentru care rezultă :

$$H_{\delta 1} = \frac{B_{\delta_1}}{\mu_0}. \tag{4-59}$$

Neglijînd dispersia, fluxul magnetic în secţiunea S_f a miezului şi în secţiunea S_δ a întrefierului este acelaşi

$$\Phi = B_{f_1} S_f = B_{\delta_1} S_\delta, \tag{4-60}$$

de unde rezultă :

$$B_{f_1} = \frac{S_\delta}{S_f} B_{\delta_1}. \tag{4-61}$$

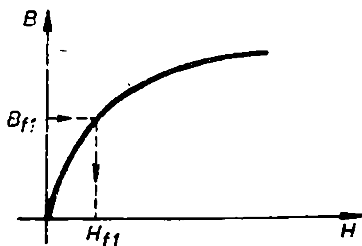


Fig. 4-29. Curba de magnetizare.

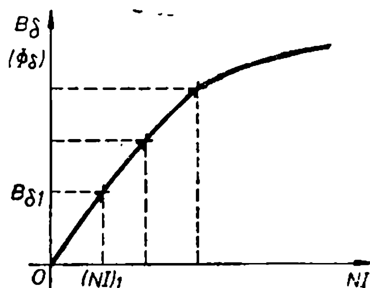


Fig. 4-30. Caracteristica de magnetizare.

Cunoscînd curba de magnetizare $B(H)$ a materialului feromagnetic din care este realizat miezul (fig. 4-29), pentru B_{f_1} calculat cu relaţia (4-61) rezultă H_{f_1}. Apoi, aplicînd legea circuitului magnetic, se obţine :

$$H_{f_1} l_f + H_{\delta_1} \delta = (NI)_1. \tag{4-62}$$

Astfel se determină solenaţia $(NI)_1$ care asigură în întrefier inducţia B_{δ_1}. Dacă numărul N de spire este impus, rezultă cît trebuie să fie curentul I, astfel ca amperspirele să fie $(NI)_1$.

Problema a treia se rezolvă calculînd mai întîi *caracteristica de magnetizare a circuitului* : $B_\delta (NI)$ sau $\Phi_\delta (NI)$. Această caracteristică se determină punct cu punct, după procedeul indicat la problema a doua, avînd o aliură asemănătoare curbei de magnetizare (fig. 4-30). Apoi, din această caracteristică, la valoarea dată a solenaţiei, se citeşte valoarea inducţiei în întrefier.

Se atrage atenţia asupra deosebirii dintre curba de magnetizare şi caracteristica de magnetizare. Prima se referă la un anumit material feromagnetic şi reprezintă $B(H)$ iar a doua se referă la un circuit magnetic neomogen şi reprezintă $B_\delta (NI)$, sau $\Phi_\delta (NI)$.

4.8.4. CALCULUL CIRCUITELOR CU MAGNEŢI PERMANENŢI

Se consideră circuitul din fig. 4-31, realizat cu un magnet permanent, cu dimensiunile precizate în figură. În fig. 4-32 este reprezentată porţiunea situată în cadranul doi a ciclului de histerezis a materialului din care este realizat magnetul permanent. Se are în vedere faptul că mediul magnetului se găseşte în stare de polarizare magnetică permanentă, vectorul de magnetizare

$\bar{M}_f$ fiind diferit de zero în punctele acestui mediu. În întrefier $\bar{M}_\delta = 0$. Liniile inducției magnetice $\bar{B}$ sînt închise, adică au același sens în mediul magnetului și în întrefier (cîmp de vectori eminamente solenoidal). În ceea ce privește intensitatea $\bar{H}$ a cîmpului magnetic, acesta este produs de sarcinile magnetice $+Q_m$ și $-Q_m$ (mărimi de calcul), situate la cei doi poli ai magnetului

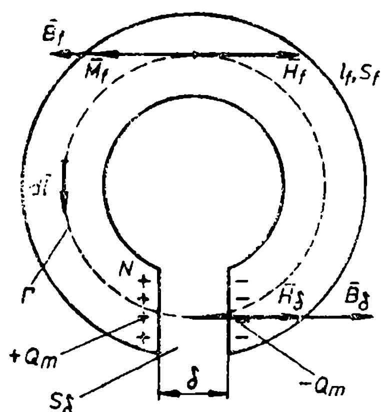


Fig. 4-31. Magnet permanent.

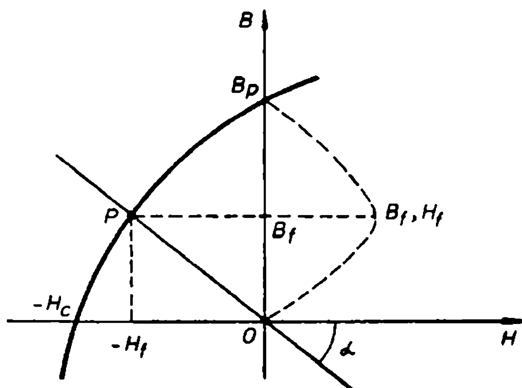


Fig. 4-32. Curbe de calcul ale circuitului magnetic cu magnet permanent.

permanent, ceea ce conferă caracterul potențial al acestui cîmp, orientat de la sarcinile magnetice pozitive spre cele negative. Ca urmare, $\bar{H}_f$ din interiorul magnetului are rol demagnetizant (este opus lui $\bar{B}_f$), motiv pentru care referirile se fac la porțiunea ciclului de histerezis din cadranul doi ($B_f > 0$, $H_f < 0$).

Legea legăturii dintre $\bar{B}$, $\bar{H}$ și $\bar{M}$ se exprimă prin următoarele relații scrise pentru punctele din interiorul magnetului și pentru punctele din întrefier :

$$\bar{B}_f = \mu_0 \bar{H}_f + \bar{M}_f, \quad \bar{B}_\delta = \mu_0 \bar{H}_\delta. \tag{4-63}$$

Aplicînd legea circuitului magnetic pentru conturul închis Γ, se obține :

$$\oint_\Gamma \bar{H}\, d\bar{l} = -H_f l_f + H_\delta \delta = 0, \tag{4-64}$$

unde semnul minus rezultă din produsul scalar al vectorilor $\bar{H}_f$ și $d\bar{l}$ care sînt în opoziție.

Fluxul magnetic în secțiunea magnetului și în întrefier este același, adică :

$$\Phi = B_\delta S_\delta = B_f S_f. \tag{4-65}$$

Din aceste relații se determină inducția magnetică în miez :

$$B_f = \frac{S_\delta}{S_f} B_\delta = \mu_0 \frac{l_f S_\delta}{\delta S_f} H_f \text{ sau } B_f = -\mu_0 \frac{l_f S_\delta}{\delta S_f} (-H_f). \tag{4-66}$$

Această relație exprimă o dreaptă (fig. 4-32) care fixează punctul de funcționare P pe caracteristica magnetului permanent. Panta dreptei este :

$$\text{tg}\, \alpha = -\mu_0 \frac{l_f S_\delta}{\delta S_f} \tag{4-67}$$

și depinde de lungimea δ a întrefierului.

Din relațiile

$$B_\delta = \frac{S_f}{S_\delta} B_f, \quad B_\delta = \mu_0 H_\delta = \mu_0 \frac{l_f}{\delta} H_f$$

se obține următoarea expresie pentru inducția magnetică în întrefier:

$$B_\delta = \sqrt{\mu_0 \frac{l_f S_f}{\delta S_\delta} B_f H_f}, \tag{4-68}$$

de unde se remarcă faptul că B_δ depinde de produsul $B_f H_f$, a cărui valoare maximă are loc pentru o anumită poziție a punctului P, adică pentru o anumită valoare (optimă) a întrefierului δ.

Cîmpul demagnetizant H_f are, în timp, efect dăunător asupra calității magnetului permanent. Din fig. 4-31 și din relația (4-67) rezultă că $H_f=0$ pentru $\delta=0$. Din acest motiv, păstrarea magneților permanenți se face așezînd între poli o bucată de material feromagnetic (pentru a obține $\delta=0$).

Din relația (4-66) se deduce:

$$H_f = \frac{\delta S_f}{l_f S_\delta} \frac{B_f}{\mu_0} = k \frac{B_f}{\mu_0}, \tag{4-69}$$

unde $k = \frac{\delta S_f}{l_f S_\delta}$ se numește *factor de demagnetizare*.

Dacă în construcția circuitului magnetic cu magnet permanent intervin și piese polare feromagnetice (fig. 4-24, *a*), calculul circuitului magnetic se face neglijînd intensitatea cîmpului magnetic din aceste piese.

Circuitele magnetice cu magneți permanenți sînt folosite în special la instrumentele electrice de măsurat.

Aplicația 4-6. Un circuit magnetic toroidal (fig. 4-26), realizat din tole, are lungimea mijlocie a miezului $l_f=13$ cm, întrefierul $\delta=1$ cm și secțiunile $S_f=1{,}77$ cm², $S_\delta=2$ cm².

Numărul de spire al bobinei de excitație este $N=800$, iar curba de magnetizare a materialului este dată prin valorile din următoarea tabelă:

B [T]	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
H [AS/m]·10²	0,8	1,2	1,5	1,88	2,75	4	7,5	17	32	60	105

Să se determine curentul I din bobină, astfel ca inducția magnetică în întrefier să fie $B_\delta=0{,}8$ T. Dispersia se neglijează.

Rezolvare. Se obțin:

$$H_\delta = \frac{B_\delta}{\mu_0} = \frac{0{,}8}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 63{,}8 \cdot 10^4 \text{ AS/m},$$

$$B_f = \frac{S_\delta}{S_f} B_\delta = \frac{2}{1{,}77} 0{,}8 = 0{,}9 \text{ T}.$$

La această valoare a lui B_f, din curba de magnetizare rezultă: $H_f=1{,}5 \cdot 10^2$ AS/m.

Aplicînd legea circuitului magnetic se obține:

$$\oint \overline{H}\, d\overline{l} = H_f l_f + H_\delta \delta = NI,$$

adică :

$$I=\frac{H_f l_f+H_\delta \delta}{N}=8 \text{ A}.$$

Se remarcă faptul că cele mai multe amperspire sînt necesare pentru crearea cîmpului magnetic în întrefier, 6 380 AS față de 19,5 AS, corespunzătoare miezului.

4.9. ÎNLĂNȚUIRI MAGNETICE ȘI INDUCTANȚE

4.9.1. ÎNLĂNȚUIRI MAGNETICE

Pentru definirea noțiunii de înlănțuire magnetică se consideră o bobină cu N_1 spire, parcursă de curetul i_1, care produce un cîmp magnetic, și o a doua bobină, cu N_2 spire, așezată în apropiere de prima bobină, care nu este parcursă de curent (fig. 4-33). Cele două bobine fiind considerate cu spire concentrate, liniile cîmpului magnetic creat de curentul din prima bobină înlănțuie complet spirele primei bobine și numai o parte din aceste linii înlănțuie și spirele bobinei a doua.

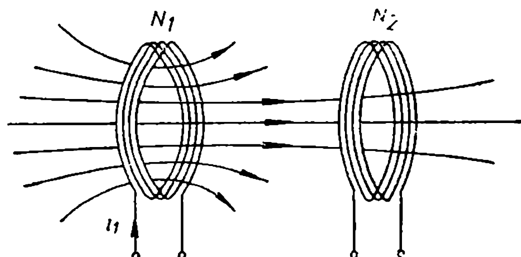


Fig. 4-33. Două bobine cuplate magnetic.

Fluxul magnetic determinat de liniile care înlănțuie ambele bobine, notat cu Φ_{11} pentru secțiunea primei bobine și cu Φ_{12} pentru secțiunea bobinei a doua, se numește *flux util*, iar fluxul magnetic determinat de liniile care înlănțuie numai prima bobină se numește *flux de dispersie* și se notează cu Φ_{1d}. Fluxul total prin secțiunea primei bobine este :

$$\Phi_1=\Phi_{11}+\Phi_{1d}. \tag{4-70}$$

Avînd în vedere că $\Phi=\int \bar{B}\, d\bar{s}$, trebuie precizat sensul elementului de suprafață $d\bar{s}$ pentru cele două bobine, ceea ce se face cu regula burghiului drept în funcție de sensul de referință din fiecare bobină. Pentru prima bobină, sensul de referință se alege același cu sensul curentului i_1 și rezultă valori pozitive pentru fluxurile Φ_{11} și Φ_{1d}. În schimb, pentru a doua bobină, care nu este parcursă de curent, sensul de referință ales conduce fie la valoare pozitivă, fie la valoare negativă pentru fluxul Φ_{12}. Mai trebuie subliniat că fluxurile Φ_{11} și Φ_{12} au aceeași valoare $\Phi_{11}=|\Phi_{12}|$, deoarece sînt determinate de același număr de linii ale cîmpului magnetic.

Se numește înlănțuire magnetică, notată cu ψ, produsul dintre fluxul magnetic Φ din secțiunea unei bobine și numărul de spire N al bobinei, adică :

$$\psi=\Phi N. \tag{4-71}$$

(Dacă fluxul Φ nu este același prin secțiunea fiecărei spire, se ia în considerare un flux mijlociu). În cazul considerat, se disting : o *înlănțuire magnetică proprie* (totală) a primei bobine $\psi_1=\Phi_1 N_1$, o *înlănțuire magnetică reciprocă* (mutuală)

între prima şi a doua bobină $\psi_{12}=\Phi_{12}N_2$, o *înlănţuire magnetică proprie utilă* a primei bobine $\psi_{11}=\Phi_{11}N_1$ şi o *înlănţuire magnetică de dispersie* a primei bobine $\psi_{1d}=\Phi_{1d}N_1$.

În cazul cînd a doua bobină este parcursă de curentul i_2, se obţin în mod analog înlănţuirile magnetice ψ_2, ψ_{21}, ψ_{22}, ψ_{2d}.

Dacă ambele bobine sînt străbătute simultan de curenţii i_1, respectiv i_2, se obţine un flux magnetic comun $\Phi=\Phi_{12}+\Phi_{21}$, determinat de totalitatea liniilor cîmpului magnetic ce înlănţuie complet ambele bobine, în raport cu care nu se definesc înlănţuiri magnetice.

Considerarea celor două bobine cu spirele concentrate constituie o idealizare, făcută în scopul unei prezentări mai simple a problemei. Realitatea este că spirele nu sînt concentrate şi că fluxul magnetic nu are aceeaşi valoare prin suprafaţa tuturor spirelor bobinei, aşa cum s-a considerat în relaţiile scrise mai sus. În acest caz, aşa cum s-a precizat, se operează cu un flux magnetic mijlociu.

Înlănţuirea magnetică este cunoscută şi sub denumirea de *flux total*.

4.9.2. INDUCTANŢE

Prin inductanţă se înţelege mărimea fizică egală cu raportul dintre înlănţuirea magnetică şi curentul electric care cauzează înlănţuirea respectivă, adică :

$$L=\frac{\psi}{i}. \tag{4-72}$$

Avînd în vedere expresiile din paragraful precedent ale înlănţuirilor magnetice, rezultă :

— inductanţa proprie :

$$L_1=\frac{\psi_1}{i_1}=\frac{\Phi_1N_1}{i_1},\quad L_2=\frac{\psi_2}{i_2}=\frac{\Phi_2N_2}{i_2}; \tag{4-73}$$

— inductanţa reciprocă (mutuală) :

$$L_{12}=\frac{\psi_{12}}{i_1}=\frac{\Phi_{12}N_2}{i_1},\quad L_{21}=\frac{\psi_{21}}{i_2}=\frac{\Phi_{21}N_1}{i_2}; \tag{4-74}$$

— inductanţa proprie utilă :

$$L_{11}=\frac{\psi_{11}}{i_1}=\frac{\Phi_{11}N_1}{i_1},\quad L_{22}=\frac{\psi_{22}}{i_2}=\frac{\Phi_{22}N_2}{i_2}; \tag{4-75}$$

— inductanţa de dispersie :

$$L_{1d}=\frac{\psi_{1d}}{i_1}=\frac{\Phi_{1d}N_1}{i_1},\quad L_{2d}=\frac{\psi_{2d}}{i_2}=\frac{\Phi_{2d}N_2}{i_2}. \tag{4-76}$$

Ţinînd seama de relaţia (4-70), se obţine :

$$L_1=L_{11}+L_{1d},\ L_2=L_{22}+L_{2d}. \tag{4-77}$$

Se precizează că inductanţele mutuale L_{12}, L_{21} sînt pozitive sau negative, după cum fluxurile Φ_{12}, Φ_{21} sînt pozitive sau negative.

Unitatea de măsură pentru inductanţă în sistemul de unităţi MKSA poartă denumirea de henry [H].

În continuare se prezintă două exemple de calcul în care se arată cum se exprimă inductanțele în funcție de numărul de spire și rezistența magnetică.

a. Inductanța proprie a unei bobine cu miez (fig. 4-34) se calculează în felul următor:

$$L = \frac{\psi}{i} = \frac{\Phi N}{i} = \frac{N^2}{R_m}, \tag{4-78}$$

unde

$$\Phi = \frac{Ni}{R_m} \text{ și } R_m = \frac{l}{\mu S}.$$

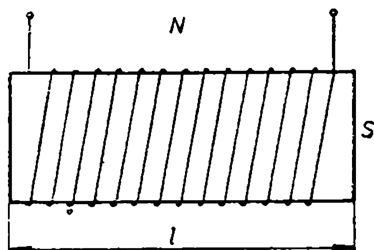


Fig. 4-34. Bobină cilindrică cu miez.

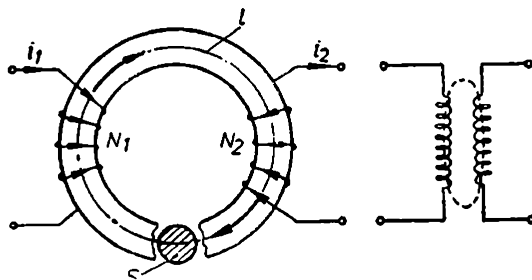


Fig. 4-35. Transformatorul electric monofazat.

Deci:

$$L = \mu \frac{N^2}{l} S, \tag{4-79}$$

în care s-au notat cu l lungimea bobinei (miezului) și cu S secțiunea. În aceste relații s-a neglijat cîmpul magnetic din exteriorul bobinei, deoarece $\mu \gg \mu_0$.

b. Se consideră două bobine, avînd N_1 și N_2 spire așezate pe un circuit magnetic comun, așa cum este cazul transformatorului monofazat (fig. 4-35). Dacă se neglijează fluxul de dispersie, adică se consideră o înlănțuire completă între cele două bobine, avem:

$$\Phi_1 = \Phi_{11} = \frac{N_1 i_1}{R_m}, \quad \Phi_2 = \Phi_{22} = \frac{N_2 i_2}{R_m}; \tag{4-80}$$

și

$$L_1 = L_{11} = \frac{N_1^2}{R_m}, \quad L_2 = L_{22} = \frac{N_2^2}{R_m}. \tag{4-81}$$

Ținînd seama de sensurile curenților din cele două bobine, rezultă: $\Phi_{12} = \Phi_{11} = \Phi_1$ și $\Phi_{21} = \Phi_{22} = \Phi_2$, cu care inductanțele mutuale devin:

$$L_{12} = \frac{\Phi_1 N_2}{i_1} = \frac{N_1 N_2}{R_m}, \quad L_{21} = \frac{\Phi_2 N_1}{i_2} = \frac{N_2 N_1}{R_m}. \tag{4-82}$$

Din relațiile (4-81) și (4-82) rezultă:

$$L_{12} = L_{21} = \sqrt{L_1 L_2}, \tag{4-83}$$

relație care corespunde cuplajului magnetic complet între cele două bobine. În realitate, cuplajul dintre cele două bobine nu este complet, iar relația (4-83) se scrie sub forma:

$$L_{12} = L_{21} = k\sqrt{L_1 L_2}, \tag{4-84}$$

unde $k < 1$ este un coeficient denumit *factor de cuplaj magnetic*.

Aplicaţia 4-7. Să se calculeze inductanţa proprie a unei linii formată din două conductoare paralele (fig. 4-36).

Rezolvare. Se notează cu d distanţa dintre cele două conductoare şi cu r_0 raza secţiunii unui conductor. Inducţia magnetică la distanţa x, respectiv $d-x$ de cele două conductoare, conform teoremei lui Biot-Savart Laplace, este:

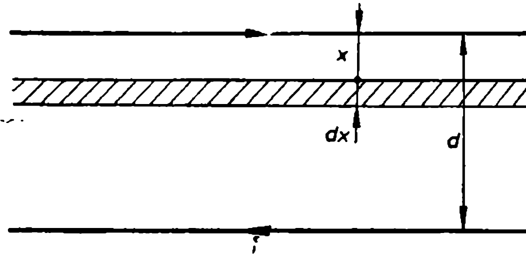


Fig. 4-36. Figură explicativă pentru calculul inductanţei proprii a unei linii bifilare.

$$B=\mu_0 \frac{i}{2\pi}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{d-x}\right),$$

unde i este curentul din conductoare.

Fluxul magnetic prin suprafaţa cuprinsă între cele două conductoare se calculează astfel:

$$d\Phi = Bl\,dx = \mu_0 \frac{i}{2\pi}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{d-x}\right) l\,dx,$$

$$\Phi=\mu_0 \frac{il}{2\pi}\int_{r_0}^{d-r_0}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{d-x}\right)dx=\mu_0 \frac{il}{4\pi}\ln\frac{d-r_0}{r_0}$$

unde l este lungimea liniei.

Inductanţa pe unitatea de lungime a liniei este:

$$L=\frac{\Phi}{il}=\frac{\mu_0}{4\pi}\ln\frac{d-r_0}{r_0}.$$

4.9.3. LEGAREA ÎN SERIE A DOUĂ BOBINE CUPLATE MAGNETIC

Bobinele legate în serie sînt parcurse de acelaşi curent şi fiind cuplate magnetic, pot fi legate în serie adiţional sau în opoziţie.

Legarea în serie adiţională se realizează ca în fig. 4-37, rezultînd inductanţele mutuale L_{12} şi L_{21} pozitive. Inductanţa totală a celor două bobine este:

$$L=L_1+L_2+L_{12}+L_{21} \tag{4-85}$$

sau, avînd în vedere că: $L_{12}=L_{21}=M$, rezultă:

$$L=L_1+L_2+2\,M. \tag{4-86}$$

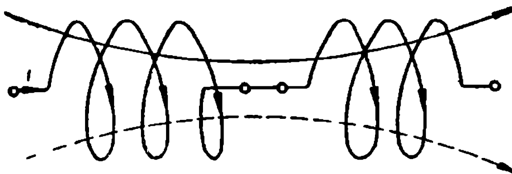


Fig. 4-37. Două bobine legate în serie şi cuplate magnetic adiţional.

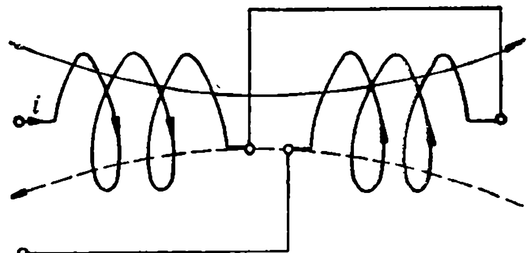


Fig. 4-38. Două bobine legate în serie şi cuplate magnetic în opoziţie.

Legarea în serie în opoziție se realizează ca în fig. 4-38, rezultînd inductanțele mutuale L_{12} și L_{21} negative (adică $-L_{12}$ și $-L_{21}$). În acest caz, inductanța totală a celor două bobine este :

$$L = L_1 + L_2 - L_{12} - L_{21} = L_1 + L_2 - 2M. \qquad (4\text{-}87)$$

Dacă : $L_1 = L_2 = M$, rezultă $L = 0$. O astfel de situație o avem la rezistoarele etalon, lipsite de inductanță, bobinate cu fir dublu (fig. 4-39).

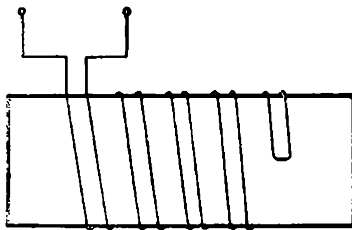


Fig. 4-39. Rezistor bobinat în dublu sens.

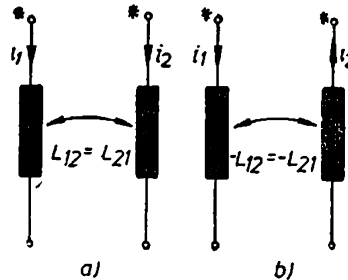


Fig. 4-40. Marcajul bornelor la bobinele cuplate magnetic :
a — adițional; *b* — în opoziție.

În general bobinele cuplate magnetic pot fi parcurse de același curent (cînd sînt legate în serie) sau de curenți diferiți. Natura cuplajului, adițional sau în opoziție, depinde atît de sensul curentului în fiecare bobină, cît și de sensul de bobinare. Bobinele au cîte una din borne marcată cu steluță (sau alt semn), cu scopul de a cunoaște cum se realizează cuplajul magnetic, adițional sau în opoziție. Regula este următoarea : dacă curenții intră (sau ies) în cele două bobine prin bornele marcate, cuplajul magnetic este adițional (fig. 4-40, *a*) și dacă curenții au sensuri opuse față de bornele marcate, cuplajul magnetic este în opoziție (4-40, *b*).

4.10. ENERGIA MAGNETICĂ

În cîmpul magnetic este înmagazinată o formă de energie, numită **energie magnetică**.

S-a arătat că asupra conductoarelor parcurse de curent și a corpurilor magnetizate, situate în cîmpul magnetic, acționează forțe. Prin intermediul lucrului mecanic determinat de aceste forțe apare energia cinetică. Conform principiului de conservare a energiei, energia cinetică nu poate apare decît prin transformarea unei alte forme de energie care, în cazul de față, este energia înmagazinată în cîmpul magnetic. Deci, forțele exercitate de cîmpul magnetic evidențiază posibilitatea transformării energiei magnetice în alte forme de energie prin intermediul lucrului mecanic.

În cele ce urmează se stabilesc relații de calcul a energiei magnetice pe baza unor considerații simple, așa cum s-a procedat și la stabilirea relațiilor de calcul a energiei înmagazinate în cîmpul electric.

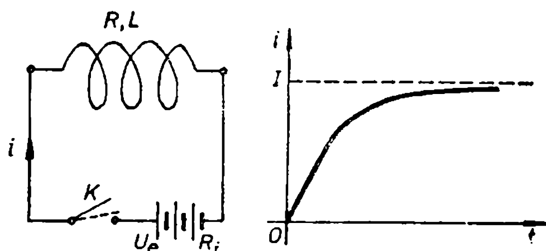


Fig. 4-41. Conectarea unei bobine la o sursă de c.c.:
a — schema electrică; b — variația în timp a curentului.

Se consideră în fig. 4-41, *a* o bobină cu rezistența R și inductanța L care, prin închiderea întreruptorului K, se alimentează de la sursa de c.c. cu t.e.m. U_e și rezistența interioară R_i. Curentul în circuit nu se stabilește instantaneu la valoarea $I=\frac{U_e}{R+R_i}$, ci după curba exponențială ce tinde asimptotic spre această valoare (fig. 4—41, *b*). Bobina fiind parcursă de un curent variabil i, conform legii inducției electromagnetice apare o t.e.m. indusă:

$$u_{eL}=-L\frac{di}{dt}. \tag{4-88}$$

Prin aplicarea teoremei a II-a a lui Kirchhoff circuitului din fig. 4-41, *a*, rezultă:

$$U_e+u_{eL}=(R+R_i)\,i, \tag{4-89}$$

din care se deduce relația:

$$U_e i\,dt=(R+R_i)\,i^2\,dt+Li\,di, \tag{4-90}$$

unde

$U_e i\,dt$ este energia dată de sursă,

$(R+R_i)\,i^2dt$ — energia calorică dezvoltată prin efect J—L,

$Li\,di$ — energia înmagazinată în cîmpul magnetic.

Deci, energia înmagazinată în cîmpul magnetic al bobinei în timpul dt este:

$$dW_m=Li\,di=i\,d\,(Li)=i\,d\psi=\frac{\psi}{L}\,d\psi=\frac{1}{L}\,d\left\{\frac{\psi^2}{2}\right\}. \tag{4-91}$$

Prin integrare rezultă:

$$W_m=\frac{1}{L}\int_0^{\psi}d\,\frac{\psi^2}{2}=\frac{1}{2}\frac{\psi^2}{L}\ \text{sau}\ W_m=\frac{1}{2}\,\psi i=\frac{1}{2}\,Li^2, \tag{4-92}$$

unde s-a ținut seama ca $\psi=Li$ și $L=$const.

Pentru $i=I$ se obține:

$$W_m=\frac{1}{2}\,\psi I=\frac{1}{2}\,LI^2. \tag{4-93}$$

În general, dacă cîmpul magnetic este produs de n bobine cuplate magnetic și parcurse de curenți variabili, neglijînd fluxurile magnetice de dispersie, se obține pentru energia magnetică expresia:

$$W_m=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}L_{jk}i_ji_k=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\psi_{jk}i_k. \tag{4-94}$$

Din această relație generală se deduce următoarea expresie a energiei înmagazinate în cîmpul magnetic creat de două bobine cuplate magnetic, neglijînd fluxul de dispersie :

$$W_m = \frac{1}{2}(\psi_{11}i_1 + \psi_{21}i_1 + \psi_{12}i_2 + \psi_{22}i_2). \qquad (4\text{-}95)$$

Dacă se ține seama și de fluxurile de dispersie, relația energiei magnetice devine :

$$W_m = \frac{1}{2}(\psi_{11}i_1 + \psi_{1d}i_1 + \psi_{21}i_1 + \psi_{12}i_2 + \psi_{22}i_2 + \psi_{2d}i_2)$$

sau

$$W_m = \frac{1}{2}(\psi_1 i_1 + \psi_{21}i_1 + \psi_{12}i_2 + \psi_2 i_2), \qquad (4\text{-}96)$$

unde

$$\psi_1 = \psi_{11} + \psi_{1d}, \quad \psi_2 = \psi_{22} + \psi_{2d}.$$

Relația (4-96) se mai poate scrie în forma :

$$W_m = \frac{1}{2}(L_1 i_1^2 + L_{21}i_2 i_1 + L_{12}i_1 i_2 + L_2 i_2^2), \qquad (4\text{-}97)$$

unde se poate introduce $L_{12} = L_{21} = M$, cu precizarea că termenul Mi_1i_2 reprezintă energia de interacțiune dintre cele două bobine. Dacă se modifică poziția relativă a celor două bobine, se schimbă valoarea inductanței reciproce, deci se schimbă energia magnetică de interacțiune.

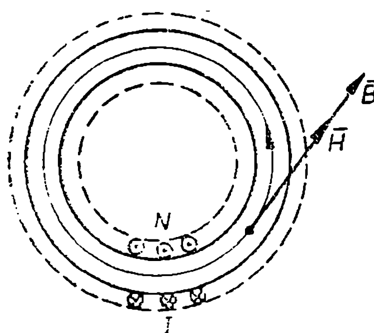


Fig. 4-42. Bobină toroidală.

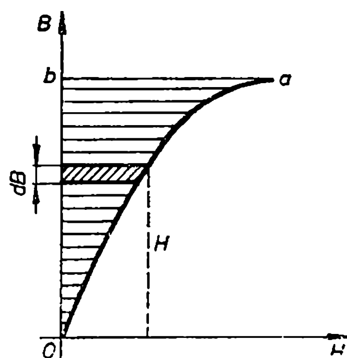


Fig. 4-43. Figură explicativă pentru calculul energiei magnetice înmagazinată într-un miez feromagnetic (în unitatea de volum).

Energia magnetică se poate exprima sub o formă mai generală, în funcție de mărimile de stare $\bar{B}$ și $\bar{H}$ ale cîmpului magnetic. Se consideră în acest sens o bobină toroidală de diametru mare și secțiune neglijabilă (fig. 4-42), avînd N spire parcurse de curentul I. Cîmpul magnetic din interiorul acestei bobine poate fi considerat ca un tub de cîmp elementar cu $\bar{B}$ și $\bar{H}$ constanți în punctele secțiunii bobinei.

Conform relației (4-93), energia înmagazinată în cîmpul magnetic al bobinei este :

$$W_m = \frac{1}{2}\psi I = \frac{1}{2}\Phi N \frac{Hl}{N} = \frac{1}{2} HBSl,$$

unde s-a ținut seama că $\psi = \Phi N = BSN$ și $I = \frac{Hl}{N}$, l fiind lungimea **bobinei, iar** S **secțiunea.**

Volumul spațiului în care există cîmp magnetic este $O = Sl$. Deci, energia **magnetică înmagazinată în unitatea de volum este :**

$$w_m = \frac{W_m}{O} = \frac{1}{2} HB \text{ [J/m}^3\text{]}$$

sau, avînd în vedere că vectorii $\bar{H}$ și $\bar{B}$ sînt coliniari, rezultă :

$$w_m = \frac{1}{2}\bar{H}\bar{B}. \tag{4-98}$$

De aici rezultă forma generală de exprimare a energiei cîmpului magnetic produs de curenți liberi :

$$W_m = \frac{1}{2}\int_0 \bar{H}\bar{B}\, \mathrm{d}o. \tag{4-99}$$

Pentru cîmpul produs de corpuri magnetizate (magneții permanenți) expresia energiei magnetice din unitatea de volum este :

$$w_m = \int_0^B \bar{H}\, \mathrm{d}\bar{B} = \int_0^B H\, \mathrm{d}B. \tag{4-100}$$

Cu această ultimă relație se determină energia înmagazinată în unitatea de volum a unui material feromagnetic magnetizat. În acest sens se ține seama de variația lui B **în funcție de** H **reprezentată prin curba de magnetizare (fig. 4-43). Integrala** $\int_0^B H\, \mathrm{d}B$ **este reprezentată prin suprafața** Oab **cuprinsă între curba de magnetizare și axa verticală, care, la o anumită scară, reprezintă tocmai energia magnetică înmagazinată în unitatea de volum a materialului feromagnetic. În mod asemănător se poate arăta că pierderile prin histerezis sînt proporționale cu suprafața cuprinsă de ciclul de histerezis.**

4.11. FORȚE ÎN CÎMPUL MAGNETIC

În timp ce forțele determinate de cîmpul electric au valori relativ mici, forțele determinate de cîmpul magnetic au valori foarte importante, avînd numeroase aplicații tehnice : motoare electrice, electromagneți, relee etc. Calculul lor se face fie pe baza teoriei forțelor generalizate (forțe Lagrange), fie pe baza unor considerațiuni mai simple.

4.11.1. ELEMENTE DIN TEORIA FORŢELOR GENERALIZATE ÎN CÎMPUL MAGNETIC

Se consideră un sistem de n bobine cuplate magnetic, alimentate de la surse exterioare ce au t.e.m. u_e. Bilanţul energetic al sistemului considerat se exprimă prin relaţia :

$$\sum_{k=1}^{n} u_{ek} i_k \, dt = \sum_{k=1}^{n} R_k i_k^2 \, dt + dW_m + dL, \qquad (4\text{-}101)$$

unde

$\sum_{k=1}^{n} u_{ek} i_k \, dt$ este energia primită de la sursele exterioare în timpul dt;

$\sum_{k=1}^{n} R_k i_k^2 \, dt$ — energia disipată prin efect J—L ;

dW_m — variaţia energiei magnetice a sistemului ;

dL — lucrul mecanic elementar determinat de forţele ce acţionează în sistem ;

R_k — rezistenţa electrică a bobinei k.

Lucrul mecanic elementar dL se exprimă prin intermediul forţei generalizate X :

$$dL = X \, dx, \qquad (4\text{-}102)$$

unde x este coordonata generalizată, care poate fi o distanţă sau un unghi. Dacă x este o distanţă, X este o forţă propriu-zisă iar dacă x este un unghi, X este un cuplu.

Prin aplicarea teoremei a II-a a lui Kirchhoff rezultă :

$$u_{ek} + u_{eLk} = R_k i_k, \qquad (4\text{-}103)$$

unde u_{eLk} este t.e.m. indusă în bobina k care, conform legii inducţiei electromagnetice, este :

$$u_{eLk} = -\sum_{j=1}^{n} L_{jk} \frac{di_j}{dt} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{d\psi_{jk}}{dt}. \qquad (4\text{-}104)$$

După înmulţirea cu $i_k \, dt$ şi înlocuirea lui (4-104) în (4-103), se obţine relaţia :

$$u_{ek} i_k \, dt - \sum_{j=1}^{n} i_k \, d\psi_{jk} = R_k i_k^2 \, dt \qquad (4\text{-}105)$$

care, prin însumarea pentru toate bobinele sistemului, devine :

$$\sum_{k=1}^{n} u_{ek} i_k \, dt - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} i_k \, d\psi_{jk} = \sum_{k=1}^{n} R_k i_k^2 \, dt. \qquad (4\text{-}106)$$

Din relaţiile (4-101), (4-102) şi (4-106) se obţine

$$X \, dx = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} i_k \, d\psi_{jk} - dW_m. \qquad (4\text{-}107)$$

În continuare, pentru exprimarea forţei generalizate X, se disting două cazuri :

a. Sub acţiunea forţelor generalizate, modificarea stării sistemului are loc în aşa fel că *fluxul se păstrează constant*, ceea ce înseamnă $d\psi_{jk}=0$. În această situaţie, relaţia (4-107) devine :

$$X\,dx = -dW_m,$$

de unde

$$X = -\left(\frac{dW_m}{dx}\right)_{\Phi=\text{const.}} \tag{4-108}$$

b. Sub acţiunea forţelor generalizate modificarea din sistem are loc în aşa fel încît *curentul se păstrează constant*. În acest caz relaţia (4-107) se poate scrie astfel :

$$X\,dx = d\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} i_k\psi_{jk} - dW_m = dW_m,$$

unde s-a ţinut seama de (4-94). Astfel, rezultă :

$$X = \left(\frac{dW_m}{dx}\right)_{i=\text{const.}} \tag{4-109}$$

Din cele prezentate mai sus referitor la teoria forţelor generalizate, reţinem ca esenţiale relaţiile (4-108) şi (4-109), cunoscute şi sub denumirea de *teoreme ale forţelor generalizate în cîmpul magnetic*. Dacă, în urma calculelor, rezultă pentru forţa generalizată X o valoare pozitivă, aceasta acţionează în sensul majorării coordonatei generalizate x. Forţa generalizată negativă acţionează în sensul micşorării coordonatei generalizate.

Aplicaţia 4-8. O bobină cilindrică de lungime $l=9$ cm şi raza $r=1$ cm are $N=400$ spire parcurse de curentul continu $I=0{,}2$ A. În interiorul bobinei este introdus pe lungimea $x=3$ cm un miez feromagnetic cu permeabilitatea relativă $\mu_r=1\,000$ (fig. 4-44). Să se calculeze :

a. Energia magnetică a sistemului.

b. Forţa ce acţionează asupra miezului.

Se neglijează dispersia şi cîmpul magnetic exterior bobinei.

Fig. 4-44. Bobină cilindrică cu miez parţial introdus în interiorul său.

Rezolvare. a. Energia magnetică este :

$$W_m = \frac{1}{2}\psi I = \frac{1}{2} N\Phi I,$$

unde se înlocuieşte

$$\Phi = \frac{NI}{R_m} = \frac{NI}{R_{m1}+R_{m2}} = \frac{NI}{\dfrac{l-x}{\mu_0 S}+\dfrac{x}{\mu S}},\quad S=\pi r^2$$

şi rezultă :

$$W_m = \frac{1}{2}\,\frac{\mu_0\pi r^2 (NI)^2}{l + x\left(\dfrac{1}{\mu_r}-1\right)}.$$

Înlocuind valorile numerice, se obține $W_m=25{,}2\cdot10^{-6}$ J.

b. Forța ce acționează asupra miezului se calculează cu relația (4-109):

$$F=\left(\frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}x}\right)_{I=\mathrm{const.}}=-\frac{1}{2}\,\frac{\mu_0\pi r^2(NI)^2\left(\frac{1}{\mu_r}-1\right)}{\left[l+x\left(\frac{1}{\mu_r}-1\right)\right]^2}.$$

Deoarece $\frac{1}{\mu_r}-1<0$, rezultă $F>0$, adică această forță acționează în sensul majorării coordonatei Lagrange x (miezul este atras în interiorul bobinei).

Valoarea numerică a forței este: $F=5\cdot10^{-4}$ N.

4.11.2. FORȚA CE ACȚIONEAZĂ ASUPRA UNUI CONDUCTOR PARCURS DE CURENT, AȘEZAT ÎN CÎMPUL MAGNETIC (FORȚA MAGNETOELECTRICĂ)

Se consideră un conductor rectiliniu, de lungime l, parcurs de curentul I și situat între polii unui magnet permanent (cîmp magnetic omogen) (fig. 4-45). Forța ce acționează asupra conductorului se calculează cu formula lui Laplace:

$$\mathrm{d}\bar{F}=I\,[\mathrm{d}\bar{l}\times\bar{B}]. \tag{4-110}$$

Sensul forței se găsește cu ajutorul regulei burghiului drept. Valoarea forței elementare este: $\mathrm{d}F=IB\,\mathrm{d}l$, de unde rezultă:

$$F=IBl. \tag{4-111}$$

S-a ținut seama că unghiul dintre vectorul $\mathrm{d}\bar{l}$, luat în lungul conductorului în sensul curentului, și vectorul $\bar{B}$ este 90° și că inducția magnetică este constantă în tot lungul conductorului.

Această forță, numită magnetoelectrică, are aplicații deosebit de importante. Pe această bază funcționează motoarele electrice, instrumentele de măsurat magnetoelectrice etc.

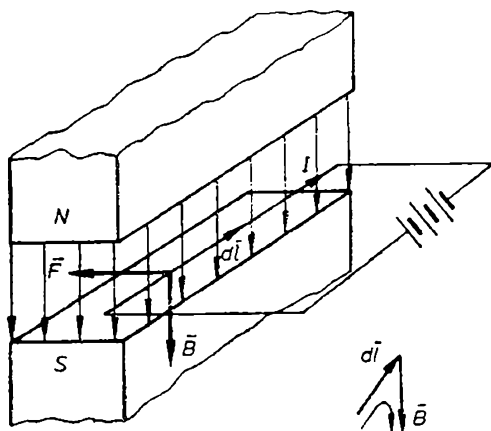


Fig. 4-45. Forța magnetoelectrică.

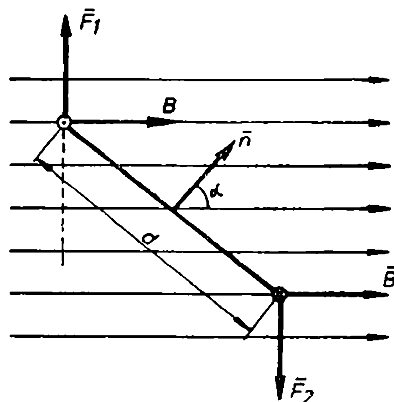


Fig. 4-46. Cuplul de rotire a unei spire dreptunghiulare parcurse de curent, situată în cîmp magnetic uniform.

Aplicația 4-9. Să se calculeze cuplul ce acționează asupra unei spire parcursă de curent, situată în cîmp magnetic omogen.

Rezolvare. Se consideră o spiră dreptunghiulară, de dimensiuni l și d, parcursă de curentul I și situată într-un cîmp magnetic omogen (fig. 4-46). Conform celor arătate mai sus, rezultă $F_1=F_2=IBl$. Cuplul este :

$$C=F_1 d \sin \alpha = IBld \sin \alpha$$

sau

$$\bar{C}=\bar{m}\times\bar{B}=IS\,[\bar{n}\times\bar{B}], \qquad (4-112)$$

unde $IS\bar{n}=\bar{m}$ este momentul magnetic al spirei, $S=ld$ fiind suprafața spirei, iar $\bar{n}$ normala la suprafață, cu sensul determinat cu ajutorul regulei burghiului drept în funcție de sensul curentului prin spiră.

4.11.3. FORȚA DINTRE DOUĂ CONDUCTOARE PARALELE PARCURSE DE CURENT (FORȚA ELECTRODINAMICĂ)

Pentru determinarea forței dintre două conductoare paralele parcurse de curent, se consideră că unul din conductoare este așezat în cîmpul magnetic produs de curentul ce trece prin celălalt conductor (fig. 4-47). Folosind relația (4-110) și cu notațiile din figură, rezultă :

$$\mathrm{d}\bar{F}_1=I_1\,[\mathrm{d}\bar{l}_1\times\bar{B}_2]\,; \quad \mathrm{d}\bar{F}_2=I_2\,[\mathrm{d}\bar{l}_2\times\bar{B}_1].$$

Sensul forțelor $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$ se stabilește cu ajutorul regulei burghiului drept. Pentru determinarea valorilor acestor forțe se efectuează produsele vectoriale, ținînd seama că unghiul dintre $\bar{B}$ (coliniar cu $\bar{H}$) și $\mathrm{d}\bar{l}$ este de 90°. Rezultă :

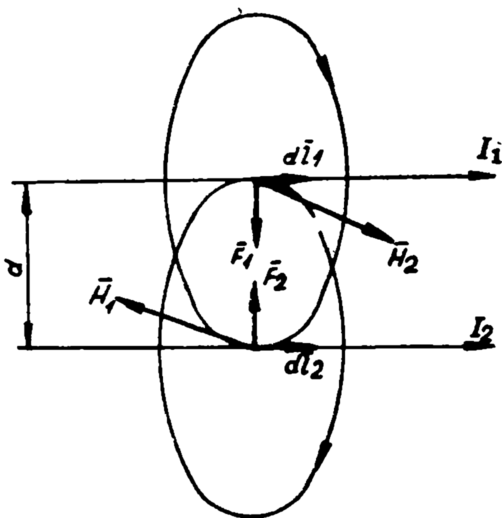


Fig. 4-47. Forța electrodinamică.

$$\mathrm{d}F_1=I_1B_2\,\mathrm{d}l_1\,; \quad \mathrm{d}F_2=I_2B_1\,\mathrm{d}l_2$$

sau, avînd în vedere că B_1 și B_2 sînt constanți în lungul celor două conductoare, se deduce :

$$F_1=I_1B_2l\,; \quad F_2=I_2B_1l,$$

unde l este lungimea, aceeași pentru ambele conductoare.

Ținînd seama de teorema lui Biot-Savart-Laplace, rezultă :

$$B_1=\mu_0\frac{I_1}{2\pi d}\,; \quad B_2=\mu_0\frac{I_2}{2\pi d},$$

unde d este distanța dintre conductoare, iar μ_0 permeabilitatea magnetică a vidului (în cazul de față a aerului).

Deci, valorile forțelor pe unitatea de lungime ($l=1$) sînt :

$$f_1=\mu_0\frac{I_1I_2}{2\pi d}\,; \quad f_2=\mu_0\frac{I_2I_1}{2\pi d}. \qquad (4\text{-}113)$$

În concluzie, conductoarele parcurse de curenți în același sens se atrag și se resping atunci cînd sensul curenților este opus.

Problema prezentată are aplicații la instrumentele de măsurat de tip electrodinamic. De asemenea, pe această bază s-a stabilit și etalonul „amper" folosit în sistemul de unități MKSA ca a patra unitate fundamentală.

4.11.4. ELECTROMAGNEȚI. FORȚA PORTANTĂ

Un electromagnet constă dintr-o bobină așezată pe un miez de fier (jug) și o armătură din material feromagnetic (fig. 4-48). Cînd prin bobină trece curent, armătura este atrasă de către electromagnet. Valoarea limită a acestei forțe, la care armătura nu se desprinde de electromagnet, se numește *forță portantă a electromagnetului*.

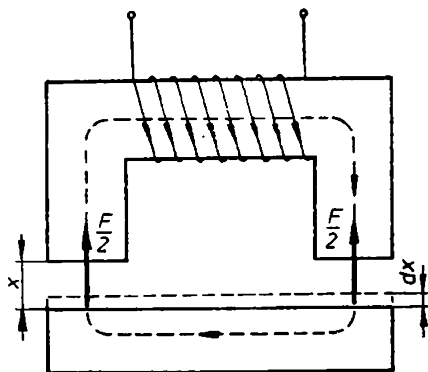


Fig. 4-48. Electromagnet.

Determinarea expresiei de calcul a forței portante se face pe baza forțelor generalizate. Se consideră fluxul constant în secțiunea întrefierului, deci :

$$X = -\left(\frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}x}\right)_{\Phi=\mathrm{const.}}$$

Energia magnetică elementară se determină din relația (4-99), adică: $\mathrm{d}W_m = \frac{1}{2} HB\ \mathrm{d}v$. Admițînd că intensitatea cîmpului magnetic în jug și în armătură este nulă, înseamnă că întreaga energie magnetică este înmagazinată în cîmpul magnetic din întrefier, adică: $W_m = \frac{1}{2} HBSx$, unde S este suprafața activă a electromagnetului iar x este întrefierul. Deci :

$$\mathrm{d}W_m = \frac{1}{2} HBS\,\mathrm{d}x\,; \qquad X = -\frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{2} HBS.$$

Se observă că forța generalizată este negativă, deci acționează în sensul micșorării coordonatei generalizate, adică a întrefierului x.

Forța portantă este :

$$F = |X| = \frac{1}{2\mu_0} B^2 S, \tag{4-114}$$

unde s-a înlocuit $H = \frac{B}{\mu_0}$.

Se constată că forța portantă a electromagnetului este proporțională cu inducția magnetică la patrat. Întrucît valoarea inducției crește pe măsură ce întrefierul se micșorează, forța va fi mai mare cînd intrefierul este mai mic.

În cazul alimentării electromagnetului în curent alternativ, inducția variază sinusoidal, iar forța are variații pulsatorii, cu frecvență dublă față de frecvența de variație a curentului alternativ (fig. 4-49). Așa se explică de ce electromagneții de curent alternativ funcționeaza cu zgomot (vibrații).

Electromagneții au multiple aplicații în construcția aparatelor electrice (relee, contactoare etc.) și în industrie (macarale cu electromagnet, separatoare magnetice, ridicătoare de frînă electromagnetice etc.).

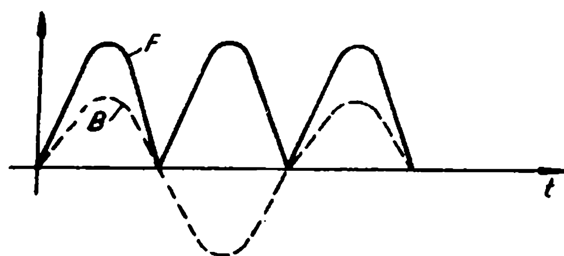


Fig. 4-49. Variația pulsatorie a forței portante la electromagnetul de c.a.

4.11.5. ACȚIUNEA CÎMPULUI MAGNETIC ASUPRA UNEI SARCINI ELECTRICE ÎN MIȘCARE (FORȚA LORENTZ)

Asupra particulelor încărcate cu sarcini electrice și în stare de mișcare într-un cîmp magnetic, se exercită de către cîmpul magnetic o forță, cunoscută sub denumirea de *forță Lorentz*, exprimată prin relația :

$$\bar{F}_B = Q_p \bar{v} \times \bar{B} \tag{4-115}$$

unde Q_p este sarcina electrică a particulei ;
$\bar{v}$ — viteza de mișcare a particulei în cîmpul magnetic ;
$\bar{B}$ — vectorul inducției magnetice .

În fig. 4-50 este reprezentată forța $\bar{F}_B$ pentru cazurile $Q_p>0$ și $Q_p<0$, cu liniile lui $\bar{B}$ perpendiculare pe planul figurii. Sub acțiunea forței lui Lorentz traiectoria de mișcare a particulelor se modifică (linia întreruptă).

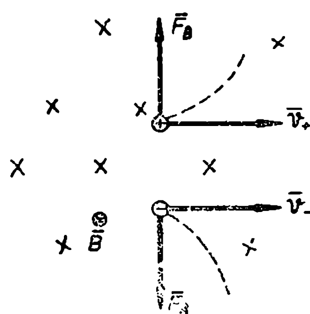


Fig. 4-50. Forța Lorentz.

Expresia forței Lorentz se poate deduce din forța Laplace (relația 4-1) avînd în vedere că $i = \frac{dQ_p}{dt}$, deci:

$$\bar{F}_B = \frac{dQ_p}{dt} d\bar{l} \times \bar{B} = dQ_p \frac{d\bar{l}}{dt} \times \bar{B} = dQ_p \bar{v} \times \bar{B}.$$

Dacă $dQ_p = q$ este sarcina electronului, atunci :

$$\bar{F}_B = q\bar{v} \times \bar{B}. \tag{4-116}$$

Forța Lorentz este de natură neelectrică și poate fi echivalentă cu forța determinată de un cîmp electric imprimat de intensitate :

$$\bar{E}_i = \frac{\bar{F}_B}{q} = \bar{v} \times \bar{B}. \tag{4-117}$$

În general, efectele ce se constată la corpurile conductoare și semiconductoare parcurse de curent și aflate în cîmp magnetic se numesc *efecte galvanomagnetice*. Primul efect de acest gen, descoperit în 1856 de W. Thomson, este *efectul magnetorezistiv*, care constă în modificarea rezistenței electrice a corpului conductor în prezența cîmpului magnetic. Pe această bază se realizează traductorul cu spirală din bismut pentru măsurarea inducției magnetice B.

În 1879, E. H. Hall descoperă efectul galvanomagnetic care îi poartă numele — *efectul Hall* — constînd în următoarele : la o placă conductoare parcursă de curent şi aflată într-un cîmp magnetic, cu liniile de cîmp perpendiculare pe placă, se constată existenţa unei tensiuni între două puncte ale plăcii, echipotenţiale în lipsa cîmpului magnetic. Fenomenul este mult mai pronun-

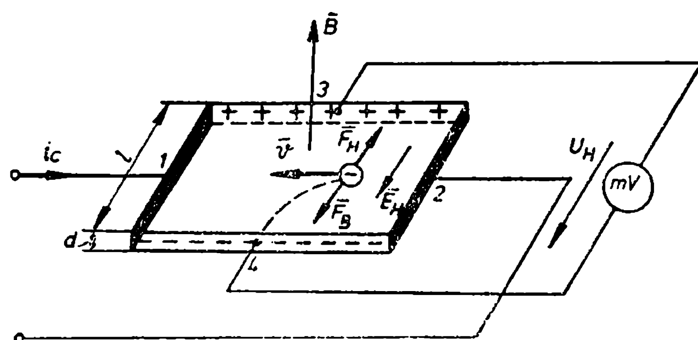


Fig. 4-51. Sonda Hall.

ţat la semiconductoare decît la metale. Explicaţia apariţiei acestei tensiuni, denumită tensiune Hall, este dată de acţiunea forţei Lorentz asupra purtătorilor mobili de sarcini electrice în stare de mişcare ordonată din placă. În fig. 4-51 este reprezentată o astfel de placă, de dimensiuni mici (sondă Hall), situată în cîmpul magnetic de inducţie $\bar{B}$, perpendiculară pe placă, şi prevăzută cu patru electrozi : *1—2* electrozi plini, pentru curentul de comandă i_c şi *3—4* electrozi punctuali pentru culegerea tensiunii Hall u_H, măsurată de milivoltmetrul *mV*.

Curentul i_c din sonda Hall este determinat de mişcarea ordonată, cu viteza $\bar{v}$ a electronilor liberi. Se observă sensul forţei Lorentz $\bar{F}_B$, care face ca pe una din feţele laterale ale sondei să se acumuleze sarcini negative şi pe cea opusă sarcini electrice pozitive. Evident, sarcinile pozitive şi negative de pe cele două feţe opuse determină o diferenţă de potenţial între electrozii *3—4*, adică tensiunea u_H, respectiv intensitatea $\bar{E}_H$ a cîmpului electric în placă. Cîmpul $\bar{E}_H$ intervine cu forţa $\bar{F}_H = q\bar{E}_H$ asupra purtătorilor mobili de sarcini electrice.

Procesul de separare al sarcinilor electrice pozitive şi negative continuă pînă în momentul cînd se creează echilibrul exprimat prin : $\bar{F}_B + \bar{F}_H = 0$, din care se obţine :

$$\bar{E}_H = -\bar{E}_i = -\bar{v} \times \bar{B}. \tag{4-118}$$

În această stare de echilibru, purtătorii mobili de sarcini electrice din sondă au o traiectorie de mişcare ordonată, în linie dreaptă, cu viteza $\bar{v}$.

Densitatea curentului din sondă este :

$$\bar{J} = Nq\bar{v}, \tag{4-119}$$

din care se scoate $\bar{v}$ şi se înlocuieşte în (4-118), rezultînd :

$$\bar{E}_H = -\frac{1}{Nq}\bar{J} \times \bar{B} = K_H \bar{J} \times \bar{B}, \tag{4-120}$$

unde $K_H = -\frac{1}{Nq}$ este constanta Hall, dependentă de natura materialului sondei.

Tensiunea Hall se obține astfel:

$$u_H = \int_{P_3}^{P_4} \bar{E}_H \, d\bar{l} = K_H \int_l \bar{J} \times \bar{B} \, d\bar{l} = K_H B \int_l \frac{i_c}{S} \, dl,$$

adică:

$$u_H = \frac{K_H}{d} i_c B, \tag{4-121}$$

unde l și d sînt lățimea și grosimea plăcuței. Se observă că tensiunea Hall depinde de natura materialului (prin constanta K_H), de grosimea d a plăcuței și este direct proporțională cu valoarea curentului de comandă i_c și a inducției magnetice B (pentru așezarea plăcuței în cîmpul magnetic ca în fig. 4-51).

Sonda Hall, denumită și generatorul Hall, oferă multiple posibilități de măsurare. Spre exemplu, cu ajutorul ei se poate măsura indirect inducția magnetică B, adică, dacă se măsoară i_c și u_H și se cunosc K_H și d, rezultă din (4-121) B.

4.11.6. ACCELERATOARE DE PARTICULE

În fizica nucleară se folosesc diverse tipuri de instalații cu ajutorul cărora se poate imprima o mare energie cinetică particulelor elementare stabile sau cu viață destul de lungă (electroni, protoni, ioni etc.). Accelerarea are loc prin interacțiunea dintre particulele încărcate electric și cîmpurile electric și magnetic, obținute prin mijloace exterioare. Expresia forței ce acționează asupra particulei încărcate cu sarcina Q_p este:

$$\bar{F} = Q_p (\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}). \tag{4-122}$$

Acceleratoarele de particule se deosebesc între ele prin: forma traiectoriei imprimată particulei, natura particulelor accelerate și domeniul de energii realizate etc.

Acceleratoarele liniare imprimă particulelor o traiectorie aproximativ rectilinie, lipsind componenta normală pe traiectorie a inducției cîmpului magnetic.

Acceleratoarele ciclice imprimă particulelor o traiectorie în forma de curbă închisă sau formă de spirală. În ultimul caz, raza de curbură crește pe măsura accelerării.

Tipurile constructive de acceleratoare pot fi împărțite în următoarele patru categorii:

— acceleratoare directe, la care forța de accelerare ce acționează asupra particulelor este determinată de un cîmp electric staționar sau cvazistaționar (în raport cu timpul de tranzit al particulei prin întregul sistem de accelerare): energia imprimată particulelor de aceste acceleratoare este de ordinul 10 MeV, iar traiectoria este rectilinie;

— acceleratoare de inducție, la care cîmpul electric accelerator este creat de cîmpul magnetic variabil în timpul procesului de accelerare; energia imprimată particulelor este de ordinul 10...400 MeV, iar traiectoria poate fi rectilinie sau circulară (exemplu, betatronul asigură 340 MeV);

— acceleratoare rezonante, la care accelerarea se realizează prin trecerea succesivă a fasciculului de particule printre electrozi alimentați cu tensiune de înaltă frecvență; energia asigurată de astfel de acceleratoare este de ordinul

30...30 000 MeV, iar traiectoria particulelor poate fi rectilinie, circulară sau spirală ;

— acceleratoare cu undă progresivă, la care accelerarea se produce sub acțiunea unei unde electromagnetice ghidate în lungul traiectoriei ; energia imprimată particulelor este de ordinul 1 000 MeV, iar traiectoria este rectilinie.

Se studiază în prezent un nou tip de accelerator, bazat pe interacțiunea dintre particula accelerată și cîmpul celorlalte particule.

4.12. LEGEA CIRCUITULUI MAGNETIC

Legea circuitului magnetic este una dintre legile fundamentale ale cîmpului electromagnetic, stabilită de Maxwell pentu corpuri în repaus și completată de Hertz pentru corpuri în mișcare. Înainte de a enunța și a explica această lege, se reamintesc unele noțiuni fundamentale referitoare la cîmpul electromagnetic.

Cîmpul electromagnetic este o formă obiectivă de existență a materiei în mișcare, deosebită de forma substanță, al cărui mediu este constituit atît din mediile corporale, cît și din spațiul vid. Cîmpul electromagnetic este cauzat de stările variabile de electrizare și magnetizare ale corpurilor și spațiului și constituie unitatea între cîmpul electric variabil în timp și cîmpul magnetic variabil în timp. Macroscopic, starea locală și instantanee a cîmpului electromagnetic se descrie complet cu un sistem de patru mărimi vectoriale, dintre care două de natură electrică ($\bar{E}$ și $\bar{D}$) și două de natură magnetică ($\bar{H}$ și $\bar{B}$). Aceste mărimi sînt, în cazul cîmpului electromagnetic, funcțiuni atît de spațiu, cît și de timp, spre deosebire de cîmpul electrostatic și cîmpul magnetic staționar și magnetostatic, unde sînt funcțiuni numai de spațiu.

Cîmpul electromagnetic este sediul energiei electromagnetice. Spre deosebire de energia electrică (electrostatică) și energia magnetică, energia electromagnetică se propagă la distanță prin intermediul cîmpului electromagnetic din spațiu, ceea ce constituie o calitate deosebit de importantă a acestei forme de energie, cu aplicații multiple în diverse domenii.

Legea circuitului magnetic exprimă legătura dintre intensitatea cîmpului magnetic și curenții ce produc acest cîmp. Sub formă integrală, legea precizează că, în orice moment, tensiunea magnetomotoare de-a lungul oricărei curbe închise Γ, situată în cîmpul electromagnetic, este egală cu suma a doi termeni : primul este solenația corespunzătoare curenților de conducție care străbat suprafața deschisă S_Γ sprijinită pe conturul Γ și al doilea este derivata în raport cu timpul a fluxului electric prin aceeași suprafață, adică

$$\oint_\Gamma \bar{H}\,\mathrm{d}\bar{l} = \int_{S_\Gamma} \bar{J}\,\mathrm{d}\bar{s} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S_\Gamma} \bar{D}\,\mathrm{d}\bar{s}. \tag{4-123}$$

Dacă suprafața S_Γ este imobilă (invariabilă în timp), variația în timp a fluxului electric este determinată numai de variația în timp a inducției electrice $\bar{D}$ în punctele suprafeței, iar legea circuitului magnetic se exprimă prin relația :

$$\oint_\Gamma \bar{H}\,\mathrm{d}\bar{l} = \int_{S_\Gamma} \bar{J}\,\mathrm{d}\bar{s} + \int_{S_\Gamma} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\,\mathrm{d}\bar{s} \tag{4-124}$$

sau

$$\oint_{\Gamma}\bar{H}\, d\bar{l} = i + i_D, \qquad (4\text{-}125)$$

unde

$$i = \int_{S_{\Gamma}} \bar{J}\, d\bar{s} \qquad (4\text{-}126)$$

este curentul electric de conducție prin suprafața S_{Γ} iar

$$i_D = \int_{S_{\Gamma}} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\, d\bar{s} = \int_{S_{\Gamma}} \bar{J}_D\, d\bar{s} \qquad (4\text{-}127)$$

este curentul electric de deplasare prin aceeași suprafață.

Introducerea curentului de deplasare i_D se datorește lui Maxwell (1862), prin care se asigură continuitatea liniilor de curent într-un circuit. Astfel, dacă se consideră în fig. 4-52 o porțiune de circuit electric care conține un condensator, parcursă de un curent variabil, în porțiunea de circuit ocupată de mediul conductor există curentul electric de conducție i, curentul de deplasare fiind neglijabil, iar în porțiunea de circuit ocupată de dielectricul condensatorului există curentul de deplasare i_D, curentul de conducție în dielectric fiind neglijabil. Pentru o suprafață $S_{\Gamma 1}$ mărginită de conturul Γ_1 și străbătută numai de curentul de conducție, legea circuitului magnetic conține în membrul drept numai termenul i, iar pentru suprafața $S_{\Gamma 2}$ mărginită de conturul Γ_2 și străbătută numai de curentul de deplasare, în membrul doi se reține numai termenul i_D.

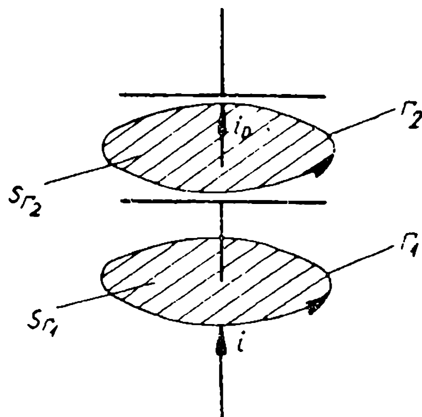


Fig. 4-52. Curentul de conducție i și curentul de deplasare i_D prin circuitul unui condensator.

Forma diferențială a legii circuitului magnetic, pentru corpuri în repaus, se obține din forma integrală (4-124) prin transformarea integralei de linie în integrală de suprafață (teorema lui Stokes), adică :

$$\oint_{\Gamma}\bar{H}\, d\bar{l} = \int_{S_{\Gamma}} \text{rot}\, \bar{H}\, d\bar{s} = \int_{S_{\Gamma}} \bar{J}\, d\bar{s} + \int_{S_{\Gamma}} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\, d\bar{s} = \int_{S_{\Gamma}} \left(\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right) d\bar{s},$$

de unde rezultă :

$$\text{rot}\, \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}. \qquad (4\text{-}128)$$

Această relație este cunoscută și sub denumirea de *ecuația I-a a lui Maxwell pentru cîmpul electromagnetic.*

Pentru corpuri în stare de mișcare, legea circuitului magnetic obține formele integrală și diferențială dezvoltate, care pot fi studiate din tratatele de specialitate.

Întrucît legea circuitului magnetic stă la baza calculelor de proiectare a circuitelor magnetice ce intervin în construcția mașinilor și aparatelor electrice, sînt necesare anumite precizări privind aplicarea ei.

1. În regim staționar $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}=0$ (sau $i_D=0$), iar legea circuitului magnetic obține forma particulară denumită teorema lui Ampère:

$$\oint_{\Gamma} \bar{H}\, d\bar{l}=\int_{S_{\Gamma}} \bar{J}\, d\bar{s}. \qquad (4\text{-}129)$$

Această relație este folosită la calculul circuitelor magnetice excitate de c.c., așa cum s-a arătat la paragrafele anterioare.

2. În regim cvasistaționar $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\cong 0$, adică curentul de deplasare prin orice suprafață mărginită de un contur este neglijabil (exceptînd situația cînd suprafața intersectează dielectricul unui condensator). Regimul cvasistaționar înglobează și circuitele magnetice excitate în c.a. de joasă și medie frecvență. Așa că, și la calculul acestor circuite, legea se exprimă sub aceeași formă ca în regim staționar (relația 4-129).

Aplicația 4-10. Se consideră în fig. 4-53 circuitul magnetic al unei mașini de c.c., compus din: jugul statoric, miezul polilor de excitație, miezul rotoric și întrefier. Bobina de excitație pentru o pereche de poli de excitație are N spire și este parcursă de curentul I_e. Să se explice aplicarea legii circuitului magnetic pentru acest caz.

Rezolvare. Circuitul magnetic considerat se compune din mai multe porțiuni omogene în serie, cu următoarele lungimi medii și secțiuni: l_s, S_s — jugul statoric; l_p, S_p — polul de excitație (inclusiv piesele polare); δ, S_δ — întrefierul; l_r, S_r — jugul rotoric. Conturul de integrare Γ din relația (4-129) se compune din aceste lungimi medii, confundîndu-se cu traseul unei linii de cîmp magnetic. Cîmpul magnetic din fiecare porțiune de circuit se consideră uniform.

În aceste condiții, t.m.m. din membrul stîng al relației (4-129) se descompune în termeni de forma Hl corespunzători fiecărei porțiuni de circuit, iar membrul drept reprezintă solenația totală, corespunzătoare bobinelor de excitație de pe cei doi poli. Deci, legea circuitului magnetic se scrie în forma:

$$H_s l_s+2H_p l_p+2H_\delta \delta+H_r l_r=NI_e. \qquad (4\text{-}130)$$

Evident, amperspirele totale NI_e se compun din amperspirele necesare pentru magnetizarea fiecărei porțiuni de circuit, dintre care cele corespunzătoare întrefierului au valoarea cea mai mare.

Dacă se consideră cunoscute dimensiunile geometrice ale circuitului, fluxul magnetic în întrefier, precum și curba de magnetizare a materialelor feromagnetice folosite, calculul amperspirelor de excitație se face după următorul procedeu, prezentat sumar:

— pentru întrefier:

$$H_\delta=\frac{B_\delta}{\mu_0}=\frac{\Phi_\delta}{\mu_0 S_\delta},\ H_\delta \delta=(NI_e)_\delta;$$

— pentru miezul polilor:

$$B_p=\frac{\Phi_p}{S_p}=\frac{\Phi_\delta}{S_p}\rightarrow H_p$$ (din curba de magnetizare), $H_p l_p=(NI_e)_p$;

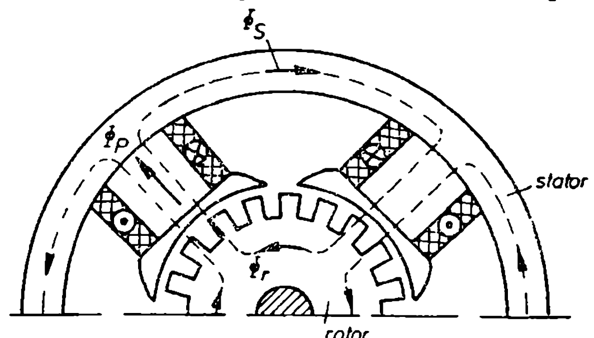


Fig. 4-53. Circuitul magnetic al unei mașini electrice.

— pentru jugul statoric :

$$B_s = \frac{\Phi_s}{S_s} = \frac{\Phi_\delta}{2S_s} \rightarrow H_s \text{ (din curba de magnetizare)}, \; H_s l_s = (NI_e)_s ;$$

— pentru miezul rotoric :

$$B_r = \frac{\Phi_r}{S_r} = \frac{\Phi_\delta}{2S_r} \rightarrow H_r \text{ (din curba de magnetizare)}, \; H_r l_r = (NI_e)_r ;$$

$$NI_e = (NI_e)_s + 2\,(NI_e)_p + 2\,(NI_e)_\delta + (NI_e)_r.$$

S-au neglijat dispersia, precum și influența dinților și crestăturilor din rotor.

4.13. LEGEA INDUCȚIEI ELECTROMAGNETICE

Legea inducției electromagnetice este, ca și legea circuitului magnetic, una din legile fundamentale ale cîmpului electromagnetic, formulată de Maxwell și Hertz. Înainte de a enunța și explica această lege, se fac cîteva considerațiuni asupra fenomenului de inducție electromagnetică descoperit de Faraday (1831).

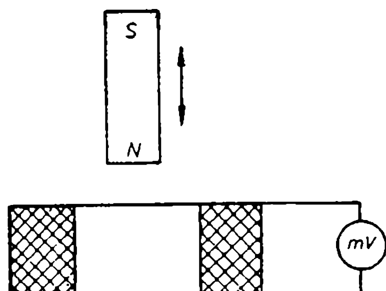


Fig. 4-54. Magnet permanent în mișcare relativă față de o bobină.

Se consideră o bobină, avînd la borne legat un milivoltmetru, în interiorul căreia se introduce și se scoate un magnet permanent (fig. 4-54). Se constată următoarele :

— fiecare mișcare relativă între bobină și magnetul permanent este însoțită de o deviație a milivoltmetrului ;

— deviația milivoltmetrului este cu atît mai mare cu cît viteza de deplasare relativă dintre magnet și bobină este mai mare ;

— sensul de deviație a milivoltmetrului se schimbă cînd magnetul se apropie, respectiv se îndepărtează de bobină.

Această experiență simplă dovedește existența unui fenomen nou, denumit *inducție electromagnetică*, prin care în bobină ia naștere o tensiune electromotoare indusă, măsurată de milivoltmetru. Se pot concepe și alte experiențe prin care se scoate în evidență acest fenomen. De exemplu, dacă se consideră două bobine vecine (cuplate magnetic) din care una este parcursă de un curent variabil în timp, se constată că în a doua apare o tensiune electromotoare indusă (v. transformatorul electric).

Generalizînd observațiile experimentale, se poate preciza că, ori de cîte ori suprafața mărginită de un contur este străbătută de un flux magnetic variabil în timp, în lungul conturului apare o tensiune electromotoare indusă. Dacă conturul considerat urmărește un circuit electric închis, t.e.m. indusă dă naștere unui curent electric (curent indus) în circuit.

Legea inducției electromagnetice exprimată sub formă integrală precizează că tensiunea electromotoare indusă în lungul unui contur Γ închis este egală cu derivata în raport cu timpul, luată cu semn schimbat, a fluxului magnetic prin suprafața S_Γ ce se sprijină pe contur :

$$u_{e\Gamma} = -\frac{d\Phi_{S\Gamma}}{dt}. \qquad (4\text{-}131)$$

Semnul minus din această relație este legat de sensul tensiunii electromotoare induse, stabilit de către Lenz. Conform *regulii lui Lenz*, sensul tensiunii electromotoare induse este în așa fel încît curentul determinat prin circuit de această tensiune creează un flux magnetic ce se opune variațiilor fluxului inițial (efectul se opune cauzei). Pentru clarificarea acestei reguli, se consideră în fig. 4-55 o spiră prin suprafața căreia există un flux magnetic Φ va-

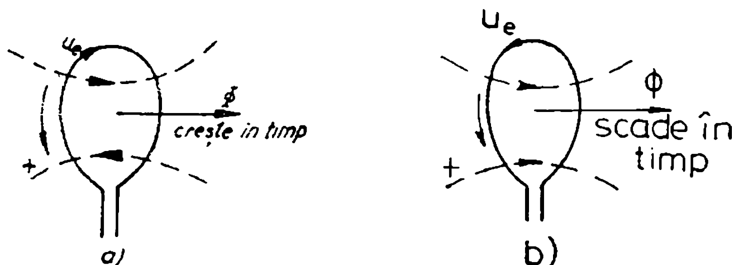


Fig. 4-55. Sensul t.e.m. induse.

riabil în timp. Dacă Φ crește în timp (fig. 4-55, *a*), atunci $d\Phi>0$, iar din relația (4-124) rezultă $u_e<0$, deoarece întotdeauna $dt>0$. Adică, t.e.m. are sens negativ față de sensul pozitiv din spiră stabilit cu ajutorul regulei burghiului drept, în funcție de sensul liniilor cîmpului magnetic (sensul fluxului). Curentul determinat în spiră de t.e.m. indusă dă naștere unui cîmp magnetic cu sensul liniilor opus față de Φ (se opune creșterii lui Φ). Dacă Φ scade în timp (fig. 4-55, *b*), atunci $d\Phi<0$ iar $u_e>0$. În acest caz, curentul determinat de t.e.m. indusă dă naștere unui cîmp magnetic cu sensul liniilor în direcția lui Φ (se opune scăderii lui Φ).

Deoarece fluxul magnetic este :

$$\Phi_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \bar{B}\, d\bar{s} = \int_{S_\Gamma} \mu \bar{H}\, d\bar{s}, \tag{4-132}$$

rezultă că variația în timp a acestui flux poate fi cauzată de :

— variația în timp a intensității cîmpului magnetic $\bar{H}$;

— variația în timp a permeabilității magnetice μ ;

— variația în timp a suprafeței S_Γ.

Primele două cauze determină variația în timp a inducției magnetice $\bar{B}$. Prin variația în timp a suprafeței S_Γ trebuie înțeles atît variația mărimii acestei suprafețe, cît și variația orientării sale în cîmpul magnetic ($d\bar{s}$ este vector). Pe baza acestor observații, se disting următoarele două situații în care se induce tensiunea electromotoare.

1. Inducția magnetică $\bar{B}$ este variabilă în timp, iar conturul (spira) este fixă în spațiu. În acest caz, t.e.m. indusă este :

$$u_{e1} = \left(-\frac{d\Phi_{S_\Gamma}}{dt}\right)_{S_\Gamma=\text{const.}} = -\int_{S_\Gamma} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\, d\bar{s}. \tag{4-133}$$

Această tensiune electromotoare indusă se mai numește și *tensiune de pulsație*.

2. Inducția magnetică $\bar{B}$ este constantă în timp, iar conturul (spira) în mișcare. În această situație :

$$u_{e2}=\left(-\frac{d\Phi_{S_\Gamma}}{dt}\right)_{B=\text{const.}}=-\int_{S_\Gamma}\bar{B}\frac{d}{dt}\{d\bar{s}\},$$

unde, pentru a găsi expresia derivatei $\frac{d}{dt}\{d\bar{s}\}$, se consideră în fig. 4-56 o spiră rigidă în mișcare, astfel că elementul de suprafață $d\bar{s}=d\bar{l}_1\times d\bar{l}=-d\bar{l}\times d\bar{l}_1$ variază în timp numai datorită variației lui $d\bar{l}_1$. Deci :

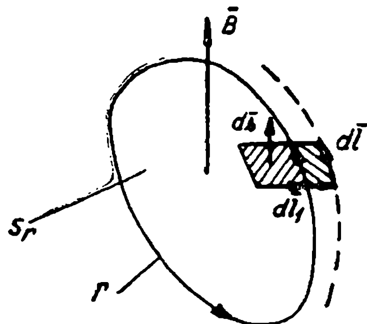


Fig. 4-56. Spiră în mișcare în cîmp magnetic constant.

$$\frac{d}{dt}\{d\bar{s}\}=-d\bar{l}\times\frac{d\bar{l}_1}{dt}=-d\bar{l}\times\bar{v},$$

unde $\bar{v}=\frac{d\bar{l}_1}{dt}$ este viteza de translație a elementului $d\bar{l}$ de pe contur. Înlocuind acest rezultat în expresia t.e.m. u_{e2}, se obține :

$$u_{e2}=\oint_\Gamma\bar{B}\,[d\bar{l}\times\bar{v}]=\oint_\Gamma[\bar{v}\times\bar{B}]\,d\bar{l}, \qquad (4\text{-}134)$$

unde s-a ținut seama că în produsul mixt a vectorilor $\bar{B}$, $d\bar{l}$ și $\bar{v}$ se pot face premutări circulare ale poziției vectorilor. Această t.e.m. se mai numește și *tensiune indusă prin mișcare*.

În general, cînd avem atît o variație în timp a inducției magnetice, cît și o mișcare a conturului (corpurilor), t.e.m. indusă are expresia :

$$u_{e\Gamma}=-\int_{S_\Gamma}\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}d\bar{s}+\oint_\Gamma[\bar{v}\times\bar{B}]\,d\bar{l}. \qquad (4\text{-}135)$$

Această relație exprimă totodată și legea inducției electromagnetice sub formă integrală dezvoltată.

Exprimarea sub formă diferențială a legii inducției electromagnetice se poate obține din relația (4-135) avînd în vedere că :

$$u_{e\Gamma}=\oint_\Gamma\bar{E}\,d\bar{l}, \qquad (4\text{-}136)$$

unde $\bar{E}$ este intensitatea cîmpului electric ce apare în fenomenul inducției electromagnetice. De asemenea, se ține seama de teorema lui Stokes prin care o integrală de linie se transformă în integrală de suprafață. Astfel, se obține :

$$\int_{S_\Gamma}\text{rot}\,\bar{E}\,d\bar{s}=-\int_{S_\Gamma}\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}d\bar{s}+\int_{S_\Gamma}\text{rot}\,[\bar{v}\times\bar{B}]\,d\bar{s},$$

de unde rezultă expresia diferențială a legii inducției electromagnetice :

$$\text{rot}\,\bar{E}=-\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}+\text{rot}\,[\bar{v}\times\bar{B}]. \qquad (4\text{-}137)$$

În cazul particular al corpurilor în stare de repaus ($\bar{v}=0$), situate într-un cîmp magnetic variabil în timp, rezultă:

$$\operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}. \tag{4-138}$$

Pentru cazul corpurilor în mişcare într-un cîmp magnetic constant $\left(\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}=0\right)$, se obţine:

$$\bar{E}=\bar{v}\times\bar{B}. \tag{4-139}$$

Relaţia (4-138) este cunoscută sub denumirea de *ecuaţia a II-a a lui Maxwell pentru cîmpul electromagnetic.*

Se prezintă în continuare cîteva exemple de calcul a t.e.m. induse.

Tensiunea electromotoare indusă într-o bobină situată într-un cîmp magnetic variabil în timp este:

$$u_e = -\frac{d\psi}{dt} = -N\frac{d\Phi}{dt}, \tag{4-140}$$

unde N este numărul de spire al bobinei, iar $\psi=N\Phi$ este înlănţuirea magnetică.

Dacă prin spirele bobinei trece un curent i variabil în timp, acest curent creează în bobină un cîmp magnetic de asemenea variabil în timp. În această situaţie, în bobină apare o t.e.m. indusă, denumită t.e.m. de autoinducţie, care se calculează în modul următor:

$$u_e = -\frac{d\psi}{dt} = -L\frac{di}{dt}, \tag{4-141}$$

unde s-a introdus $\psi=Li$, L fiind inductanţa proprie a bobinei, constantă.

Tensiunile electromotoare induse în bobinele unui transformator. Se consideră bobinele primară şi secundară ale unui transformator electric avînd

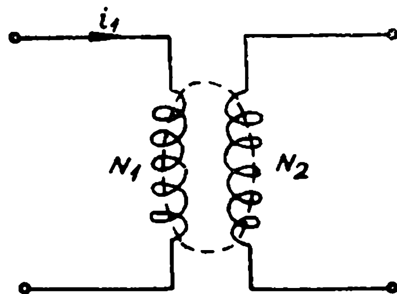


Fig. 4-57. Bobinele unui transformator electric.

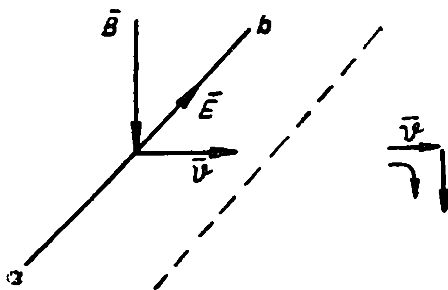


Fig. 4-58. Conductor mobil în cîmp magnetic constant.

numărul de spire N_1 şi N_2 (fig. 4-57). Dacă prin bobina primară trece un curent i_1 variabil în timp, datorită cîmpului magnetic variabil ce ia naştere, în cele două bobine se vor induce tensiunile electromotoare:

$$u_{e1} = -\frac{d\psi_1}{dt} = -L_1\frac{di_1}{dt}, \quad u_{e2} = -\frac{d\psi_{12}}{dt} = -L_{12}\frac{di_1}{dt}, \tag{4-142}$$

unde L_1 este inductanţa proprie a bobinei primarului, iar L_{12} este inductanţa reciprocă (mutuală) dintre bobina primară şi cea secundară.

Tensiunea electromotoare indusă într-un conductor ce se mişcă cu viteză constantă într-un cîmp magnetic omogen (fig. 4-58). Intensitatea cîmpului electric indus, conform relaţiei (4-139) este :

$$\bar{E}=\bar{v}\times\bar{B}.$$

Sensul vectorului $\bar{E}$ se stabileşte cu regula burghiului drept. T.e.m. indusă este :

$$u_e=\int_a^b \bar{E}\,d\bar{l}=\int_a^b[\bar{v}\times\bar{B}]\,d\bar{l}$$

de unde, avînd în vedere că $\bar{B}$ = const., $\bar{v}\perp\bar{B}$ şi $d\bar{l}$ coliniar cu vectorul $\bar{v}\times\bar{B}$, rezultă :

$$u_e=vBl, \tag{4-143}$$

în care l este lungimea conductorului.

Dacă conductorul se mişcă în cîmp fără să întretaie liniile cîmpului magnetic, atunci $u_e=0$ deoarece fie că $\bar{v}\times\bar{B}=0$, fie că $\bar{E}=\bar{v}\times\bar{B}$ este perpendicular pe conductor, adică pe $d\bar{l}$.

Aplicaţia 4-11. Un conductor filiform şi rectiliniu, de lungime foarte mare, este parcurs de curentul cu variaţie sinusoidală în timp, $i(t)=I_m\sin\omega t$. În planul conductorului se găseşte o spiră dreptunghiulară, avînd lăţimea b şi lungimea h, cu una din laturi la distanţa a de conductor (fig. 4-59). Să se determine :

a. T.e.m. indusă în spiră ;

b. Inductanţa mutuală între conductor şi spiră.

Rezolvare. a. Liniile cîmpului magnetic sînt perpendiculare pe suprafaţa spirei. Cu legea circuitului magnetic (4-129) se calculează intensitatea $\bar{H}$ a cîmpului magnetic determinat de curentul $i(t)$ într-un punct al suprafeţei plane a spirei, situat la distanţa r de conductor :

$$\oint_\Gamma \bar{H}\,d\bar{l}=i(t),\quad H\,2\pi r=i(t),\quad H=\frac{i(t)}{2\pi r}.$$

Inducţia magnetică în acelaşi punct este :

$$B=\mu_0 H=\mu_0\frac{i(t)}{2\pi r}.$$

Pentru calculul fluxului magnetic prin suprafaţa spirei, se consideră suprafaţa elementară $ds=h\,dr$ pentru care se obţine :

$$d\Phi=\bar{B}\,d\bar{s}=B\,ds=\mu_0\frac{i(t)}{2\pi r}h\,dr.$$

Prin integrare, pentru întreaga suprafaţă, rezultă :

$$\Phi=\frac{\mu_0 h}{2\pi}i(t)\int_a^{a+b}\frac{dr}{r}=\frac{\mu_0 h}{2\pi}i(t)\ln\frac{a+b}{a}.$$

Fig. 4-59. Conductor drept, parcurs de curent variabil şi spira dreptunghiulară în planul conductorului.

T.e.m. indusă în spiră se obţine din legea inducţiei electromagnetice scrisă în forma (4-133), adică :

$$u_e=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{\mu_0 h}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}\frac{di(t)}{dt}=\frac{\mu_0 h}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}\omega I_m\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right). \tag{4-144}$$

b. Inductanța mutuală între conductor (*1*) și spiră (*2*) este:

$$L_{12} = \frac{\Phi}{i} = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}. \tag{4-145}$$

Aplicația 4-12. Un disc din aluminiu de rază r_0 se rotește într-un cîmp magnetic omogen cu viteza unghiulară ω, discul fiind perpendicular pe liniile cîmpului magnetic (fig. 4-60). Să se determine t.e.m. indusă în disc.

Rezolvare. **Intensitatea cîmpului electric indus, într-un punct situat la distanța r de axă, este: $\bar{E}=\bar{v}\times\bar{B}$. Vectorul $\bar{E}$ este orientat spre periferia discului. T.e.m. indusă se calculează cu relația (4-134), ținînd seama că $d\bar{l}=d\bar{r}$ este elementul de linie luat în lungul razei, în sensul lui $\bar{E}$, iar unghiul dintre vectorii $\bar{v}$ și $\bar{B}$ este 90°. Se obține:**

$$u_e = \int vB\,dl = \int_0^{r_0} r\omega B\,dr = \omega B \int_0^{r_0} r\,dr,$$

adică:

$$u_e = \frac{1}{2}\omega r_0^2 B, \tag{4-146}$$

unde s-a introdus $v=\omega r$.

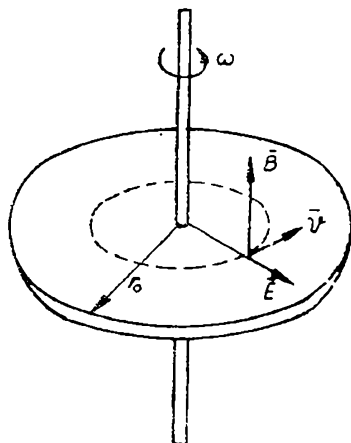


Fig. 4-60. Disc metalic rotitor în cîmp magnetic constant.

4.14. CURENȚI TURBIONARI

Atunci cînd într-o piesă metalică masivă există un cîmp magnetic variabil în timp, sau cînd piesa se mișcă într-un cîmp magnetic constant, în piesa respectivă se induc tensiuni electromotoare care dau naștere la curenți electrici, numiți *curenți turbionari*, sau *curenți Foucault* (fig. 4-61, *a*). În concret, curenții turbionari există în circuitele magnetice ale mașinilor și aparatelor electrice de c.a., în miezul rotorului mașinilor de c.c., provocînd pierderi de

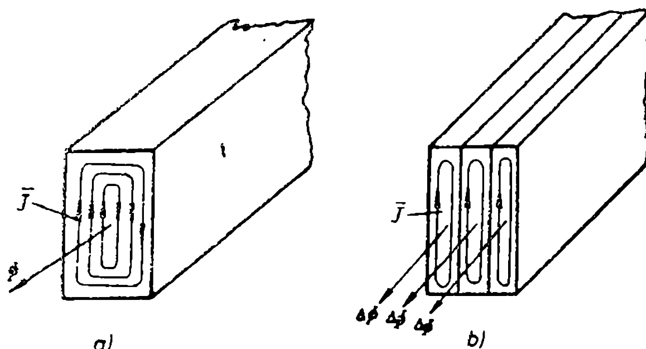


Fig. 4-61. Curenții turbionari în miezul feromagnetic masiv (*a*) și realizat din tole (*b*).

putere prin efect Joule-Lenz și înrăutățind parametrii de funcționare. Există și aplicații utile ale curenților turbionari, la tratamentele termice prin curenți de inducție, la cuptoarele cu inducție folosite la topirea metalelor, la frînele electromagnetice etc.

Pentru a micşora curenţii turbionari, respectiv pierderile determinate de aceştia, se foloseşte metoda de a confecţiona miezurile feromagnetice din tole subţiri, de 0,35 sau 0,5 mm, izolate între ele cu lac sau hîrtie (fig. 4-61, *b*).

Miezurile bobinelor de medie frecvenţă se realizează din pulbere feromagnetică presată cu un material liant (miezuri de tip permalloy). Prin aceasta se majorează rezistenţa electrică a circuitului prin care se închid curenţii turbionari, respectiv se micşorează intensitatea acestor curenţi, deci scad pierderile care sînt proporţionale cu patratul intensităţii curentului.

Pierderile sub formă de căldură datorate curenţilor turbionari se pot calcula cu relaţia:

$$p_F = \sigma_F (fB\Delta)^2 \text{ [W/kg]}, \tag{4-147}$$

unde f este frecvenţa de variaţie a cîmpului magnetic, în Hz;

B — valoarea maximă a inducţiei magnetice, în $\frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}$;

Δ — grosimea tolelor, în m;

σ_F — un coeficient de pierderi, a cărui valoare variază între 2,2 şi 4,8, în funcţie de calitatea tolelor.

4.15. ENERGIA ŞI PUTEREA ELECTROMAGNETICĂ

Energia electromagnetică aparţine cîmpului electromagnetic. Ceea ce este caracteristic acestei forme de energie, este faptul că se propagă la distanţă, prin spaţiu, cu viteza dată de relaţia:

$$v_u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{4-148}$$

În vid $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi 9 \cdot 10^9}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ şi $v_{u0} = 3 \cdot 10^8$ m/s.

Cîmpul electromagnetic fiind unitatea dintre cîmpul electric variabil în timp şi cîmpul magnetic variabil în timp, energia electromagnetică constă din oscilaţia permanentă între energia electrică şi energia magnetică. Cînd energia electrică creşte în raport cu timpul, energia magnetică scade, şi invers, astfel încît suma lor rămîne mereu constantă, neglijînd bineînţeles pierderile.

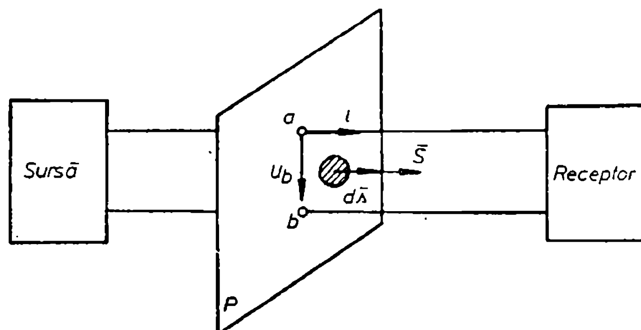


Fig. 4-62. Transmiterea energiei electromagnetice printr-o linie de transport.

În fig. 4-62 se consideră o linie de transport de energie în curent alternativ monofazat. În spaţiul înconjurător celor două conductoare apare un cîmp electric şi un cîmp magnetic variabile în timp (cîmp electromagnetic). Spectrul liniilor celor două cîmpuri la un moment dat, cu intensităţile cîmpului electric $\bar{E}$ şi a cîmpului magnetic $\bar{H}$ tangente la aceste linii, este reprezentat în fig. 4-63. Cei doi vectori $\bar{E}$ şi $\bar{H}$ sînt perpendiculari între ei în orice moment şi în orice punct din spaţiu.

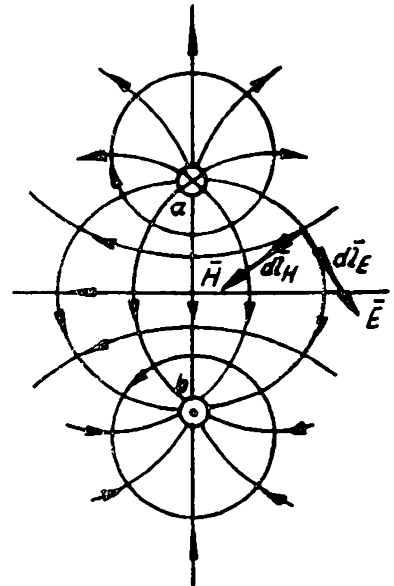


Fig. 4-63. Liniile cîmpurilor electric şi magnetic.

Pentru studiul şi calculul transmiterii la distanţă a energiei electromagnetice se foloseşte vectorul Poynting:

$$\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H} \tag{4-149}$$

care reprezintă energia electromagnetică ce străbate unitatea de suprafaţă, perpendiculară pe direcţia de propagare, în unitatea de timp, adică reprezintă puterea electromagnetică prin unitatea de suprafaţă. Pentru explicare, se consideră linia monofazată prin care energia electromagnetică se transmite de la sursă la receptor. Trebuie reţinut faptul că energia electromagnetică se transmite prin cîmpul electromagnetic existent în spaţiul înconjurător celor două conductoare ale liniei, vectorul Poynting fiind orientat de la sursă spre consumator.

Energia electromagnetică care străbate în unitatea de timp suprafaţa extinsă la infinit a planului P, perpendiculară pe cele două conductoare, adică puterea electromagnetică, se obţine din relaţia:

$$p = \int_S \bar{S}\, d\bar{s} = \int_{l_E} \int_{l_H} (\bar{E} \times \bar{H})\, (d\bar{l}_E \times d\bar{l}_H), \tag{4-150}$$

unde s-a ţinut seama de relaţia (4—149) şi s-a avut în vedere că $d\bar{s} = d\bar{l}_E \times d\bar{l}_H$, $d\bar{l}_E$ şi $d\bar{l}_H$ fiind elemente din liniile cîmpurilor $\bar{E}$ şi $\bar{H}$ (fig. 4-63).

Făcînd uz de unele cunoştinţe din analiza vectorială şi avînd în vedere că $\bar{E}$ este perpendicular pe $d\bar{l}_H$ şi $\bar{H}$ este perpendicular pe $d\bar{l}_E$ relaţia (4-150) devine:

$$p = \int_{l_E} \bar{E}\, d\bar{l}_E \oint_{l_H} \bar{H}\, d\bar{l}_H = u_b i, \tag{1-151}$$

unde $u_b = \int_{l_E} \bar{E}\, d\bar{l}_E = \int_a^b \bar{E}\, d\bar{l}$ este tensiunea dintre cele două conductoare ale liniei, iar $i = \oint_{l_H} \bar{H}\, d\bar{l}_H$ este curentul electric al liniei.

Capitolul 5

CIRCUITE MONOFAZATE ÎN REGIM PERMANENT SINUSOIDAL

5.1. NOȚIUNI ASUPRA MĂRIMILOR CU VARIAȚIE PERIODICĂ ÎN TIMP

5.1.1. MĂRIMI PERIODICE, ALTERNATIVE ŞI SINUSOIDALE. FAZA ŞI DEFAZAJUL

În aplicațiile practice ale fenomenelor electrice și magnetice se întîlnesc cazuri cînd tensiunile, curenții, inducțiile magnetice etc., sînt mărimi periodice. Spre exemplu, tensiunea electrică u este cu variație periodică în raport cu timpul t dacă :

$$u(t)=u(t+T)=u(t+2T)=\ldots=u(t+kT), \tag{5-1}$$

unde T se numește *perioadă* şi reprezintă intervalul de timp minim după care tensiunea trece prin aceleaşi valori (fig. 5-1). *Frecvența de variație* f reprezintă numărul de perioade cuprinse în unitatea de timp (într-o secundă), și se măsoară în hertzi [Hz]:

$$f=\frac{1}{T}\cdot \tag{5-2}$$

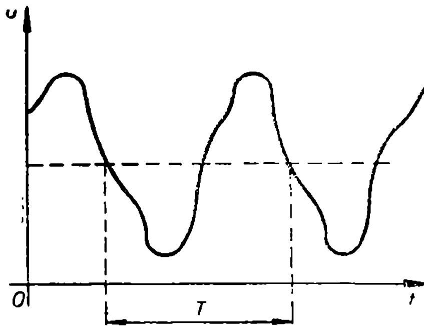


Fig. 5-1. Tensiune cu variație periodică, pulsatorie, în timp.

Mărimile periodice se numesc *pulsatorii* dacă toate valorile sale sînt de un singur semn (fig. 5-1). Mărimile periodice sînt *alternative* dacă de-a lungul unei perioade își schimbă semnul.

Mărimile periodice alternative sînt simetrice dacă obțin, după o jumătate de perioadă, aceeași valoare, însă cu semn schimbat: $u(t)=-u\left(t+\frac{T}{2}\right)$. Dacă această relație nu este satisfăcută, mărimea respectivă este nesimetrică.

Mărimea $u(t)$ este pară dacă $u(t)=u(-t)$ și este impară dacă $u(t)=$ $=-u(-t)$.

Funcțiile periodice alternative, după care variază mărimile electrice și magnetice, sînt sinusoidale sau nesinusoidale. Cele nesinusoidale pot fi descompuse, cu ajutorul seriei Fourier, în funcții periodice de sinusuri și cosinusuri, de diferite frecvențe, denumite *armonice*. O funcție cu variație sinusoidală în timp se scrie sub forma :

$$u=U_m \sin(\omega t+\alpha), \tag{5-3}$$

în care,

u este valoarea instantanee (sau momentană) a mărimii sinusoidale, adică valoarea pe care mărimea o are la un moment dat (se notează cu literă mică),

U_m — valoarea maximă, sau amplitudinea (se notează cu literă mare și indicele m),

$\omega=2\pi f$ — pulsația, sau frecvența unghiulară, măsurată în radiani/secundă,

α — faza inițială.

Prin *faza* unei mărimi cu variație sinusoidală în timp se înțelege valoarea argumentului funcțiunii respective. De exemplu, pentru funcția (5-3), faza este : $\omega t+\alpha$. Valoarea fazei în momentul inițial ($t=0$) se numește fază inițială, care determină valoarea funcției în acest moment : $U_m \sin\alpha$.

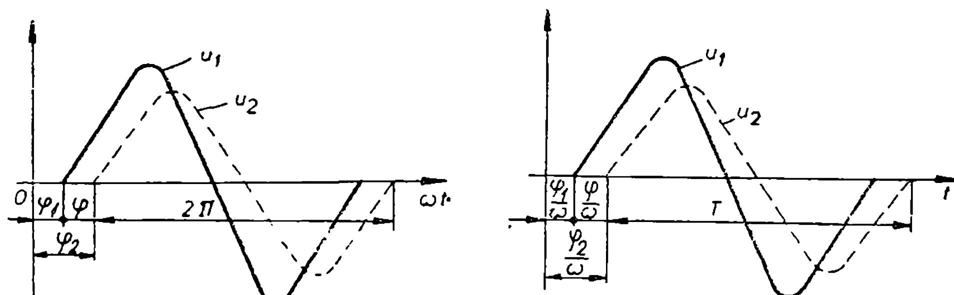


Fig. 5-2. Tensiuni sinusoidale defazate.

Defazajul dintre două mărimi sinusoidale cu aceeași pulsație se exprimă prin diferența fazelor lor. Dacă ne referim, spre exemplu, la mărimile sinusoidale $u_1=U_{1m}\sin(\omega t-\varphi_1)$, $u_2=U_{2m}(\omega t-\varphi_2)$, reprezentate în fig. 5-2, defazajul dintre ele este :

$$\varphi=(\omega t-\varphi_1)-(\omega t-\varphi_2)=\varphi_2-\varphi_1. \qquad (5\text{-}4)$$

Cu alte cuvinte, două mărimi sinusoidale cu aceeași perioadă sînt defazate între ele dacă nu obțin simultan valoarea maximă, respectiv valoarea minimă. În cazul din fig. 5-2, tensiunea u_2 este defazată în urmă față de tensiunea u_1 deoarece mai întîi trece prin valoarea maximă pozitivă tensiunea u_1 și apoi trece prin valoarea maximă pozitivă tensiunea u_2, în timpul perioadei T.

Două mărimi sinusoidale sînt în fază dacă obțin simultan valoarea maximă, respectiv minimă, adică defazajul dintre ele este nul ($\varphi_2-\varphi_1=\varphi=0$). Deci fazele inițiale ale acestor mărimi sînt egale (($\varphi_1=\varphi_2$).

Dacă cele două mărimi sinusoidale se anulează simultan dar, în timp ce una este maximă, a doua este minimă, ele sînt în opoziție de fază, defazajul lor fiind : $\varphi=\pm\pi$.

Două mărimi sinusoidale sînt în cudratură dacă în timp ce una din mărimi se anulează, a doua trece prin maxim sau minim, defazajul lor fiind : $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$.

Dacă pe axa absciselor se reprezintă valorile timpului t, defazajul se exprimă prin $\frac{\varphi}{\omega}$ (fig. 5-2, *b*), adică se măsoară în unități de timp. Timpul de defazaj este zero în cazul mărimilor ce sînt în fază, este $\frac{T}{2}$ pentru mărimile în opoziție și $\frac{T}{4}$ la mărimile în cuadratură.

5.1.2. PRODUCEREA UNEI TENSIUNI ELECTROMOTOARE SINUSOIDALE

O tensiune electromotoare sinusoidală se obține prin fenomenul de inducție electromagnetică în generatoarele de tensiune alternativă montate în centralele electrice. În fig. 5-3 este redat, schematic, principiul de funcționare al unui generator de tensiune sinusoidală. Înfășurarea rotorică este redusă

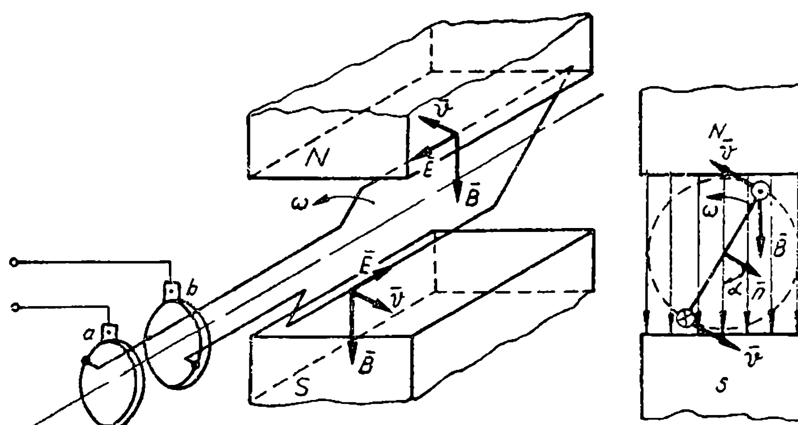


Fig. 5-3. Spiră rotitoare în cîmp magnetic uniform.

la o singură spiră ale cărei extremități sînt legate la două inele colectoare pe care glisează două perii, *a* și *b*, legate la borne. Spira, de formă dreptunghiulară, este rotită cu viteza unghiulară ω, constantă, într-un cîmp magnetic omogen de inducție $\bar{B}$, creat de polii N și S ai unui magnet permanent. Rotirea spirei se face în jurul axei sale, care este perpendiculară pe direcția liniilor de cîmp. Unghiul α, format de liniile lui $\bar{B}$ și normala $\bar{n}$ la planul spirei, este variabil în timp: $\alpha = \omega t$.

Suprafața S a spirei este străbătură de fluxul magnetic variabil în timp:

$$\Phi = \int \bar{B}\, d\bar{s} = BS \cos \alpha = \Phi_m \cos \omega t. \qquad (5\text{-}5)$$

Cînd $\cos \omega t = 1$ ($\alpha = \omega t = 0$), fluxul prin suprafața spirei are valoare maximă $\Phi_m = BS$.

Tensiunea electromotoare indusă în spiră și colectată de periile *a* și *b*, conform legii inducției electromagnetice, este:

$$u_e = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega BS \sin \omega t = U_{em} \sin \omega t. \qquad (5\text{-}6)$$

Prin urmare, t.e.m. indusă are o variaţie sinusoidală în timp, avînd amplitudinea :

$$U_{em} = \omega BS. \tag{5-7}$$

Variaţia în timp a fluxului inductor (relaţia 5-5) şi a t.e.m. induse (relaţia 5-7) sînt reprezentate în fig. 5-4. Se remarcă faptul că fluxul este defazat înainte cu $\frac{\pi}{2}$ faţă de t.e.m .indusă.

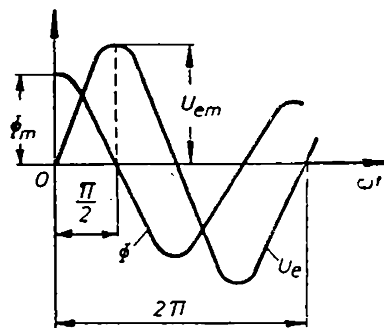


Fig. 5-4. Variaţia în timp a fluxului inductor şi a t.e.m. induse.

5.1.3. VALORI EFECTIVE ŞI MEDII ALE CURENŢILOR ŞI TENSIUNILOR SINUSOIDALE

Valoarea efectivă a curentului (tensiunii) cu variaţie sinusoidală în timp se defineşte pe baza efectului termic după cum urmează: valoarea efectivă a curentului sinusoidal este egală cu acea valoare constantă a unui curent continuu care, trecînd printr-un rezistor cu rezistenţa R, dezvoltă în timp de o perioadă aceeaşi energie calorică ca şi curentul sinusoidal ce trece prin acelaşi rezistor, în acelaşi interval de timp. Pe baza acestei definiţii se poate scrie :

$$Q = RI^2T = \int_0^T Ri^2\,dt, \tag{5-8}$$

unde $i = I_m \sin(\omega t - \varphi)$ este curentul sinusoidal şi I este valoarea efectivă a curentului. Rezultă :

$$I^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt = \frac{I_m^2}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t - \varphi)\,dt = \frac{I_m^2}{T}\int_0^T \frac{1-\cos 2(\omega t - \varphi)}{2}\,dt,$$

de unde, prin efectuarea integralei, se obţine :

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \tag{5-9}$$

În mod asemănător, se deduce valoarea efectivă a tensiunii sinusoidale :

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}. \tag{5-10}$$

Importanţa valorilor efective ale curentului şi tensiunii constă în aceea că instrumentele de măsurat de tip electromagnetic şi electrodinamic măsoară tocmai aceste valori efective. De asemenea, aceste mărimi intervin în exprimarea puterilor activă, reactivă şi aparentă.

În ceea ce priveşte valoarea medie a unei mărimi sinusoidale, aceasta este nulă dacă se calculează în raport cu o perioadă. De aceea, în regimul sinusoi-

dal, nu se determină valoarea medie pentru o perioadă T, ci pentru $\frac{T}{2}$. În aceste condiții, considerînd $u = U_m \sin \omega t$, se obține:

$$U_{med} = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_0^{T/2} U_m \sin \omega t \, dt = \frac{2}{\pi} U_m, \qquad (5\text{-}11)$$

unde s-a ținut seama că $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

În mod analog, pentru valoarea medie a curentului sinusoidal se obține:

$$I_{med} = \frac{2}{\pi} I_m. \qquad (5\text{-}12)$$

Valorile medii ale curentului și tensiunii prezintă importanță în sensul că acestea se măsoară cu ajutorul instrumentelor de tip magnetoelectric prevăzute cu redresor.

Raportul dintre valoarea efectivă și valoarea medie a unei mărimi periodice depinde de forma curbei și se numește *factor de formă*. În cazul mărimilor sinusoidale, factorul de formă k_f este:

$$k_f = \frac{U}{U_{med}} = \frac{I}{I_{med}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1{,}11. \qquad (5\text{-}13)$$

Factorul de amplitudine al unei mărimi periodice este definit ca raportul dintre valoarea maximă și valoarea efectivă a acelei mărimi. Pentru mărimile sinusoidale, factorul de amplitudine k_a are valoarea:

$$k_a = \frac{U_m}{U} = \frac{I_m}{I} = \sqrt{2} = 1{,}41. \qquad (5\text{-}14)$$

Pentru curbele avînd o formă mai ascuțită decît sinusoida, rezultă $k_f < 1{,}11$ și $k_a < 1{,}41$, iar pentru cele avînd o formă mai plată decît sinusoida se obține $k_f > 1{,}11$ și $k_a > 1{,}41$.

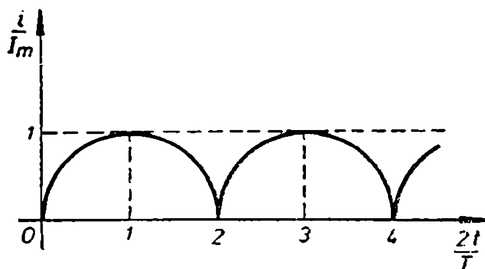


Fig. 5-5. Curent cu variație pulsatorie în timp.

Aplicația 5-1. Un curent pulsatoriu variază în timp după o curbă în formă de semicerc (fig. 5-5). Să se determine valoarea efectivă a acestui curent.

Rezolvare. În fig. 5-5 s-au reprezentat pe axe valorile relative ale curentului și timpului. Rezultă următoarea ecuație a cercului ce trece prin origine:

$$\left(\frac{i}{I_m}\right)^2 + \left(\frac{2t}{T} - 1\right)^2 = 1,$$

de unde se obține:

$$i = \sqrt{I_m^2 \frac{4}{T}\left(t - \frac{t^2}{T}\right)}.$$

Valoarea efectivă a acestui curent este:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 \, dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \frac{4}{T}\left(t - \frac{t^2}{T}\right) dt} = \sqrt{\frac{2}{3}}\, I_m.$$

5.1.4. REPREZENTAREA MĂRIMILOR SINUSOIDALE

Mărimile sinusoidale se pot reprezenta și exprima în diferite moduri, obținîndu-se așa-numitele diagrame de reprezentare a mărimilor sinusoidale, respectiv relații de exprimare a lor.

a. **Diagrama liniară** (carteziană) a mărimilor sinusoidale de forma:

$$u=U_m \sin \omega t=\sqrt{2}U \sin \omega t,$$

$$i=I_m \sin (\omega t-\varphi)=\sqrt{2}I \sin (\omega t-\varphi)$$

se obține reprezentînd în plan variația în timp a acestor mărimi, punînd pe abscisă valorile timpului t, sau valorile unghiului ωt, iar pe ordonată valorile instantanee (momentane) ale mărimilor respective (v. fig. 5-2).

b. **Diagrama fazorială.** O mărime sinusoidală este univoc determinată dacă se cunosc amplitudinea și faza sa. Diagrama fazorială a unei mărimi sinusoidale de forma $i=I_m \sin (\omega t-\varphi)$ se obține asociind amplitudinii un segment de dreaptă $OA=I_m$, ce se rotește în jurul originii O a axelor de coordonate, în sensul trigonometric, cu viteza unghiulară constantă ω, denumit *fazor al amplitudinii* (fig. 5-6). Unghiul pe care acest fazor îl face cu direcția pozitivă a axei absciselor reprezintă argumentul $\omega t-\varphi$ al funcției sinusoidale, iar proiecția sa pe axa verticală reprezintă valoarea momentană i.

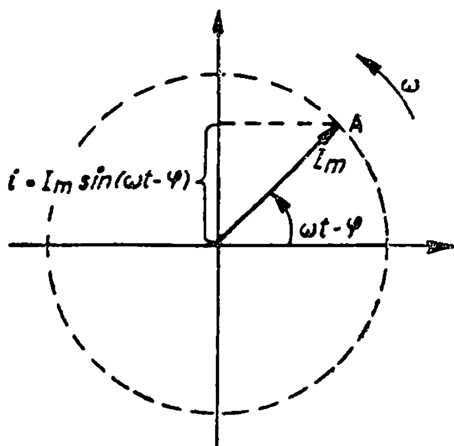


Fig. 5-6. Fazorul amplitudinii curentului.

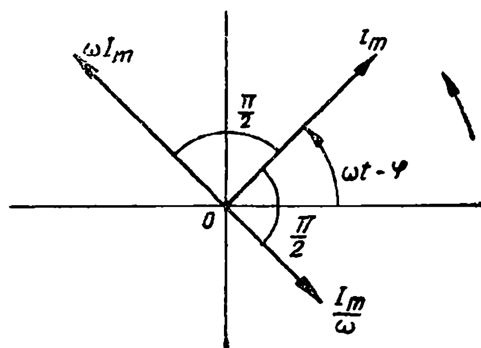


Fig. 5-7. Fazorii amplitudinilor derivatei (ωI_m) și integralei $\left(\frac{I_m}{\omega}\right)$ ai curentului sinusoidal cu amplitudinea I_m.

În diagrama fazorială se reprezintă, în general, mai multe mărimi sinusoidale ca: tensiuni, curenți etc. Toate aceste mărimi trebuie să aibă însă aceeași frecvență de variație. Pe baza acestei reprezentări se pot face operații de adunare și scădere a mărimilor sinusoidale de aceeași natură, de determinare a defazajelor dintre ele etc. (v. aplicația 5-2).

Fazorii derivatei și integralei unei mărimi sinusoidale $i=I_m \sin(\omega t-\varphi)$, reprezentați în fig. 5-7, se obțin simplu :

$$\frac{di}{dt}=\omega I_m \cos(\omega t-\varphi)=\omega I_m \sin\left(\omega t-\varphi+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\int i\,dt=-\frac{1}{\omega} I_m \cos(\omega t-\varphi)=\frac{I_m}{\omega}\sin\left(\omega t-\varphi-\frac{\pi}{2}\right).$$

Deci, derivata unei mărimi sinusoidale este defazată înainte cu $\frac{\pi}{2}$ față de mărimea respectivă, iar integrala în urmă cu $\frac{\pi}{2}$.

În aplicațiile practice, diagramele fazoriale se folosesc, obișnuit, fără a mai trasa și axele de coordonate, reprezentîndu-se numai fazorii amplitudinilor, cu defazajele corespunzătoare și indicîndu-se printr-o săgeată sensul pozitiv de rotație (invers mișcării acelor ceasornicului). O astfel de reprezentare se numește *diagramă fazorială a amplitudinilor.* Avînd în vedere că raportul dintre amplitudinea unei mărimi sinusoidale și valoarea sa efectivă este constant, egal cu $\sqrt{2}$, în locul diagramei fazoriale a amplitudinilor se folosește, adesea, diagrama fazorială a valorilor efective. În fig. 5-8 sînt reprezentate diagramele fazoriale a amplitudinilor și a valorilor efective pentru mărimile :

$$u=U_m \sin\omega t=\sqrt{2}U \sin\omega t,\quad i=I_m \sin(\omega t-\varphi)=\sqrt{2}I \sin(\omega t-\varphi).$$

Proiectînd fazorul curentului pe direcția fazorului tensiunii și pe o direcție perpendiculară pe tensiune se obțin componenta activă și componenta reactivă a curentului :

$$I_{ma}=I_m \cos\varphi,\quad I_a=I\cos\varphi;$$
$$I_{mr}=I_m \sin\varphi,\quad I_r=I\sin\varphi. \tag{5-15}$$

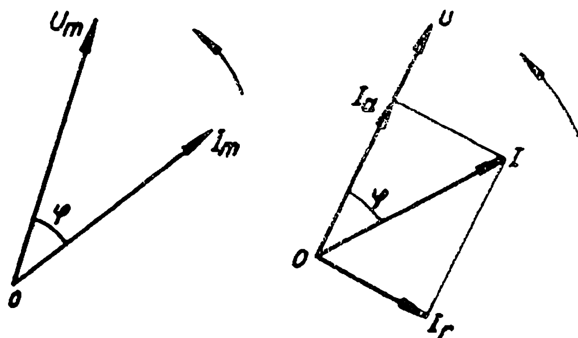


Fig. 5-8. Diagrame fazoriale ale amplitudinilor și ale valorilor efective pentru tensiune și curent.

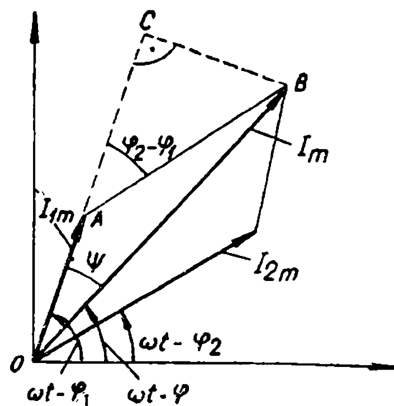


Fig. 5-9. Diagrama fazorială de însumare a doi curenți sinusoidali.

Aplicația 5-2. Folosind diagrama fazorială a amplitudinilor, să se determine curentul $i=i_1+i_2$, unde $i_1=I_{1m}\sin(\omega t-\varphi_1)$, $i_2=I_{2m}\sin(\omega t-\varphi_2)$.

Rezolvare. Curentul i are o expresie de forma : $i=I_m\sin(\omega t-\varphi)$, unde I_m și φ urmează a se determina în funcție de I_{1m}, I_{2m}, φ_1 și φ_2.

În fig. 5-9 este reprezentată diagrama fazorială a celor trei curenţi. Amplitudinea I_m se obţine prin însumarea geometrică a amplitudinilor I_{1m} şi I_{2m}: $I_m = \widehat{I_{1m} + I_{2m}}$. Din triunghiul OAB se obţine:

$$I_m = \sqrt{I_{1m}^2 + I_{2m}^2 + 2I_{1m}I_{2m}\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Din triunghiul dreptunghic OBC rezultă:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{BC}{OC} = \frac{I_{2m}\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{I_{1m} + I_{2m}\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Avînd în vedere că $\omega t - \varphi_1 = \omega t - \varphi + \psi$, se obţine: $\varphi = \varphi_1 + \psi$.

c. **Reprezentarea în complex.** Un număr complex, caracterizat prin modulul şi argumentul său, poate servi la reprezentarea simbolică a unei mărimi sinusoidale. Există reprezentarea în complex nesimplificată şi reprezentarea în complex simplificată a mărimilor cu variaţie sinusoidală în timp.

Reprezentarea în complex nesimplificată se obţine luînd modulul mărimii complexe egal cu amplitudinea, iar argumentul egal cu faza mărimii sinusoidale. De exemplu, mărimii sinusoidale $i = I_m \sin(\omega t - \varphi)$ i se asociază biunivoc mărimea complexă:

$$\underline{I} = I_m e^{j(\omega t - \varphi)} = I_m \cos(\omega t - \varphi) + jI_m \sin(\omega t - \varphi), \tag{5-16}$$

unde $j = \sqrt{-1} = e^{j\frac{\pi}{2}}$ este unitatea imaginară.

Partea reală şi partea imaginară a mărimii complexe sînt:

$$\mathcal{R}e\{\underline{I}\} = I_m \cos(\omega t - \varphi), \quad \mathcal{I}m\{\underline{I}\} = I_m \sin(\omega t - \varphi) = i.$$

Se remarcă faptul că partea imaginară este egală cu valoarea instantanee a mărimii sinusoidale.

Reprezentarea în complex simplificată se face considerînd modulul mărimii complexe egal cu valoarea efectivă, iar argumentul egal cu faza iniţială a mărimii cu variaţie sinusoidală în timp. De exemplu, curentul $i = \sqrt{2} I \sin \cdot (\omega t - \varphi)$ se reprezintă în complex simplificat prin relaţia:

$$\underline{I} = I e^{-j\varphi}. \tag{5-17}$$

Reprezentînd în planul complex (planul Gauss) mărimile complexe prin care se exprimă simbolic mărimile sinusoidale, se obţine diagrama în complex a acestor mărimi. În fig. 5-10 este reprezentat în planul complex curentul exprimat sub formă complexă prin relaţia (5-16).

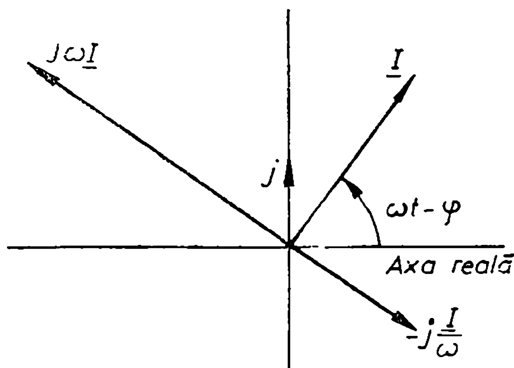


Fig. 5-10. Reprezentarea în planul complex a curentului sinusoidal, a derivatei şi integralei sale.

Derivata și integrala mărimii complexe (5-16) sînt:

$$\frac{d\underline{I}}{dt} = j\omega I_m e^{j(\omega t-\varphi)} = j\omega \underline{I},$$
$$\int \underline{I} dt = \frac{1}{j\omega} I_m e^{j(\omega t-\varphi)} = -j\frac{1}{\omega}\underline{I}, \tag{5-18}$$

a căror reprezentare este redată în fig. 5-10. Ținînd seama că $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$, $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$, prin înmulțirea mărimii complexe ($\underline{I}$) cu j și $-$j, aceasta se rotește în sensul trigonometric, respectiv în sens opus, cu $\frac{\pi}{2}$ radiani.

5.2. ELEMENTE IDEALE DE CIRCUIT ÎN REGIM PERMANENT SINUSOIDAL

5.2.1. REZISTORUL IDEAL

Se consideră un rezistor avînd rezistența R și cu inductanța și capacitatea neglijabile (rezistor ideal), alimentat cu tensiunea sinusoidală: $u_R = U_{Rm} \sin \omega t$ (fig. 5-11). Curentul prin rezistor, ca valoare instantanee, se obține din legea conducției electrice (legea lui Ohm):

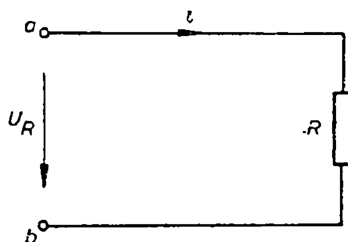


Fig. 5-11. Rezistorul ideal.

$$i = \frac{u_R}{R} = \frac{U_{Rm}}{R} \sin \omega t = I_m \sin \omega t, \tag{5-19}$$

în care $I_m = \frac{U_{Rm}}{R}$ este amplitudinea curentului.

Valoarea efectivă a curentului prin rezistor este:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{U_{Rm}}{\sqrt{2}R} = \frac{U_R}{R}, \tag{5-20}$$

unde $U_R = \frac{U_{Rm}}{\sqrt{2}}$ este valoarea efectivă a tensiunii la bornele rezistorului.

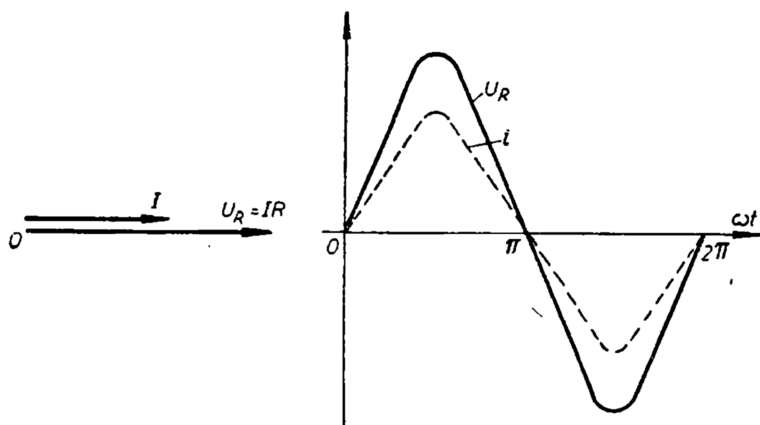


Fig. 5-12. Diagrame pentru rezistorul ideal.

Se remarcă faptul că, curentul electric prin rezistor este în fază cu tensiunea aplicată la bornele sale, diagramele fazorială și carteziană fiind cele reprezentate în fig. 5-12.

5.2.2. BOBINA IDEALĂ

Fie o bobină cu N spire, situată într-un mediu liniar, alimentată cu tensiunea la borne u_L și parcursă de curentul $i=I_m \sin \omega t$ (fig. 5-13). Se consideră neglijabilă rezistența și capacitatea spirelor în raport cu inductanța L a bobinei (bobină ideală).

Înlănțuirea magnetică $\psi=Li$ este o mărime sinusoidală, în fază cu curentul i deoarece $L=$ const., adică :

$$\psi=LI_m \sin \omega t. \tag{5-21}$$

Variația fluxului prin secțiunea spirelor bobinei induce în acestea o tensiune electromotoare care, conform legii inducției electromagnetice, este :

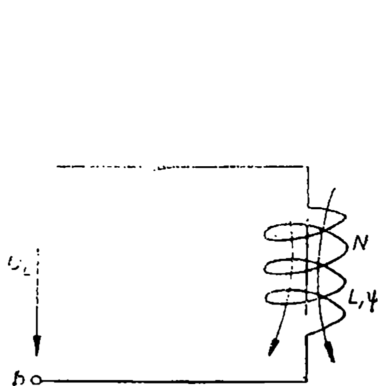


Fig. 5-13. Bobina ideală.

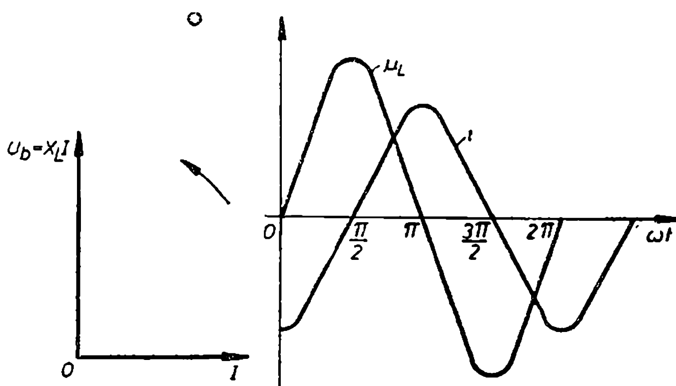


Fig. 5-14. Diagrame pentru bobina ideală.

$$u_e=-\frac{d\psi}{dt}=-L\frac{di}{dt}=-\omega LI_m \cos \omega t=U_{em} \sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right), \tag{5-22}$$

unde

$$U_{em}=\omega LI_m=X_LI_m \tag{5-23}$$

este amplitudinea t.e.m. induse.

Mărimea

$$X_L=\omega L \tag{5-24}$$

se numește *reactanța inductivă* a bobinei și, ca și rezistența electrică, se măsoară în ohmi.

Tensiunea u_L aplicată la bornele bobinei este egală și de semn opus cu u_e deoarece $\int \bar{E}\, d\bar{l}=u_L+u_e=0$, rezistența și capacitatea circuitului fiind neglijabile. Deci,

$$u_L=-u_e=\omega LI_m \cos \omega t=U_{em} \sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right) \tag{5-25}$$

adică, tensiunea la bornele bobinei ideale este defazată cu $\frac{\pi}{2}$ înaintea curentului prin bobină (acelaşi lucru cu a spune: curentul defazat în urmă cu $\frac{\pi}{2}$ faţă de tensiune).

Diagramele fazorială şi carteziană ale tensiunii u_L şi curentului i sînt reprezentate în fig. 5-14.

Amplitudinea curentului prin bobină, respectiv valoarea sa efectivă sînt:

$$I_m = \frac{U_{Lm}}{X_L}, \quad I = \frac{U_L}{X_L}. \tag{5-26}$$

Mărimea $X_L I$ se numeşte cădere de tensiune inductivă (ca valoare efectivă).

5.2.3. CONDENSATORUL IDEAL

Se consideră un condensator cu capacitate C (constantă), cu rezistivitate infinită a dielectricului dintre armături (condensator ideal), conectat la tensiunea sinusoidală $u_C = U_{cm} \sin \omega t$ (fig. 5-15). Curentul electric din circuit este:

$$i = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(Cu_C) = C\frac{du_C}{dt} = \omega C U_{Cm} \cos \omega t$$

adică

$$i = \frac{U_{Cm}}{X_C} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \tag{5-27}$$

Mărimea

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \tag{5-28}$$

se numeşte *reactanţa capacitivă* a condensatorului, măsurată în ohmi.

Deci, la condensatorul ideal curentul electric este defazat cu $\frac{\pi}{2}$ înaintea tensiunii la borne. Diagramele fazorială şi carteziană pentru acest caz sînt reprezentate în fig. 5-16.

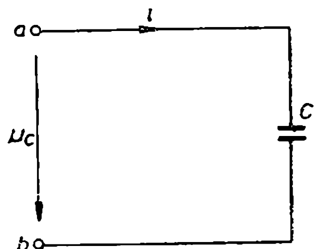


Fig. 5-15. Condensatorul ideal.

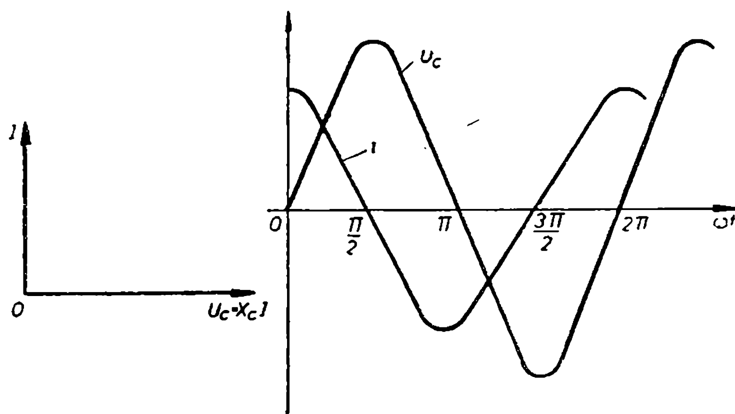


Fig. 5-16. Diagrame pentru condensatorul ideal.

Amplitudinea, respectiv valoarea efectivă a curentului din circuitul condensatorului sînt :

$$I_m = \frac{U_{Cm}}{X_C}, \quad I = \frac{U_C}{X_C}. \tag{5-29}$$

Mărimea $X_C I$ se numeşte cădere de tensiune capacitivă (valoare efectivă).

5.3. CIRCUIT RLC SERIE ÎN REGIM PERMANENT SINUSOIDAL. IMPEDANŢA ŞI ADMITANŢA CIRCUITULUI

Se consideră un circuit format dintr-un rezistor cu rezistenţa R, o bobină cu inductanţa L şi un condensator cu capacitatea C legate în serie şi alimentat cu tensiunea de borne sinusoidală : $u_b = U_{bm} \sin \omega t$ (fig. 5-17).

Prin cele trei elemente legate în serie circulă acelaşi curent i, care provoacă căderile de tensiune :

$$u_R = Ri, \quad u_L = L\frac{di}{dt}, \quad u_C = \frac{1}{C}\int i\, dt + \frac{Q_0}{C} \tag{5-30}$$

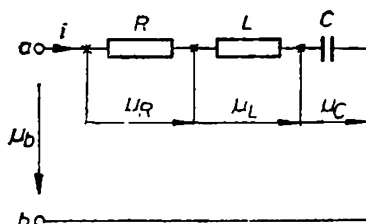


Fig. 5-17. Circuit *RLC* în serie.

unde, în regim permanent sinusoidal, constanta de integrare $\frac{Q_0}{C} = 0$.

Tensiunea la borne u_b acoperă căderile de tensiune din circuit, $u_b = u_R + u_L + u_C$, sau :

$$u_b = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\, dt, \tag{5-31}$$

care reprezintă ecuaţia integro-diferenţială a curentului din circuit.

Cunoscîndu-se R, L, C şi tensiunea la borne u_b, se pune problema determinării curentului permanent din circuit, deci a găsirii soluţiei particulare a ecuaţiei integro-diferenţiale. Cum u_b este o funcţie sinusoidală de timp şi R, L, C sînt mărimi constante, rezultă că fiecare termen din membrul drept al egalităţii (5-31) trebuie să fie o funcţie sinusoidală de timp, de aceeaşi frecvenţă. Se încearcă deci pentru curentul permanent i o expresie de forma :

$$i = I_m \sin(\omega t - \varphi), \tag{5-32}$$

rămînînd de determinat amplitudinea I_m şi defazajul φ.

Înlocuind pe i din (5-32) în ecuaţia integro-diferenţială (5-31), pe care trebuie să o satisfacă pentru orice valoare a timpului, se obţine :

$$U_{bm} \sin \omega t = RI_m \sin(\omega t - \varphi) + (X_L - X_C)\, I_m \cos(\omega t - \varphi). \tag{5-33}$$

Pentru determinarea defazajului dintre tensiunea u_b şi curentul i, în identitatea (5-33) se introduce $t = 0$, obţinîndu-se :

$$0 = RI_m \sin(-\varphi) + (X_L - X_C)\, I_m \cos(-\varphi),$$

de unde rezultă :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{X}{R}, \tag{5-34}$$

în care

$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C} \qquad (5\text{-}35)$$

este *reactanța* (totală) a circuitului.

S-a determinat în acest fel defazajul φ dintre tensiunea u_b și curentul i, în funcție de parametrii R, L și C ai circuitului.

De remarcat că reactanța X poate fi pozitivă dacă $X_L > X_C$, negativă dacă $X_L < X_C$ sau chiar zero dacă $X_L = X_C$. După semnul reactanței se disting:

— circuite cu caracter inductiv, la care $X > 0$, $\varphi > 0$, adică curentul i este defazat în urmă față de tensiunea u_b;

— circuite cu caracter capacitiv, la care $X < 0$, $\varphi < 0$, adică curentul i este defazat înainte față de tensiunea u_b;

— circuite cu caracter rezistiv, la care $X = 0$, $\varphi = 0$, curentul i fiind în fază cu tensiunea u_b.

Ținînd seama de relația (5-35), rezultă:

$$\sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{X}{\sqrt{R^2+X^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{R}{\sqrt{R^2+X^2}}. \qquad (5\text{-}36)$$

Pentru determinarea amplitudinii I_m a curentului, în identitatea (5-33) se introduce $t = \frac{\varphi}{\omega}$, obținîndu-se:

$$U_{bm} \sin\varphi = X I_m,$$

unde, înlocuind pe $\sin\varphi$ cu valoarea sa dată de (5-36), rezultă:

$$I_m = \frac{U_{bm}}{\sqrt{R^2+X^2}} = \frac{U_{bm}}{Z}. \qquad (5\text{-}37)$$

Mărimea

$$Z = \sqrt{R^2+X^2} = \sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2} = \sqrt{R^2+\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \qquad (5\text{-}38)$$

se numește *impedanța* circuitului, măsurată în ohmi, care nu depinde de valoarea tensiunii și curentului, ci numai de parametrii R, L și C ai circuitului precum și de frecvență ($\omega = 2\pi f$). Se poate deci defini impedanța unui circuit ca raportul dintre amplitudinea tensiunii la borne și amplitudinea curentului prin circuit, sau ca raportul valorilor efective ale tensiunii și curentului, adică:

$$Z = \frac{U_{bm}}{I_m} = \frac{U_b}{I}. \qquad (5\text{-}39)$$

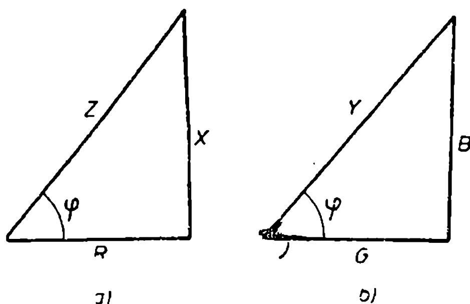


Fig. 5-18. Triunghiul impedanței (a) și al admitanței (b).

Pe baza relației (5-38), se poate scrie: $Z^2 = R^2 + X^2$, de unde rezultă că parametrii Z, R și X pot reprezenta laturile unui triunghi dreptunghic, denumit *triunghiul impedanței* (fig. 5-18, a).

Admitanța unui circuit de c.a. se notează cu Y și se definește ca fiind egală cu valoarea inversă a impedanței:

$$Y = \frac{1}{Z}. \qquad (5\text{-}40)$$

Ținînd seama de (5-38), rezultă :

$$Y^2 = \frac{1}{R^2+X^2} = \frac{R^2}{(R^2+X^2)^2} + \frac{X^2}{(R^2+X^2)^2} = G^2+B^2, \qquad (5\text{-}41)$$

unde

$$G = \frac{R}{R^2+X^2} = \frac{R}{Z^2} \qquad (5\text{-}42)$$

este *conductanța* și

$$B = \frac{X}{(R^2+X^2)} = \frac{X}{Z^2} \qquad (5\text{-}43)$$

este *susceptanța* circuitului de c.a.

În baza relației (5-41) se poate construi *triunghiul admitanței*, reprezentat în fig. 5-18, *b*.

Din triunghiul impedanței și triunghiul admitanței se deduc următoarele relații :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X}{R} = \frac{B}{G},\ \sin\varphi = \frac{X}{Z} = \frac{B}{Y},\ \cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{G}{Y}. \qquad (5\text{-}44)$$

Impedanța ca mărime complexă se definește prin raportul dintre reprezentările în complex nesimplificat sau simplificat ale tensiunii la borne și curentului din circuit (paragraful 5.1.4), adică :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_b}{\underline{I}} = Z\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}, \qquad (5\text{-}45\ a)$$

unde $Z = \frac{U_{bm}}{I_m} = \frac{U_b}{I}$ este modulul impedanței.

Folosind relațiile lui Euler : $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi$, $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi} = \cos\varphi - \mathrm{j}\sin\varphi$, impedanța complexă se poate scrie :

$$\underline{Z} = Z\cos\varphi + \mathrm{j}Z\sin\varphi, \qquad (5\text{-}45\ b)$$

de unde, ținînd seama de relațiile (5-44), rezultă :

$$\underline{Z} = R + \mathrm{j}X. \qquad (5\text{-}45\ c)$$

Admitanța complexă este :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = Y\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi} \qquad (5\text{-}46\ a)$$

sau

$$\underline{Y} = Y\cos\varphi - \mathrm{j}Y\sin\varphi \qquad (5\text{-}46\ b)$$

respectiv,

$$\underline{Y} = G - \mathrm{j}B. \qquad (5\text{-}46\ c)$$

În planul complex din fig. 5-19 sînt reprezentate impedanța $\underline{Z}$ și admitanța $\underline{Y}$ ca mărimi complexe.

Folosind exprimarea în complex a mărimilor, se obține :

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}} = \underline{U}_b\underline{Y}. \qquad (5\text{-}47)$$

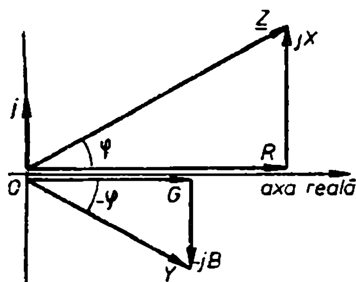


Fig. 5-19. Reprezentarea în planul complex a impedanței $\underline{Z}$ și admitanței $\underline{Y}$.

Diagrama fazorială a valorilor efective pentru circuitul reprezentat în fig. 5-17 se construiește în felul următor (fig. 5-20) :

— dintr-o origine O arbitrară și pe o direcție de asemenea arbitrară se ia un segment de dreaptă orientat care, la o anumită scară a curenților, este egal cu valoarea efectivă I a curentului ;

— căderea de tensiune ohmică, $U_R=RI$, este în fază cu curentul I ; deci, din originea O, tot pe direcția și sensul curentului, se ia un segment care la o anumită scară a tensiunilor, este egal cu U_R ;

— căderea de tensiune inductivă, $U_L=X_LI$, este defazată cu $\frac{\pi}{2}$ înaintea curentului ; la vîrful lui U_R se duce deci, perpendicular pe curent, segmentul U_L ;

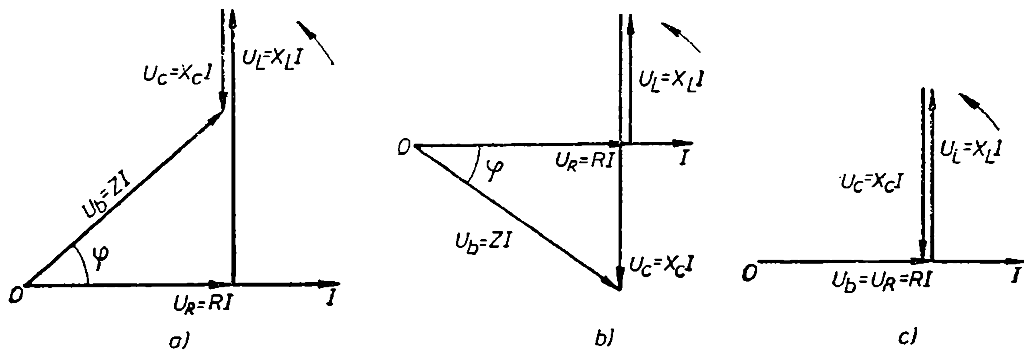


Fig. 5-20. Diagrama fazorială a circuitului *RLC* serie.

— căderea de tensiune capacitivă, $U_C=X_CI$, este defazată în urmă față de curent cu unghiul $\frac{\pi}{2}$; la vîrful lui U_L se duce, în sens opus cu U_L, segmentul U_C ;

— însumînd geometric aceste căderi de tensiune se obține tensiunea la bornele circuitului care, la scara aleasă a tensiunilor, reprezintă valoarea efectivă U_b :

$$U_b=\overline{U_R+U_L+U_C}. \tag{5-48}$$

În cazul circuitului cu caracter inductiv ($X_L>X_C$, deci $U_L>U_C$) diagrama fazorială este cea din fig. 5-20, *a*, pentru circuitul cu caracter capacitiv ($X_L<X_C$ deci $U_L<U_C$) diagrama este cea din fig. 5-20, *b*, iar pentru cazul circuitului cu caracter ohmic ($X_L=X_C$, deci $U_L=U_C$), denumit și circuit cu rezonanță de tensiune, se obține diagrama din fig. 5-20, *c*.

Din diagrama reprezentată în fig. 5-20 se obține :

$$U_b=\sqrt{U_R^2+(U_L-U_C)^2}\cdot \tag{5-49}$$

5.4. CIRCUIT CU RLC ÎN PARALEL ÎN REGIM PERMANENT SINUSOIDAL

Se consideră circuitul format prin legarea în paralel a unui rezistor cu rezistența R, a unei bobine cu inductanța L și a unui condensator cu capacitatea C, la bornele căruia se aplică tensiunea sinusoidală $u_b=\sqrt{2}U_b \sin \omega t$ (fig. 5-21).

Conform primei teoreme a lui Kirchhoff, se poate scrie următoarea relaţie între valorile instantanee ale curenţilor din laturile ce concură în nodul A : $i=i_R+i_L+$ $+i_C$. Tensiunea aplicată elementelor de circuit legate în paralel fiind aceeaşi, valorile efective ale celor trei curenţi sînt :

$$I_R=\frac{U_b}{R},\ I_L=\frac{U_b}{X_L}=\frac{U_b}{\omega L},\ I_C=\frac{U_b}{X_C}=\omega C U_b. \tag{5-50}$$

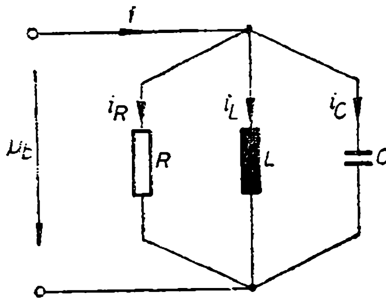


Fig. 5-21. Circuit *RLC* în paralel.

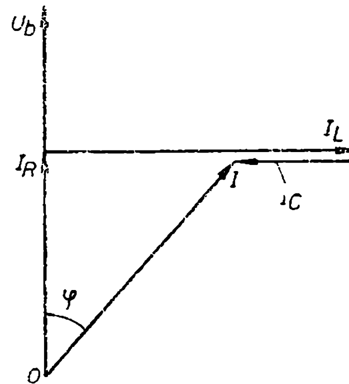


Fig. 5-22. Diagrama fazorială a circuitului *RLC* în paralel.

Diagrama fazorială a valorilor efective pentru circuitul din fig. 5-21 se reprezintă ca în fig. 5-22, unde curentul I_R este în fază cu tensiunea U_b, curentul I_L este defazat în urmă faţă de tensiune cu $\frac{\pi}{2}$ radiani, iar curentul I_C este defazat înainte faţă de tensiune cu $\frac{\pi}{2}$ radiani. Suma geometrică a acestor trei curenţi este curentul total I, defazat cu unghiul φ faţă de tensiune :

$$I=\widehat{I_R+I_L+I_C}. \tag{5-51}$$

Dacă $I_L=I_C$, atunci circuitul este cu rezonanţă de curent, avînd $\varphi=0$. Din diagrama reprezentată în fig. 5-22 se obţine :

$$I=\sqrt{I_R^2+(I_L-I_C)^2}, \tag{5-52}$$

de unde, prin înlocuirea relaţiilor (5-50) şi avînd în vedere că $I=U_bY=\frac{U_b}{Z}$, rezultă :

$$Y=\frac{1}{Z}=\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2+\left(\frac{1}{\omega L}-\omega C\right)^2} \tag{5-53 a}$$

sau, sub formă complexă :

$$\underline{Y}=G-jB=\frac{1}{R}-j\left(\frac{1}{\omega L}-\omega C\right). \tag{5-53 b}$$

5.5. CIRCUITE CU IMPEDANȚE ÎN SERIE, ÎN PARALEL ȘI MIXT

5.5.1. IMPEDANȚE ÎN SERIE

Două sau mai multe impedanțe sînt legate în serie atunci cînd sînt parcurse de același curent. După cum se va arăta în continuare, impedanța echivalentă nu este egală cu suma impedanțelor (așa ca la rezistențe legate în serie). Numai dacă impedanțele se exprimă sub forma complexă atunci impedanța echivalentă este egală cu suma impedanțelor legate în serie.

Se consideră în fig. 5-23, *a* schema electrică a circuitului unui receptor de impedanță $Z_2=\sqrt{R_2^2+\left(\omega L_2-\frac{1}{\omega C_2}\right)^2}$ alimentat de la o sursă cu tensiunea la

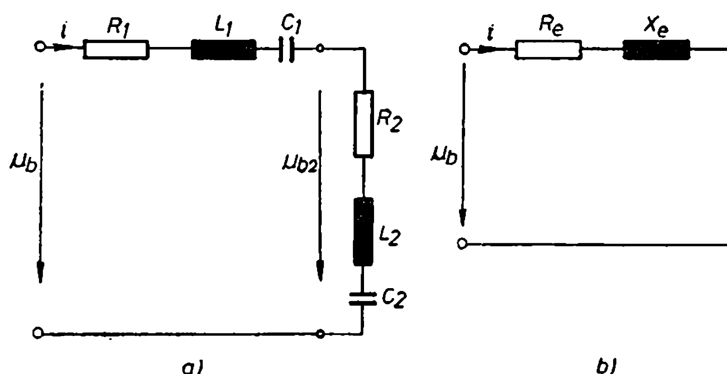


Fig. 5-23. Circuit cu două impedanțe în serie (*a*) și circuitul echivalent (*b*).

borne sinusoidală $u_b=\sqrt{2}U_b\sin\omega t$ prin intermediul unei linii de transport ce are parametrii R_1, L_1, C_1 concentrați, respectiv impedanța $Z_1=\sqrt{R_1^2+\left(\omega L_1-\frac{1}{\omega C_1}\right)^2}$. Receptorul și linia de transport constituie două impedanțe legate în serie, parcurse de curentul $i=\sqrt{2}I\sin(\omega t-\varphi)$.

Problema determinării curentului i, cînd se cunosc u_b și cele două impedanțe, se ușurează dacă circuitul dat în fig. 5-23, *a* se înlocuiește cu un circuit echivalent ca cel din fig. 5-23, *b*. Parametrii R_e și X_e, respectiv Z_e, ai circuitului echivalent trebuie determinați din condiția ca la aceeași tensiune u_b să se obțină același curent i. Problema se poate rezolva fie prin metoda grafică, fie prin metoda simbolică, adică recurgînd la exprimarea sub formă complexă a mărimilor.

Metoda grafică se bazează pe construcția diagramei fazoriale a circuitului, reprezentată în fig. 5-24, pe baza căreia se poate scrie :

$$U_b^2=(IZ_e)^2=OM^2+MN^2=I^2(R_1+R_2)^2+I^2(X_1+X_2)^2\ ;\ \ \text{tg}\,\varphi=\frac{MN}{OM}.$$

Deci,

$$Z_e=\sqrt{(R_1+R_2)^2+(X_1+X_2)^2}\ \ \text{și}\ \ \text{tg}\,\varphi=\frac{X_1+X_2}{R_1+R_2},$$

adică

$$R_e = R_1 + R_2,\ X_e = X_1 + X_2,\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{X_e}{R_e}. \tag{5-54}$$

Valoarea efectivă a curentului din circuit este :

$$I = \frac{U_b}{Z_e}.$$

Prin urmare, cînd circuitul conține două sau mai multe impedanțe în serie, rezistența echivalentă este suma aritmetică a rezistențelor din circuit, iar reactanța echivalentă este suma algebrică a reactanțelor (reactanțele pot fi pozitive sau negative).

După cum rezultă din diagrama reprezentată în fig. 5-24, tensiunea U_{b2} de la bornele receptorului nu este egală nici ca valoare și nici în fază cu tensiunea U_b de la începutul liniei. În transportul și distribuția energiei electrice, diferența geometrică $Z_1 I = \widehat{U_b - U_{b2}}$ se numește *cădere de tensiune*, iar diferența algebrică $\Delta U = U_b - U_{b2}$ se numește *pierdere de tensiune*. Pierderea de tensiune se exprimă de obicei în procente din U_b și prezintă o importanță deosebită la dimensionarea liniilor de transport. În general, pierderea de tensiune admisibilă pe linie este 5% din U_b.

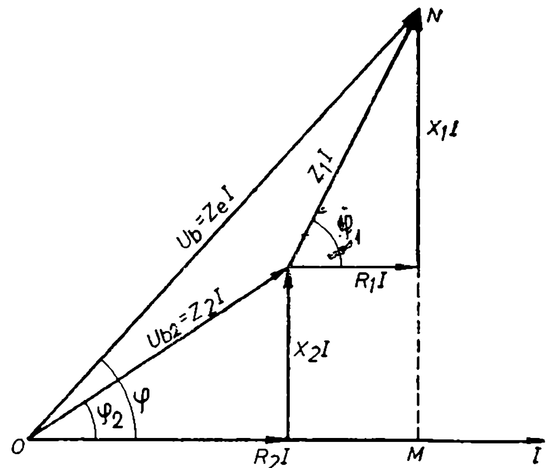


Fig. 5-24. Diagrama fazorială a circuitului cu două impedanțe în serie.

Metoda simbolică prezintă avantajul că operațiile de însumare, scădere etc., dintre mărimi nu se fac grafic, ci algebric. Mărimile fiind exprimate sub formă complexă, caracterul de însumare grafică se păstrează prin faptul că, însumînd (algebric) două mărimi complexe, se adună între ele părțile reale, respectiv părțile imaginare.

Pentru circuitul reprezentat în fig. 5-23, impedanțele complexe, legate în serie, sînt :

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1 = R_1 + j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right),$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2 = R_2 + j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right).$$

Tensiunea la bornele circuitului este egală cu suma căderilor de tensiune pe aceste două impedanțe, respectiv este egală cu căderea de tensiune pe impedanța echivalentă :

$$\underline{U}_b = \underline{I}\underline{Z}_1 + \underline{I}\underline{Z}_2 = \underline{I}\underline{Z}_e, \tag{5-55}$$

de unde rezultă impedanța echivalentă :

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = \underline{R}_e + j\underline{X}_e, \tag{5-56}$$

în care

$$R_e = R_1 + R_2, \quad X_e = X_1 + X_2.$$

Curentul din circuit și defazajul sînt :

$$I = \frac{U_b}{\underline{Z}_2}, \quad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{X_e}{R_e} = \frac{X_1 + X_2}{R_1 + R_2}. \tag{5-57}$$

În general, la legarea în serie a mai multor impedanțe $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2 \ldots, \underline{Z}_n$, impedanța echivalentă ca mărime complexă este :

$$\underline{Z}_e = \sum_{\nu=1}^{n} \underline{Z}_\nu. \tag{5-58}$$

5.5.2. IMPEDANȚE ÎN PARALEL

Două sau mai multe impedanțe sînt legate în paralel atunci cînd au la borne aceeași tensiune. În fig. 5-25 este reprezentată schema circuitului electric a două receptoare cu impedanțele Z_1 și Z_2 legate în paralel. La borne

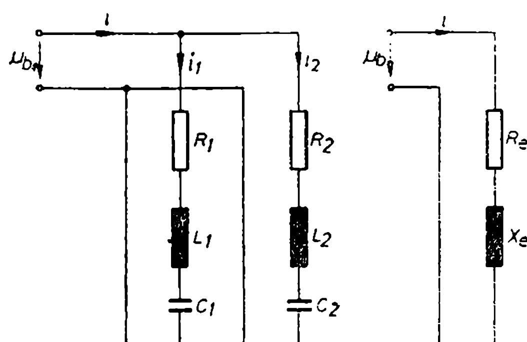


Fig. 5-25. Circuit cu două impedanțe în paralel și circuitul echivalent.

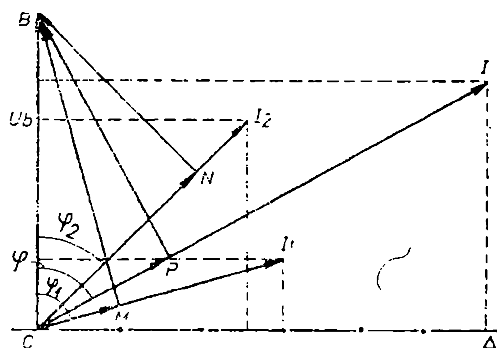


Fig. 5-26. Diagrama fazorială a circuitului cu două impedanțe în paralel.

se aplică tensiunea sinusoidală $u_b = \sqrt{2}U_b \sin \omega t$ care determină curenții $i_1 = \sqrt{2}I_1 \sin(\omega t - \varphi_1)$ și $i_2 = \sqrt{2}I_2 \sin(\omega t - \varphi_2)$.

Determinarea curentului total $i = i_1 + i_2 = \sqrt{2}I \sin(\omega t - \varphi)$ se face ușor dacă se cunosc parametrii R_e și X_e ai impedanței echivalente. Impedanța echivalentă, conectată la aceeași tensiune u_b, trebuie să absoarbă același curent i ca și cele două impedanțe în paralel. Această problemă se poate rezolva fie prin metoda grafică, fie prin metoda simbolică.

Metoda grafică. Valorile efective ale curenților sînt :

$$I_1 = \frac{U_b}{Z_1}, \quad I_2 = \frac{U_b}{Z_2}, \quad I = \frac{U_b}{Z_e}, \tag{5-59}$$

avînd următoarele defazaje față de tensiunea la borne :

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{X_1}{R_1} = \frac{\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}}{R_1}, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{X_2}{R_2} = \frac{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}}{R_2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{X_e}{R_e}, \qquad (5\text{-}60)$$

Determinarea parametrilor R_e și X_e se face pe baza diagramei fazoriale a circuitului reprezentată în fig. 5-26, unde s-a avut în vedere că $\widehat{I_1 + I_2} = I$. Semnificația segmentelor din diagramă este următoarea :

$OM = R_1 I_1$ — căderea ohmică de tensiune la primul receptor;

$MB = X_1 I_1$ — căderea reactivă de tensiune la primul receptor;

$ON = R_2 I_2$, $NB = X_2 I_2$ — căderile de tensiune la al doilea receptor;

$OP = R_e I$, $PB = X_e I$ — căderile de tensiune pe rezistența, respectiv reactanța echivalentă.

Din diagramă se determină pe cale grafică curentul I, ținînd cont de scara curenților, precum și defazajul φ. De asemenea, măsurînd segmentele OP și PB la scara tensiunilor și împărțind cu valoarea lui I, rezultă R_e și X_e. Proiectînd cei trei curenți pe U_b și pe o dreaptă Δ perpendiculară pe U_b, se obțin relațiile :

$$I \cos \varphi = I_1 \cos \varphi_1 + I_2 \cos \varphi_2,$$

$$I \sin \varphi = I_1 \sin \varphi_1 + I_2 \sin \varphi_2.$$

Ținînd seama și de relațiile (5-59), (5-60), rezultă :

$$\frac{R_e}{Z_e^2} = \frac{R_1}{Z_1^2} + \frac{R_2}{Z_2^2}, \quad \frac{X_e}{Z_e^2} = \frac{X_1}{Z_1^2} + \frac{X_2}{Z_2^2}$$

sau :

$$G_e = G_1 + G_2, \quad B_e = B_1 + B_2. \qquad (5\text{-}61)$$

Așadar, la circuitele cu impedanțe în paralel, se adună conductanțele, respectiv susceptanțele, pentru a obține conductanța, respectiv susceptanța echivalentă a circuitului. Aceasta, spre deosebire de circuitele cu impedanțe legate în serie unde se adună rezistențele, respectiv reactanțele.

Admitanța echivalentă Y_e și impedanța echivalentă Z_e devin cunoscute de îndată ce se cunosc G_e și B_e, adică :

$$Y_e = \sqrt{G_e^2 + B_e^2}, \quad Z_e = \frac{1}{Y_e} = \sqrt{R_e^2 + X_e^2},$$

unde

$$R_e = \frac{G_e}{Y_e^2} = \frac{G_e}{G_e^2 + B_e^2}, \quad X_e = \frac{B_e}{Y_e^2} = \frac{B_e}{B_e^2 + G_e^2}$$

respectiv,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{B_e}{G_e}.$$

Metoda simbolică de calcul a circuitelor cu impedanțe în paralel, cu referire la circuitul reprezentat în fig. 5-25, *a*, constă în determinarea curenților prin cele două impedanțe și curentului total, ca mărimi complexe :

$$\underline{I}_1=\frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_1},\quad \underline{I}_2=\frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_2},\quad \underline{I}=\frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_e}. \tag{5-62}$$

Avînd în vedere prima teoremă a lui Kirchhoff aplicată în complex: $\underline{I}=\underline{I}_1+\underline{I}_2$ și ținînd seama de (5-62), rezultă :

$$\frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_e}=\frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_1}+\frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_2}$$

sau

$$\frac{1}{\underline{Z}_e}=\frac{1}{\underline{Z}_1}+\frac{1}{\underline{Z}_2},\quad \underline{Y}_e=\underline{Y}_1+\underline{Y}_2, \tag{5-63}$$

unde

$$\underline{Z}_1=R_1+jX_1=R_1+j\left(\omega L_1-\frac{1}{\omega C_1}\right),$$

$$\underline{Z}_2=R_2+jX_2=R_2+j\left(\omega L_2-\frac{1}{\omega C_2}\right).$$

În general, la legarea în paralel a mai multor impedanțe (admitanțe), $\underline{Z}_1$ ($\underline{Y}_1$), $\underline{Z}_2$ ($\underline{Y}_2$), ..., $\underline{Z}_n$ ($\underline{Y}_n$), impedanța (admitanța) echivalentă ca mărime complexă este :

$$\frac{1}{\underline{Z}_e}=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\underline{Z}_\nu},\quad \underline{Y}_e=\sum_{\nu=1}^{n}\underline{Y}_\nu. \tag{5-64}$$

În cazul cînd numai două impedanțe $\underline{Z}_1$ și $\underline{Z}_2$ sînt legate în paralel, impedanța echivalentă se calculează cu relația :

$$\underline{Z}_e=\frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}. \tag{5-65}$$

De remarcat că la circuitele serie se adună impedanțele, iar la circuitele paralel se adună admitanțele, ca mărimi complexe.

5.5.3. IMPEDANȚE ÎN CONECTARE MIXTĂ (SERIE ȘI PARALEL)

În numeroase situații, circuitele electrice monofazate conțin impedanțe conectate atît în serie, cît și în paralel. Metoda cea mai expeditivă de calcul a unor astfel de circuite este cea simbolică, adică de exprimare sub formă complexă a mărimilor. Metoda grafică este mult prea complicată pentru a fi folosită în acest caz.

Impedanța complexă echivalentă a circuitului ce conține impedanțe în conectare mixtă se determină simplu, așa cum se arată în aplicația următoare referitoare la un caz concret.

Aplicația 5-3. Se consideră trei impedanțe: $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$, $\underline{Z}_2 = j\omega L_2$, $\underline{Z}_3 = -j\frac{1}{\omega C_3}$ conectate între ele conform schemei din fig. 5-27. Să se determine impedanța echivalentă a circuitului și curenții.

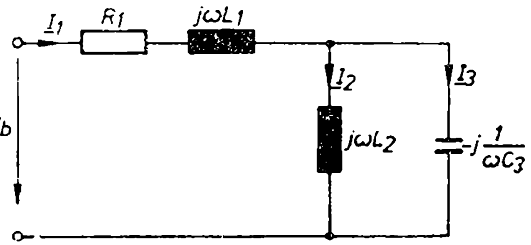


Fig. 5-27. Circuit cu elemente în conectare mixtă.

Rezolvare.

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23},$$

unde $\underline{Z}_{23}$ este impedanța echivalentă a impedanțelor $\underline{Z}_2$ și $\underline{Z}_3$ conectate în paralel:

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{\frac{L_2}{C_3}}{j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_3}\right)}.$$

Deci

$$\underline{Z}_e = R_e + jX_e = R_1 + j\left(\omega L_1 - \frac{\frac{L_2}{C_3}}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_3}}\right),$$

în care:

$$R_e = R_1,\ X_e = \omega L_1 - \frac{\omega L_2}{\omega^2 L_2 C_3 - 1}.$$

Curenții din circuit se calculează cu relațiile:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_e},\quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_b - \underline{I}_1\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{I}_1\underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_2},\quad \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_b - \underline{I}_1\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3} = \frac{\underline{I}_1\underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_3},$$

în care apare și tensiunea la borne exprimată în formă complexă, $\underline{U}_b$. Considerînd valoarea momentană a acestei tensiuni $u_b = \sqrt{2}U_b \sin \omega t$ și recurgînd la exprimarea în formă complexă simplificată, se obține: $\underline{U}_b = U_b e^{j0} = U_b$.

În afară de circuitele cu impedanțe în conectare mixtă (serie și paralel), există și circuite cu impedanțe în conectare complexă (în formă de poligon sau de stea). În astfel de situații, impedanța echivalentă poate fi găsită numai după ce se realizează una sau mai multe transfigurări, din poligon în stea sau din stea în poligon. La capitolul 6, referitor la rețele electrice trifazate, se va prezenta metoda de transfigurare de la triunghi la stea și invers.

5.6. CIRCUITE CUPLATE MAGNETIC

Cuplajul magnetic se realizează prin intermediul bobinelor între care există inductanțe mutuale (reciproce). Bobinele cuplate magnetic pot fi legate în serie, în paralel sau pot aparține unor circuite distincte, așa cum este cazul circuitului primar și circuitului secundar al unui transformator electric.

Prin intermediul inductanțelor de cuplaj magnetic, apare o t.e.m. indusă în prima bobină de către curentul variabil din a doua bobină, respectiv în a doua bobină apare o t.e.m., indusă de curentul variabil din prima bobină :

$$u_{e21} = -L_{21} \frac{di_2}{dt}, \quad u_{e12} = -L_{12} \frac{di_1}{dt} \tag{5-66, a}$$

sau, sub formă complexă

$$\underline{U}_{e21} = -j\omega L_{21} \underline{I}_2, \quad \underline{U}_{e12} = -j\omega L_{12} \underline{I}_1. \tag{5-66, b}$$

Acestor t.e.m. induse le corespund căderi de tensiune pe cele două bobine, egale și de semn opus cu t.e.m. induse.

Cunoscînd că inductanța mutuală dintre două bobine cuplate este $L_{12} = L_{21} = M$, corespunzător acesteia se introduce impedanța de cuplaj magnetic:

$$\underline{Z}_M = j\omega M. \tag{5-67}$$

Așadar, la calculul circuitelor în care intervin cuplaje magnetice se ține seama și de impedanța de cuplaj. În cele ce urmează se prezintă unele exemple prin care se ilustrează modul de evidențiere a cuplajelor magnetice.

Exemplul 1. Se consideră un circuit ce conține două bobine legate în serie și cuplate magnetic adițional (fig. 5—28). Tensiunea sinusoidală u_b aplicată la bornele circuitului este egală cu suma căderilor de tensiune din circuit :

$$u_b = R_1 i + L_1 \frac{di}{dt} + L_{21} \frac{di}{dt} + R_2 i + L_2 \frac{di}{dt} + L_{12} \frac{di}{dt}$$

sau

$$u_b = (R_1 + R_2) \frac{di}{dt} + (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt} \cdot \tag{5-68, a}$$

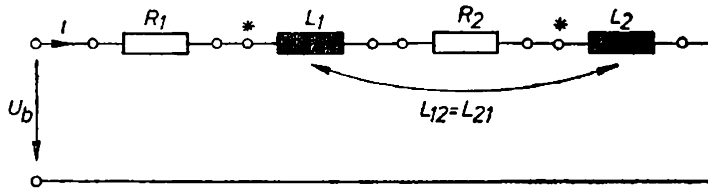


Fig. 5-28. Circuit serie cu bobine cuplate magnetic.

Sub formă complexă, această ecuație devine

$$\underline{U}_b = (R_1 + R_2) \underline{I} + j\omega (L_1 + L_2 + 2M) \underline{I}. \tag{5-68, b}$$

Impedanța echivalentă a acestui circuit este :

$$\underline{Z} = R_1 + R_2 + j\omega (L_1 + L_2 + 2M), \tag{5-69}$$

în care $R_1 + R_2 = R_e$ este rezistența echivalentă și $L_1 + L_2 + 2M = L_e$ este inductanța echivalentă (v. paragraful 4.9.3).

Ecuația circuitului poate fi scrisă și sub forma

$$\underline{U}_b = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2\underline{Z}_M) \underline{I}, \tag{5-70}$$

unde $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$, $\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2$ și $\underline{Z}_M = j\omega M$.

Exemplul 2. Se consideră autotransformatorul coborîtor de tensiune (fig. 5-29, *a*), respectiv ridicător de tensiune (fig. 5-29, *b*).

La autotransformatorul coborîtor de tensiune cuplajul magnetic între bobina parcursă de curentul i_1 și bobina parcursă de curentul i_3 este adițional și, pe baza schemei electrice reprezentată în partea dreaptă a fig. 5-29, *a*, se scriu următoarele ecuații:

— în raport cu valorile momentane

$$i_1 = i_2 + i_3$$

$$u_{b1} = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + L_{31} \frac{di_3}{dt} + R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \qquad (5\text{-}71,\ a)$$

$$u_{b2} = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} = R_3 i_3 + L_3 \frac{di_3}{dt} + L_{13} \frac{di_1}{dt}$$

— în formă complexă

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3$$

$$\underline{U}_{b1} = R_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega L_{31} \underline{I}_3 + R_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 \qquad (5\text{-}71,\ b)$$

$$\underline{U}_{b2} = R_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 = R_3 \underline{I}_3 + j\omega L_3 \underline{I}_3 + j\omega L_{13} \underline{I}_1$$

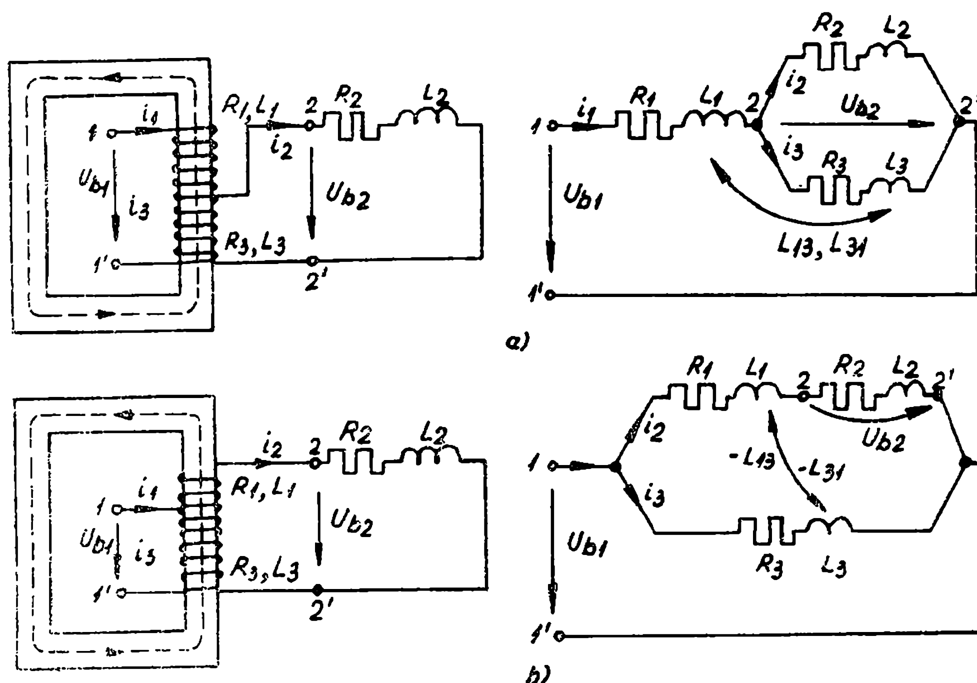


Fig. 5-29. Autotransformatorul coborîtor de tensiune (*a*) și ridicător de tensiune (*b*).

În schimb, pentru autotransformatorul ridicător de tensiune cuplajul magnetic între bobina parcursă de curentul i_2 și bobina parcursă de curentul i_3 este în opoziție. În această situație, schema electrică este cea reprezentată în partea dreaptă a fig. 5-29, *b*, pe baza căreia se obțin ecuațiile:

— în forma referitoare la valorile momentane

$$i_1=i_2+i_3$$

$$\begin{aligned} u_{b1}&=R_3i_3+L_3\frac{di_3}{dt}-L_{13}\frac{di_2}{dt} \\ u_{b2}&=R_2i_2+L_1\frac{di_2}{dt}-L_{31}\frac{di_3}{dt}+R_2i_2+L_2\frac{di_2}{dt} \end{aligned} \quad (5\text{-}72,\ a)$$

— în formă complexă

$$\underline{I}_1=\underline{I}_2+\underline{I}_3$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{b1}&=R_3\underline{I}_3+j\omega L_3\underline{I}_3-j\omega L_{13}\underline{I}_2 \\ \underline{U}_{b2}&=R_2\underline{I}_2+j\omega L_1\underline{I}_2-j\omega L_{31}\underline{I}_3+R_2\underline{I}_2+j\omega L_2\underline{I}_2 \end{aligned} \quad (5\text{-}72,\ b)$$

Dacă se cere să se determine curenții din circuitul autotransformatorului, este avantajos să se folosească forma complexă a ecuațiilor (formă algebrică).

Exemplul 3. Se consideră cuplajul magnetic între circuitul primar și circuitul secundar al unui transformator (fig. 5-30, *a*). Se introduc notațiile $\underline{Z}_1=R_1+j\omega L_1$ — impedanța circuitului primar, $\underline{Z}_2=R_2+j\left(\omega L_2-\frac{1}{\omega C_2}\right)$ — impedanța circuitului secundar, $\underline{Z}_M=j\omega M$ — impedanța de cuplaj magnetic între circuitul primar și cel secundar.

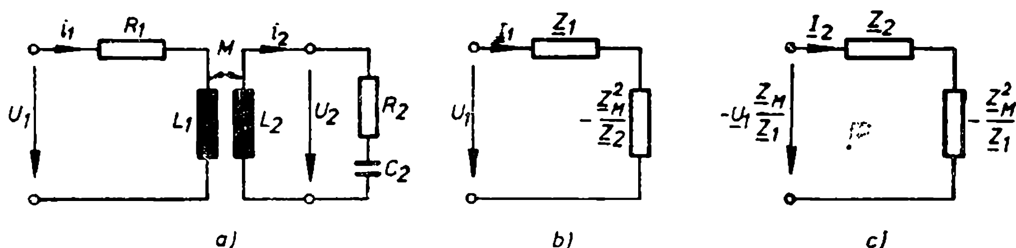


Fig. 5-30. Schemele transformatorului electric.

Ecuațiile în complex ale transformatorului sînt:

$$\underline{U}_1=\underline{Z}_1\underline{I}_1+\underline{Z}_M\underline{I}_2,\ 0=\underline{Z}_M\underline{I}_1+\underline{Z}_2\underline{I}_2 \quad (5\text{-}73)$$

din care rezultă:

$$\underline{I}_1=\underline{U}_1\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2-\underline{Z}_M^2}=\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1-\underline{Z}_M^2/\underline{Z}_2}, \quad (5\text{-}74)$$

$$\underline{I}_2=-\underline{U}_1\frac{\underline{Z}_M}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2-\underline{Z}_M^2}=\frac{-\underline{U}_1\underline{Z}_M/\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2-\underline{Z}_M^2/\underline{Z}_1}.$$

Aceste relații ale curenților permit întocmirea schemelor echivalente ale transformatorului redus la primar (fig. 5-30, *b*), respectiv redus la secundar (fig. 5-30, *c*).

Mărimea $\underline{Z}_M^2/\underline{Z}_2$ reprezintă *impedanța transpusă* (reflectată) a circuitului secundar la cel primar, iar mărimea $\underline{Z}_M^2/\underline{Z}_1$ reprezintă impedanța transpusă a circuitului primar la circuitul secundar.

5.7. CIRCUITE ELECTRICE ÎN REGIM DE REZONANȚĂ

5.7.1. CIRCUIT CU REZONANȚĂ SIMPLĂ DE TENSIUNE

Rezonanța de tensiune poate să apară în circuitele de curent alternativ ce conțin bobine și condensatoare legate în serie. În fig. 5-31, *a* este reprezentată schema electrică a unui astfel de circuit constînd dintr-o rezistență *R*,

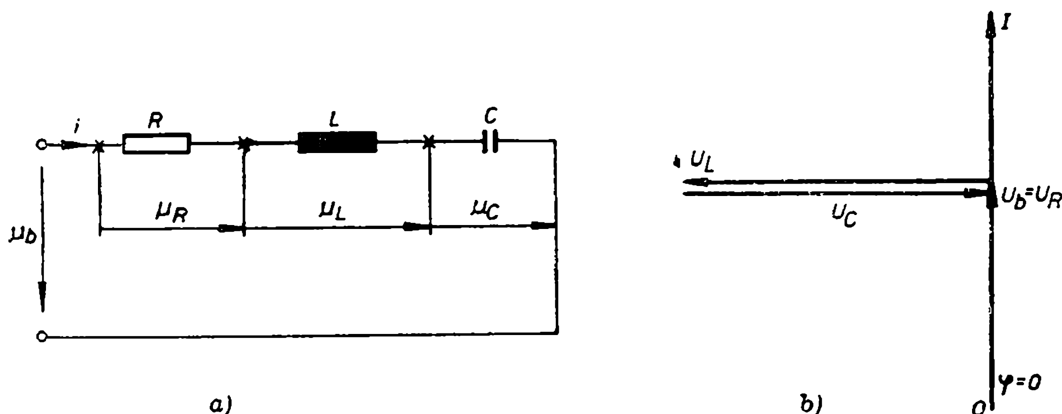


Fig. 5-31. Circuit cu rezonanță simplă de tensiune (*a*) și diagrama sa (*b*).

o inductanță *L* și o capacitate *C* legate în serie. Pentru acest circuit se pot scrie relațiile :

$$Z=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2},\quad I=\frac{U_b}{Z},\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Valorile efective ale căderilor de tensiune pe cele trei elemente în serie sînt :

$$U_R=RI,\ U_L=\omega LI \text{ și } U_C=\frac{I}{\omega C}.$$

Condiția ca în circuit să apară fenomenul de rezonanță de tensiune este ca $X=\omega L-\frac{1}{\omega C}=0$, de unde rezultă formula lui Thomson pentru frecvența de rezonanță :

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}},\quad f_0=\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \tag{5-75}$$

Cu această condiție îndeplinită, rezultă :

$$Z=R,\quad I=I_0=\frac{U_b}{R},\quad \varphi=0,\quad U_L=U_C.$$

Diagrama circuitului în cazul rezonanței este reprezentată în fig. 5-31, *b*.

Trebuie subliniat faptul că la o tensiune de borne relativ mică pot apare tensiuni $U_L=U_C$ foarte mari (periculoase pentru izolația bobinei, respectiv pentru dielectricul condensatorului).

Rezonanţa de tensiune într-un circuit se poate obţine astfel:

— dacă parametrii L şi C sînt daţi, prin alimentarea circuitului cu o tensiune sinusoidală de frecvenţă f_0;

— dacă tensiunea sinusoidală este de frecvenţă dată, prin modificarea parametrilor L sau C, pînă ce condiţia de rezonanţă (5-75) este satisfăcută.

Pentru studiul rezonanţei sînt importante unele mărimi la care ne referim sumar în cele ce urmează.

Impedanţa caracteristică este egală cu valoarea comună a reactanţei inductive şi a reactanţei capacitive în caz de rezonanţă:

$$Z_c = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \tag{5-76}$$

Factorul de calitate se exprimă prin raportul dintre impedanţa caracteristică şi rezistenţa electrică a circuitului:

$$Q = \frac{Z_c}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R}. \tag{5-77}$$

Factorul de amortizare se defineşte prin valoarea inversă a factorului de calitate:

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{R}{Z_c}. \tag{5-78}$$

Raportul dintre curentul din circuit în regim de nerezonanţă şi curentul la rezonanţă este:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{U_b}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} : \frac{U_b}{R}$$

sau

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\right)^2}}, \tag{5-79}$$

unde $\varepsilon = \frac{f}{f_0} = \frac{\omega}{\omega_0}$.

Curbele de rezonanţă se obţin reprezentînd raportul $\frac{I}{I_0}$ în funcţie de ε (figura 5-32). Analizînd forma acestor curbe se remarcă faptul că la rezonanţă, cînd $\varepsilon = 1$, curentul din circuit obţine valoare maximă $I = I_0$, ceea ce înseamnă că impedanţa circuitului este minimă, $Z = R$.

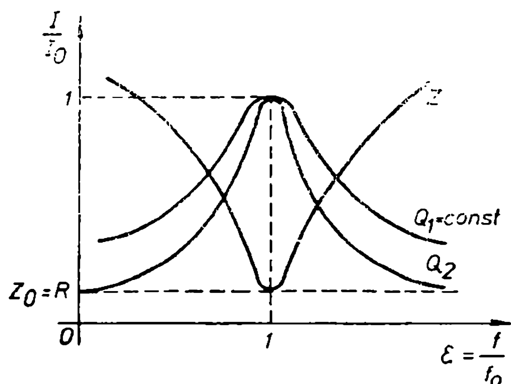


Fig. 5-32. Curbe de rezonanţă de tensiune.

Selectivitatea este proprietatea circuitului de a conduce la o variaţie pronunţată a curentului din circuit în funcţie de frecvenţă. Un circuit este cu atît mai selectiv, cu cît curba de rezonanţă este mai ascuţită.

Fenomenul de rezonanţă are la bază oscilaţia ce apare între energia magnetică

$W_m = \frac{1}{2} i^2 L$ înmagazinată în cîmpul magnetic al bobinei şi energia electrică $W_e = \frac{1}{2} u_C^2 C$ înmagazinată în cîmpul electric al condensatorului. Valorile maxime ale acestor energii, corespunzătoare amplitudinilor I_m şi U_{Cm}, sînt egale, ceea ce se poate justifica ţinînd seama de relaţia (5-75).

Un circuit cu rezonanţă de tensiune primeşte de la sursa de tensiune sinusoidală numai energia corespunzătoare pierderilor prin efect Joule-Lenz din circuit. În cazul ideal, cînd $R=0$, în circuit nu au loc pierderi şi energia absorbită de la sursă este nulă.

Rezonanţa de tensiune analizată mai sus se numeşte simplă din cauză că apare la cel mai simplu circuit electric, respectiv pentru că există o singură valoare a frecvenţei pentru care circuitul funcţionează în regim de rezonanţă.

5.7.2. CIRCUIT CU REZONANŢĂ SIMPLĂ DE CURENT

Rezonanţa de curent apare în circuitele de curent alternativ ce conţin bobine şi condensatoare conectate în paralel. Un astfel de circuit este reprezentat în fig. 5-33, *a*. Tensiunea la bornele elementelor legate în paralel fiind aceeaşi, se pot scrie pentru valorile efective ale curenţilor relaţiile :

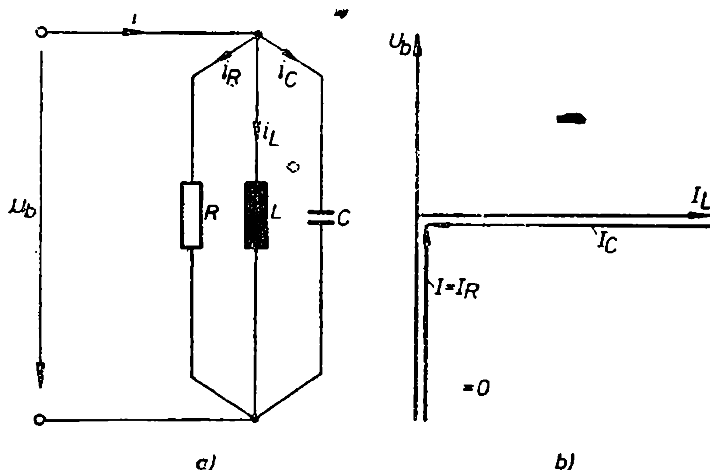


Fig. 5-33. Circuit cu rezonanţă simplă de curent (*a*) şi diagrama sa (*b*).

$$I_R = \frac{U_b}{R}, \quad I_L = \frac{U_b}{\omega L}, \quad I_C = U_b \omega C, \quad I = U_b Y_e,$$

unde $Y_e = \sqrt{G_e^2 + B_e^2}$ este admitanţa echivalentă a circuitului.

Defazajul dintre U_b şi I depinde de raportul dintre susceptanţa echivalentă B_e şi conductanţa echivalentă G_e a circuitului :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{B_e}{G_e} = \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{\frac{1}{R}}.$$

Dacă $B_e=0$, adică $I_L=I_C$, atunci curentul total I este egal cu I_R și în fază cu U_b. În aceste condiții, în circuit are loc rezonanța de curent.

Condiția de rezonanță este îndeplinită pentru o anumită valoare a pulsației pentru care $B_e=\frac{1}{\omega L}-\omega C=0$, de unde rezultă frecvența de rezonanță (formula lui Thomson):

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}};\quad f_0=\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \tag{5-80}$$

Dacă condiția de rezonanță este îndeplinită, rezultă $Y_e=G_e=\frac{1}{R}$, $Z_e=R$, $I_L=I_C$, $I=I_0=I_R=\frac{U_b}{R}$, $\varphi=0$. Pentru această situație, diagrama fazorială a circuitului este cea reprezentată în fig. 5-33, *b*.

La rezonanță, curenții I_L și I_C se exprimă prin relațiile:

$$I_L=I_C=\frac{U_b}{\omega_0 L}=U_b\omega_0 C=QI_R,$$

unde

$$Q=\frac{R}{\omega_0 L}=R\omega_0 C \tag{5-81}$$

este factorul de calitate al circuitului. Dacă $R>\omega_0 L=\frac{1}{\omega_0 C}$, adică $Q>1$, atunci curenții I_L și I_C sînt mai mari decît I_R, de unde provine și denumirea de *circuit cu rezonanță de curent.*

Caracterizarea proprietății de selectivitate a circuitului cu rezonanță de curent se face pe baza curbei de rezonanță, care reprezintă variația valorii relative $\frac{I}{I_0}$ a curentului din circuit în raport cu frecvența relativă $\varepsilon=\frac{f}{f_0}=\frac{\omega}{\omega_0}$. Rezultă:

$$I=U_b\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2+\left(\frac{1}{\omega L}-\omega C\right)^2}$$

și

$$\frac{I}{I_0}=\sqrt{1+Q^2\left(\frac{1}{\varepsilon}-\varepsilon\right)^2}. \tag{5-82}$$

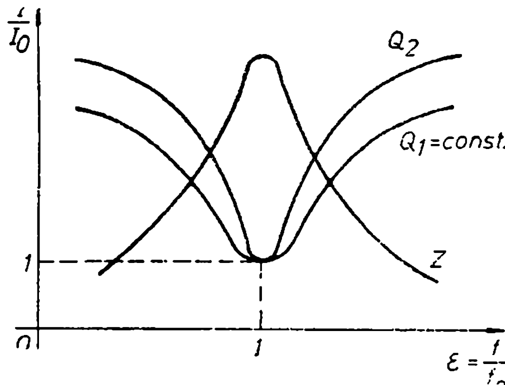


Fig. 5-34. Curbe de rezonanță de curent.

În fig. 5-34 sînt reprezentate două curbe de rezonanță pentru două valori constante ale factorului de calitate Q. În cazul particular, cînd $R=\infty$, curentul absorbit de la sursă în regim de rezonanță este nul, iar impedanța echivalentă a circuitului este infinită. În această situație, în circuit nu există pierderi care să fie acoperite de către sursă. Un astfel de circuit se numește circuit oscilant

ideal, curenții I_L și L_C fiind întreținuți prin oscilația dintre energia înmagazinată în cîmpul electric al condensatorului și energia cîmpului magnetic al bobinei.

Rezonanța de curent analizată mai sus se numește *simplă* pentru că are loc la o singură valoare a frecvenței tensiunii de alimentare.

5.7.3. REZONANȚA LA CIRCUITELE ELECTRICE COMPLEXE

La cele două paragrafe precedente s-a arătat că în cazul rezonanței de tenviune, impedanța echivalentă a circuitului obține, pentru frecvența de rezonanță, saloare minimă, curentul din circuit fiind maxim, iar în cazul rezonanței de curent, impedanța echivalentă obține valoare maximă, curentul din circuit fiind minim.

În cazul circuitelor electrice cu elemente în conectare complexă, pot apare situații (condiții) în care are loc atît rezonanță de tensiune, cît și rezonanță de curent. Condițiile de rezonanță se pot pune sub următoarele aspecte :

— defazajul dintre tensiunea la borne și curentul absorbit de la sursă să fie egal cu zero ;

— impedanța echivalentă a circuitului să fie minimă (rezonanță de tensiune) sau maximă (rezonanță de curent).

Pe baza acestor condiții pot rezulta mai multe valori ale frecvenței pentru care circuitul funcționează în regim de rezonanță (rezonanță multiplă).

Aplicația 5-4. O bobină avînd rezistența $R=6\ \Omega$ și reactanța $X_L=\omega L=8\ \Omega$ este alimentată de la o sursă de curent alternativ de frecvență industrială $f=50$ Hz. Să se determine capacitatea C care trebuie legată în paralel cu bobina pentru ca în circuit să apară rezonanța de curent.

Rezolvare. Circuitul considerat are schema din fig. 5-35. Conductanța și susceptanța echivalentă a circuitului sînt :

$$G_e=\frac{R}{R^2+(\omega L)^2},\quad B_e=-\omega C+\frac{\omega L}{R^2+(\omega L)^2},$$

unde $\omega=2\pi f=314$.

Condiția ca în circuit să apară rezonanță de curent este : $B_e=0$, adică :

$$C=\frac{L}{R^2+(\omega L)^2},$$

de unde rezultă :

$$C=\frac{1}{\omega}\frac{\omega L}{R^2+(\omega L)^2}=\frac{1}{314}\frac{8}{6^2+8^2}=254\cdot 10^{-6}\ \text{F}.$$

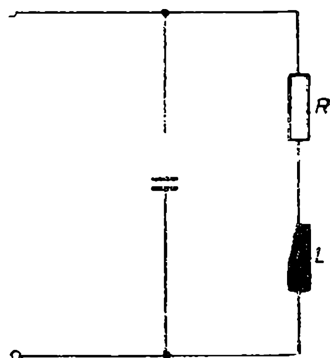


Fig. 5-35. Circuit rezonant.

5.7.4. FEROREZONANȚA

Fenomenul de ferorezonanță apare în circuitele de c.a. ce conțin bobine cu miez de fier saturat (neliniare) și condensatoare. Circuitul este cu *ferorezonanță de tensiune* la conectarea în serie, respectiv cu *ferorezonanță de curent* la conectarea în paralel a

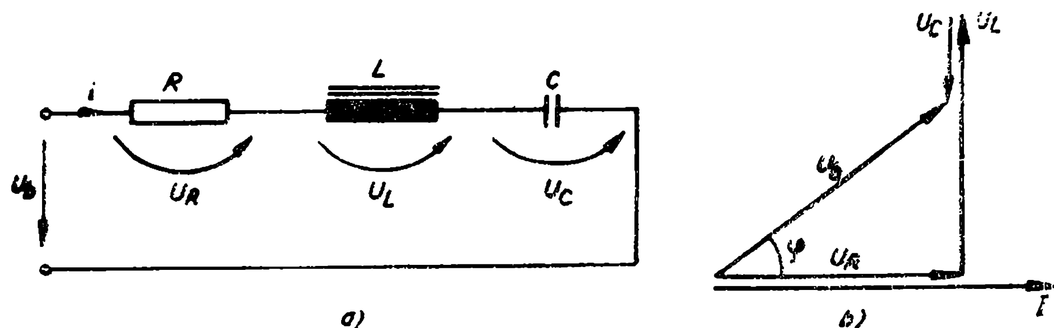


Fig. 5-36. Circuit cu ferorezonanță de tensiune (*a*) și diagrama sa (*b*).

bobinei și condensatorului. În cele ce urmează ne referim numai la ferorezonanța de tensiune.

Se consideră circuitul realizat dintr-un rezistor, o bobină cu miez și un condensator conectate în serie (fig. 5-36, *a*) la bornele căruia se aplică tensiunea sinusoidală cu valoarea efectivă U_b. Datorită bobinei neliniare, curentul I din circuit este nesinusoidal, avînd armonica fundamentală I_1 și armonici superioare. În fig. 5-36, *b* este reprezentată diagrama fazorială a acestui circuit, cu referire la valorile efective ale tensiunilor și a armonicii fundamentale a curentului ($I_1 \cong I$).

Fenomenul de ferorezonanță de tensiune constă în variații în salt și foarte mari ale curentului I din circuit, precum și a defazajului dintre curent și tensiune la variații lente, crescătoare și descrescătoare, ale tensiunii la borne. Pentru a explica acest fenomen se ține seama de caracteristicile volt-amper ale celor trei elemente legate în serie și reprezentate în fig. 5-37. De asemenea, se ține seama de relatia dintre tensiuni dedusă pe baza diagramei din fig. 5-36, *b* :

$$U_b = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}. \qquad (5\text{-}83)$$

Curentul I din circuit se modifică în funcție de tensiunea U_b conform curbei $OACB$ din fig. 5-37, construită pe baza relației (5-83). Majorînd treptat tensiunea la borne, punctul de funcționare se deplasează din O spre A și apoi, printr-un salt de curent, trece în B, continuîndu-se deplasarea sa în lungul curbei. Această variație bruscă a curentului din circuit este însoțită și de o variație bruscă a defazajului deoarece, pînă în punctul A avem $U_L > U_C$, iar în punctul B avem $U_L < U_C$. Pentru valori descrescătoare ale tensiunii la borne, punctul de funcționare se deplasează pe caracteristica volt-amper a circuitului de la B pînă în punctul C și, mai departe, prin salt trece în D. Și acest salt de curent este însoțit de o variație bruscă a fazei.

Dacă circuitul este fără pierderi ($R=0$), iar tensiunea la borne și curentul sînt sinusoidale (neglijînd armonicile superioare), atunci punctul C se situează pe axa absciselor, obținîndu-se caracteristica volt-amper a circuitului trasată punctat în fig. 5-37.

Circuitele cu ferorezonanță de tensiune sînt folosite la construcția stabilizatoarelor de tensiune. În adevăr, pe porțiunea CB a caracteristicii, corespunzătoare zonei saturate a miezului bobinei, tensiunea U_L la bornele bobinei este

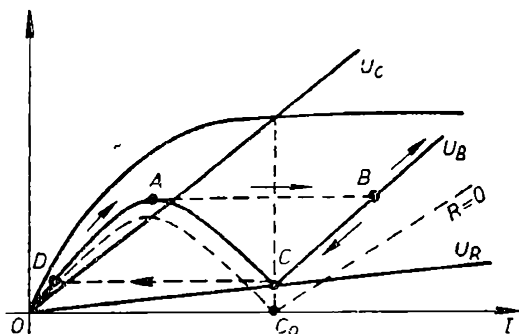


Fig. 5-37. Curbe de ferorezonanță de tensiune.

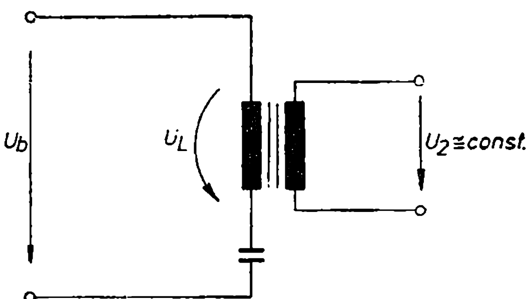


Fig. 5-38. Schema electrică a unui stabilizator de tensiune cu ferorezonanță.

aproximativ constantă, cu toate că tensiunea U_b de la bornele circuitului se modifică între limite destul de mari. În fig. 5-38 este reprezentată schema electrică a stabilizatorului cu ferorezonanță de tensiune.

5.8. PUTEREA LA CIRCUITELE MONOFAZATE ÎN REGIM SINUSOIDAL

La circuitele și rețelele de c.a. în regim sinusoidal intervin trei forme ale puterii : puterea activă, puterea reactivă și puterea aparentă.

5.8.1. PUTEREA ACTIVĂ

Într-un circuit monofazat alimentat cu tensiunea $u_b=\sqrt{2}U_b \sin \omega t$ și parcurs de curentul $i=\sqrt{2}I \sin(\omega t-\varphi)$, puterea electromagnetică instantanee este :

$$p=u_b i=\sqrt{2}U_b\sqrt{2}I \sin \omega t \sin(\omega t-\varphi)=U_b I \cos\varphi-U_b I \cos(2\omega t-\varphi). \quad (5\text{-}84)$$

În fig. 5-39 este reprezentată variația în timp a puterii electromagnetice $p=u_b i$. Se remarcă faptul că în decursul unei perioade puterea electromagnetică instantanee obține atît valori pozitive, cît și valori negative. Cînd puterea electromagnetică instantanee este pozitivă, fluxul de energie electromagnetică este dirijat de la sursă spre receptor, iar cînd este negativă, fluxul de energie este dirijat de la receptor spre sursă.

Se numește *putere activă*, notată cu P, valoarea medie a puterii electromagnetice instantanee pe un interval de timp egal cu o perioadă, adică:

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p\,dt=U_b I\cos\varphi, \quad (5\text{-}85)$$

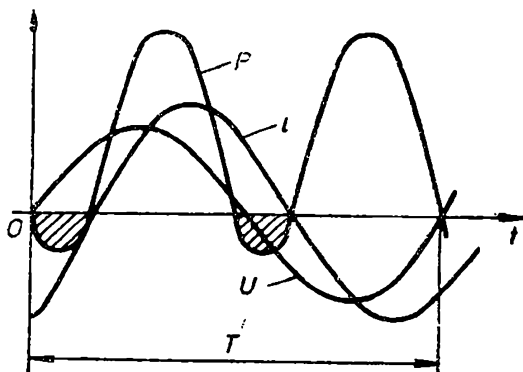


Fig. 5-39. Variația în timp a puterii electromagnetice instantanee p.

unde s-a ţinut seama că valoarea medie pentru o perioadă a celui de-al treilea termen din expresia lui p (relaţia 5-84) este zero.

Deci, în regim sinusoidal, puterea activă este egală cu produsul dintre valoarea efectivă a tensiunii la borne U_b, valoarea efectivă a curentului I din circuit şi cosinusul unghiului de defazaj dintre U_b şi I. Deoarece $\cos\varphi$ este maxim cînd $\varphi=0$, rezultă că puterea activă este maximă într-un circuit în care curentul este în fază cu tensiunea şi este nulă cînd $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$.

Folosindu-ne de componenta activă $I_a=I\cos\varphi$ a curentului şi de relaţiile : $U_b=IZ$, $I=U_bY$, $\cos\varphi=\frac{R}{Z}=\frac{G}{Y}$, rezultă şi următoarele forme de exprimare a puterii active :

$$P=U_bI_a=RI^2=GU_b^2, \tag{5-86}$$

din care se vede că puterea activă este întotdeauna o mărime pozitivă.

Unitatea de măsură a puterii active în sistemul de unităţi MKSA se numeşte watt (simbol W).

Energia activă este integrala în raport cu timpul a puterii active :

$$W=\int P\,dt \tag{5-87}$$

şi se măsoară în watt-secunde [Ws], watt-ore [Wh] sau kilowatt-ore [kWh].

Dacă $P=$const. în intervalul de timp considerat, atunci energia activă este : $W=Pt=U_bI\cos\varphi t$.

5.8.2. PUTEREA REACTIVĂ

Pentru a defini puterea reactivă se procedează în felul următor : valoarea momentană a tensiunii $u_b=U_{bm}\sin\omega t$ aplicată la bornele circuitului se descompune în două componente :

$$u_b=u_{ba}+u_{br},$$

unde u_{ba} este componenta activă, în fază cu curentul $i=I_m\sin(\omega t-\varphi)$, iar u_{br} este în cuadratură faţă de curent (fig. 5-40). Expresiile acestor componente sînt :

$$u_{ba}=U_{bam}\sin(\omega t-\varphi)=U_{bm}\cos\varphi\sin(\omega t-\varphi),$$

$$u_{br}=U_{brm}\sin\left(\omega t-\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=U_{bm}\sin\varphi\cos(\omega t-\varphi).$$

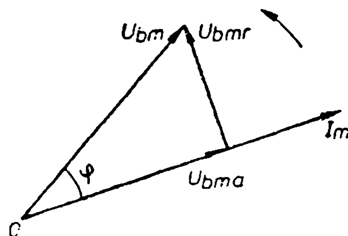


Fig. 5-40. Diagrama fazorială a componentelor activă şi reactivă ale tensiunii la borne.

Cu aceste componente, puterea electromagnetică instantanee este :

$$p=u_bi=u_{ba}i+u_{br}i=U_{bm}I_m\cos\varphi\sin^2(\omega t-\varphi)+$$
$$+U_{bm}I_m\sin\varphi\cos(\omega t-\varphi)\sin(\omega t-\varphi)=$$
$$=\frac{U_{bm}I_m}{2}\cos\varphi\,[1-\cos 2(\omega t-\varphi)]+$$
$$+\frac{U_{bm}I_m}{2}\sin\varphi\sin 2(\omega t-\varphi),\ \text{adică}\ p=p_i+p_r,$$

unde

$$p_i=\frac{U_{bm}}{\sqrt{2}}\frac{I_m}{\sqrt{2}}\cos\varphi\,[1-\cos 2\,(\omega t-\varphi)]=U_bI\cos\varphi\,[1-\cos 2\,(\omega t-\varphi)]$$

este puterea instantanee de pulsație, iar

$$p_r=\frac{U_{bm}}{\sqrt{2}}\frac{I_m}{\sqrt{2}}\sin\varphi\sin 2\,(\omega t-\varphi)=U_bI\sin\varphi\sin 2\,(\omega t-\varphi)$$

este puterea oscilantă, care oscilează între sursă și receptor.

Puterea reactivă, notată cu Q, se definește ca fiind egală cu amplitudinea puterii oscilante:

$$Q=U_bI\sin\varphi. \tag{5-88}$$

Deci, puterea reactivă este egală cu produsul dintre valorile efective ale tensiunii la borne U_b, curentului I din circuit și sinusul unghiului de defazaj dintre U_b și I. Trebuie reținut faptul că puterea reactivă nu reprezintă media vreunei componente a puterii electromagnetice instantanee.

Folosind componenta reactivă a curentului $I_r=I\sin\varphi$ și relațiile $U_b=IZ$, $I=U_bY$, $\sin\varphi=\frac{X}{Z}=\frac{B}{Y}$, rezultă și următoarele forme de exprimare a puterii reactive:

$$Q=U_bI_r=XI^2=BU_b^2. \tag{5-89}$$

Dacă receptorul are caracter inductiv $\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$, atunci $Q>0$, ceea ce înseamnă că în circuit se consumă puterea reactivă. În schimb, dacă receptorul are caracter capacitiv $\left(-\frac{\pi}{2}<\varphi<0\right)$ atunci $Q<0$, ceea ce înseamnă că în circuit se produce putere reactivă. Dacă receptorul este pur ohmic, adică $\varphi=0$, puterea reactivă este nulă.

Unitatea de măsură pentru puterea reactivă este numită volt-amper-reactiv (simbol VAr). Această denumire a fost adoptată de către Comitetul Electrotehnic Internațional la propunerea profesorului român C. Budeanu.

Corespunzător puterii reactive și într-un interval de timp se obține *energia reactivă*:

$$W_r=\int Q\,dt. \tag{5-90}$$

Dacă Q=const. în intervalul de timp considerat, atunci $W_r=Qt=U_bI\sin\varphi t$.

Unitatea de măsură pentru energia reactivă este volt-amper-reactiv-secundă [VArs] sau kilovolt-amper-reactiv-oră [kVArh].

5.8.3. PUTEREA APARENTĂ

Puterea aparentă S în regim sinusoidal este o mărime definită prin relația:

$$S=\sqrt{P^2+Q^2}=U_bI, \tag{5-91}$$

unde s-a ținut seama de relațiile (5-85) și (5-88).

Puterea aparentă se măsoară în volt-amper [VA], cu multiplii kVA și MVA.

Ținînd seama de relațiile $U_b = IZ$ și $I = U_b Y$, puterea aparentă se mai poate exprima și în felul următor:

$$S = ZI^2 = YU_b^2. \tag{5-92}$$

Relația (5-91) dintre puteri permite construirea unui triunghi dreptunghic (fig. 5-41), denumit *triunghiul puterilor*, din care rezultă:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{Q}{P},\ \cos\varphi = \frac{P}{S},\ \sin\varphi = \frac{Q}{S}. \tag{5-93}$$

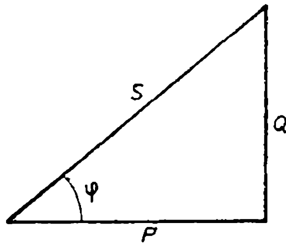


Fig. 5-41. Triunghiul puterilor.

5.8.4. REPREZENTAREA ÎN COMPLEX A PUTERILOR

Se consideră un circuit electric la bornele căruia se aplică tensiunea sinusoidală $u_b = \sqrt{2}U_b \sin(\omega t + \alpha)$ și care este parcurs de curentul $i = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \alpha - \varphi)$ defazat cu unghiul φ față de tensiune. Exprimînd în complex simplificat aceste două mărimi sinusoidale, se obțin următoarele mărimi complexe, respectiv complex conjugate:

$$\underline{U}_b = U_b e^{j\alpha};\quad \underline{U}_b^* = U_b e^{-j\alpha},$$

$$\underline{I} = Ie^{j(\alpha-\varphi)};\quad \underline{I}^* = Ie^{-j(\alpha-\varphi)}.$$

Puterea aparentă se poate exprima în complex în următoarele două moduri:

$$\underline{S} = \underline{U}_b \underline{I}^* = U_b I e^{j\varphi} = U_b I \cos\varphi + jU_b I \sin\varphi = P + jQ, \tag{5-94, a}$$

$$\underline{S} = \underline{U}_b^* \underline{I} = U_b I e^{-j\varphi} = U_b I \cos\varphi - jU_b I \sin\varphi = P - jQ. \tag{5-94, b}$$

Conform acestor relații se obține reprezentarea în planul complex a puterilor ca în fig. 5-42.

Relația (5-94, *a*) de exprimare în complex a puterii aparente se folosește în cazul circuitelor în serie, unde curentul este același, deci există o singură valoare complexă conjugată a acestuia. În schimb, relația (5-94, *b*) se folosește la circuitele în paralel, unde tensiunea la borne este aceeași.

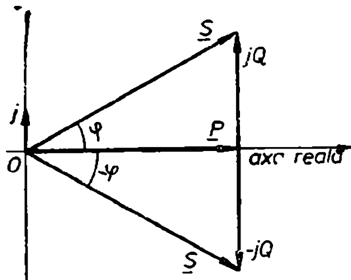


Fig. 5-42. Reprezentarea în planul complex a puterii aparente.

Pe baza celor de mai sus, puterea activă și reactivă se pot exprima prin partea reală, respectiv imaginară a puterii aparente complexe:

$$P = \mathcal{R}e\{\underline{U}_b \underline{I}^*\} = \mathcal{R}e\{\underline{U}_b^* \underline{I}\};\ Q = \mathcal{I}m\{\underline{U}_b \underline{I}^*\} = -\mathcal{I}m\{\underline{U}_b^* \underline{I}\} \tag{5-95}$$

5.9. FACTORUL DE PUTERE ȘI IMPORTANȚA SA TEHNICO-ECONOMICĂ

Se consideră un receptor monofazat alimentat de la o sursă de energie prin intermediul unei linii de transport ce are rezistența electrică R_L. Pierderile prin efect Joule-Lenz pe linie, $R_L I^2$, depind de curentul I al receptorului. Pute-

rea activă $P=U_bI\cos\varphi$ a receptorului depinde atît de curentul I cît și de defazajul φ dintre tensiune și curent (considerînd U_b=const.).

Raportul dintre puterea activă P și puterea activă maximă P_{max}, corespunzătoare acelorași pierderi prin efect Joule-Lenz pe linie, se numește *factor de putere*. Deoarece în regim sinusoidal puterea activă maximă este egală cu puterea aparentă ($P_{max}=S$), rezultă :

$$\Delta=\frac{P}{P_{max}}=\frac{P}{S}=\frac{U_bI\cos\varphi}{U_bI}=\cos\varphi, \tag{5-96}$$

adică factorul de putere este egal cu factorul de defazaj $\cos\varphi$.

Din expresia puterii active se vede că pentru P=const. și U_b=const. curentul I variază invers proporțional cu factorul de putere. Aceasta rezultă și din figura 5-43 în care este reprezentată diagrama fazorială a tensiunii și curentului pentru trei valori ale defazajului, respectiv ale factorului de putere. Se poate scrie :

$$P=U_bI\cos\varphi=U_bI'\cos\varphi'=U_bI''\cos\varphi''.$$

Valoarea minimă a curentului, respectiv a pierderilor pe linie și în generatoarele electrice, corespund la un factor de putere egal cu unitatea. Evident, pierderile sînt cu atît mai mari cu cît I este mai mare, deci cu cît $\cos\varphi$ este mai mic. În consecință, cu cît factorul de putere al receptoarelor este mai mare, cu atît generatoarele din centrale și liniile de transport pot fi încărcate cu o putere activă mai mare.

Așadar, din punct de vedere tehnico-economic, este rațional a avea la receptoare un factor de putere cît mai apropiat de unitate, pe de o parte, pentru a reduce pierderile de putere, iar pe de altă parte, pentru a folosi eficient generatoarele și liniile de transport.

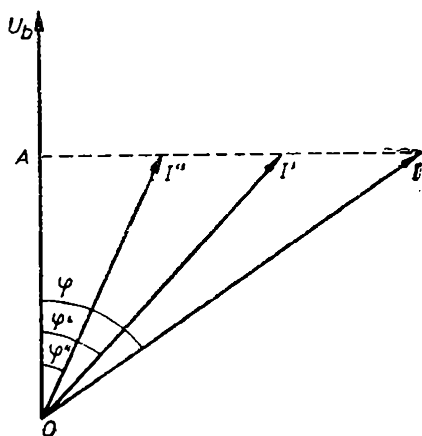


Fig. 5-43. Modificarea curentului și defazajului cînd P=const.

Întreprinderile furnizoare de energie electrică (uzinele electrice) impun întreprinderilor consumatoare să funcționeze cu un factor de putere cît mai mare, adică cît mai apropiat de unitate. Dacă factorul de putere mediu al întreprinderii are o valoare sub cea stabilită, întreprinderea este obligată să plătească o penalizare, care face ca prețul de cost al produselor realizate să crească.

Factorul de putere al întreprinderii consumatoare de energie electrică se schimbă în timp datorită faptului că se conectează și se deconectează de la rețea anumite instalații, motoare electrice etc. Din acest motiv este necesar să se determine un *factor de putere mediu* în raport cu o anumită perioadă, de obicei o lună. Valoarea medie a factorului de putere se obține astfel : cu un contor de energie electrică activă se măsoară energia activă W din intervalul de timp t, iar cu un contor de energie reactivă se măsoară, pentru același interval de timp, energia reactivă W_r, cu care se calculează :

$$(\mathrm{tg}\,\varphi)_{med}=\frac{U_b\,(I\sin\varphi)_{med}\,t}{U_b\,(I\cos\varphi)_{med}\,t}=\frac{W_r}{W},$$

cu care se obține :

$$(\cos\varphi)_{med} = \frac{1}{\sqrt{1+(\mathrm{tg}^2\varphi)_{med}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{W_r}{W}\right)^2}}. \tag{5-97}$$

Factorul de putere mediu se poate determina pentru întreaga întreprindere, pentru o secție, un atelier sau chiar pentru un singur agregat, dependent de locul unde se montează contoarele de energie activă și reactivă.

Factorul de putere al consumatorilor poate fi îmbunătățit prin măsuri tehnico-organizatorice care vizează micșorarea sau compensarea puterii reactive. Principalele măsuri care se iau în acest sens sînt următoarele :

— limitarea mersului în gol al receptoarelor de putere reactivă (motoare asincrone, transformatoare de sudură etc.) ;

— funcționarea motoarelor și transformatoarelor la o sarcină cît mai apropiată de cea nominală, eventual înlocuirea lor dacă sînt supradimensionate ;

— înlocuirea motoarelor asincrone prin motoare sincrone sau sincronizarea motoarelor asincrone de la instalațiile care permit acest lucru (pompe, ventilatoare, compresoare etc., care au o funcționare continuă) ;

— folosirea bateriilor de condensatoare statice pentru îmbunătățirea factorului de putere ;

— folosirea unor compensatoare sincrone (motoare sincrone ce funcționează în gol, supraexcitate).

În cele ce urmează ne referim la îmbunătățirea factorului de putere cu ajutorul condensatoarelor.

Se consideră un receptor avînd parametrii R, L, C în serie și puterea activă $P=U_bI\cos\varphi$. Impedanța circuitului și factorul de putere sînt :

$$Z=\sqrt{R^2+X^2}\,; \quad \cos\varphi=\frac{R}{Z}.$$

Considerîndu-se $X>0$, deci $\omega L > \frac{1}{\omega C}$, curentul I este defazat cu unghiul φ în urma tensiunii U_b (fig. 5-44, *b*).

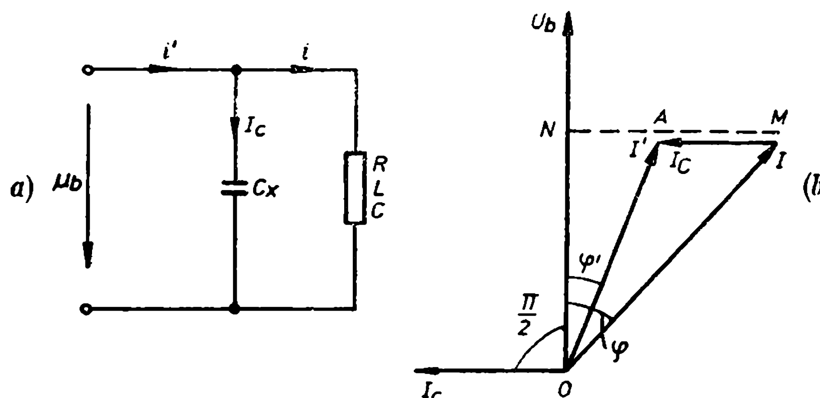


Fig. 5-44. Schema de legare a condensatorului (*a*) și diagrama curenților (*b*).

Problema care se pune este de a îmbunătăţi factorul de putere de la cos φ la cos φ', deci de a micşora unghiul de defazaj dintre U_b şi I de la φ la φ'. Pentru aceasta, în paralel cu receptorul se leagă un condensator de capacitate C_x, care va absorbi curentul $I_C=U_b\omega C_x$ defazat cu $\frac{\pi}{2}$ înaintea lui U_b. Pe linie se obţine un curent total $I'=\widehat{I+I_c}$ (sumă geometrică). De remarcat că puterea activă nu se modifică prin legarea în paralel a condensatorului.

Valoarea capacităţii C_x se determină în funcţie de puterea P şi tensiunea U_b.

Din fig. 5-44, *b*, ţinînd seama de scările folosite, se poate scrie :

$$I_C=MA=MN-AN=ON\ \text{tg}\ \varphi-ON\ \text{tg}\ \varphi'=ON\ (\text{tg}\ \varphi-\text{tg}\ \varphi')=$$

$$=I\cos\varphi\ (\text{tg}\ \varphi-\text{tg}\ \varphi')$$

sau

$$I_C=\frac{P}{U_b}(\text{tg}\ \varphi-\text{tg}\ \varphi')=U_b\omega C_x,$$

de unde rezultă capacitatea C_x :

$$C_x=\frac{P}{\omega U_b^2}(\text{tg}\ \varphi-\text{tg}\ \varphi'). \qquad (5\text{-}98)$$

Se remarcă faptul că cu cît U_b este de valoare mai mare, cu atît rezultă o capacitate C_x de valoare mai mică.

Condensatoarele industriale folosite pentru îmbunătăţirea factorului de putere au ca date nominale : capacitatea C, în F, tensiunea de lucru U, în volt, puterea reactivă $Q=U^2\omega C$, în kVA, tensiunea de încercare, în kV.

Aplicaţia 5-5. La bornele unui circuit format din impedanţele $\underline{Z}_1=(8+j5)\ \Omega$, $\underline{Z}_2=(12-j6)\ \Omega$, $\underline{Z}_3=(4+j9)\ \Omega$ legate în serie se aplică tensiunea $U_b=120$ V. Să se determine curentul din circuit, factorul de putere şi puterile activă, reactivă şi aparentă.

Rezolvare. Impedanţa echivalentă a circuitului este :

$$\underline{Z}=\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3=(24+j8)\ \Omega.$$

Considerînd tensiunea $\underline{U}_b=U_b$ ca origine a fazelor (situată pe axa reală), rezultă curentul exprimat în complex simplificat :

$$\underline{I}=\frac{U_b}{\underline{Z}}=\frac{120}{24+j8}=(4{,}5-j\,1{,}5)\ \text{A},\quad I=4{,}8\ \text{A}.$$

Factorul de putere este :

$$\cos\varphi=\frac{R}{Z}=\frac{24}{\sqrt{24^2+8^2}}=0{,}923.$$

Puterile activă, reactivă şi aparentă sînt :

$$P=U_bI\cos\varphi=120\cdot4{,}8\cdot0{,}923=481{,}65\ \text{W},$$

$$Q=U_bI\sin\varphi=120\cdot4{,}8\cdot0{,}304=175{,}1\ \text{VA},$$

$$S=U_bI=120\cdot4{,}8=576\ \text{VA}.$$

Se poate verifica următoarea relaţie între puteri :

$$S^2=P^2+Q^2.$$

Capitolul 6

REȚELE ELECTRICE TRIFAZATE ÎN REGIM PERMANENT SINUSOIDAL

6.1. NOȚIUNI GENERALE

6.1.1. REȚEA TRIFAZATĂ SISTEM TRIFAZAT DE TENSIUNI ȘI DE CURENȚI

Ansamblul constituit din m circuite electrice monofazate în care acționează m tensiuni electromotoare de aceeași frecvență, dar cu faze inițiale diferite se numește *rețea* electrică *polifazată*. Sistemele electroenergetice sînt constituite aproape în exclusivitate din rețele electrice *trifazate* ($m=3$).

Tensiunile, respectiv curenții, din rețeaua trifazată constituie sistemul trifazat de tensiuni, respectiv sistemul trifazat de curenți. Dacă valorile efective (sau amplitudinile) tensiunilor trifazate sînt egale și dacă defazajele dintre oricare două tensiuni succesive sînt egale cu $\frac{2\pi}{3}$ (120°), atunci sistemul trifazat de tensiuni este *simetric*. Dacă una sau ambele din aceste condiții nu sînt îndeplinite, sistemul de tensiuni este *nesimetric*. Aceste definiții sînt valabile și pentru curenții trifazați.

Schița unui generator sincron trifazat cu o pereche de poli ($p=1$), folosit în centralele electrice pentru producerea de t.e.m. trifazate este reprezentată în fig. 6-1. Bobinele *1*, *2* și *3* a celor trei faze sînt decalate în spațiu una față de alta cu 120°, ceea ce face ca t.e.m. induse în aceste bobine de către cîmpul magnetic al rotorului (inductorului), ce se rotește cu turația constantă n, să fie defazate în timp cu același unghi.

Valorile momentane (instantanee) ale tensiunilor trifazate simetrice se exprimă prin relațiile :

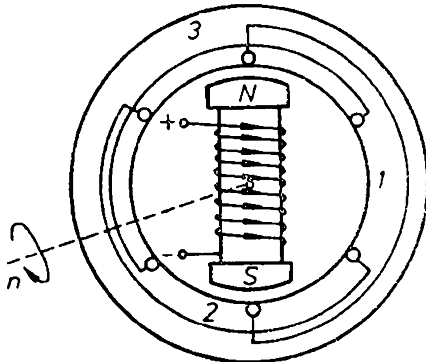


Fig. 6-1. Schița generatorului sincron trifazat cu o pereche de poli de excitație.

$$u_1=U_{1m}\sin\omega t,\quad u_2=U_{2m}\sin\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}\right),$$

$$u_3=U_{3m}\sin\left(\omega t-2\frac{2\pi}{3}\right)$$

unde $U_{1m}=U_{2m}=U_{3m}$ (sau ca valori efective $U_1=U_2=U_3$). Reprezentarea liniară a acestor tensiuni este arătată în fig. 6-2, *a* iar diagrama fazorială în fig. 6-2, *b*.

Utilizînd scrierea în complex simplificat și considerînd tensiunea $\underline{U}_1$ situată pe axa reală

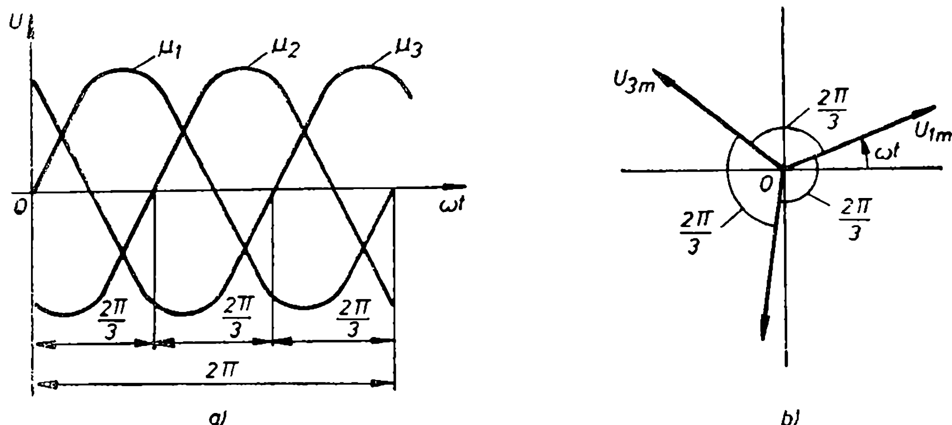


Fig. 6-2. Diagramele liniară (a) și fazorială (b) ale sistemului de tensiuni trifazate simetrice.

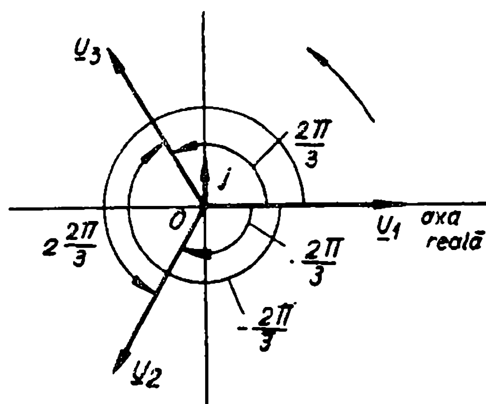


Fig. 6-3. Diagrama în planul complex a sistemului de tensiuni trifazate simetrice.

(fig. 6-3), cele trei tensiuni trifazate simetrice se exprimă prin relațiile :

$$\underline{U}_1=U_1e^{j0}=U_1,\quad \underline{U}_2=U_2e^{-j\frac{2\pi}{3}}=U_2e^{j2\frac{2\pi}{3}},\quad \underline{U}_3=U_3e^{j\frac{2\pi}{3}}=U_3e^{-j2\frac{2\pi}{3}}, \tag{6-2}$$

de unde, avînd în vedere că $U_1=U_2=U_3$, rezultă :

$$\underline{U}_1+\underline{U}_2+\underline{U}_3=0. \tag{6-3}$$

Un sistem trifazat de tensiuni (curenți) simetric poate fi cu *succesiune directă* (fig. 6-4, *a*) sau cu *succesiune inversă* (fig. 6-4, *b*). La sistemul cu succesiune directă, pentru ca tensiunea $\underline{U}_{2d}$ să se suprapună peste $\underline{U}_{1d}$ trebuie rotită cu $\frac{2\pi}{3}$ radiani în sens trigonometric direct și, la fel, pentru ca $\underline{U}_{3d}$ să se suprapună peste $\underline{U}_{2d}$. În schimb, la sistemul de succesiune inversă, pentru ca tensiunea $\underline{U}_{2i}$ să se suprapună peste $\underline{U}_{1i}$, respectiv $\underline{U}_{3i}$ să se suprapună peste $\underline{U}_{2i}$, trebuie efectuată rotirea în sens invers sensul trigonometric cu $\frac{2\pi}{3}$ radiani.

O posibilitate intuitivă de a aprecia succesiunea directă și cea inversă este următoarea : fie un observator care se situează în punctul *P* (fig. 6-4) și urmă-

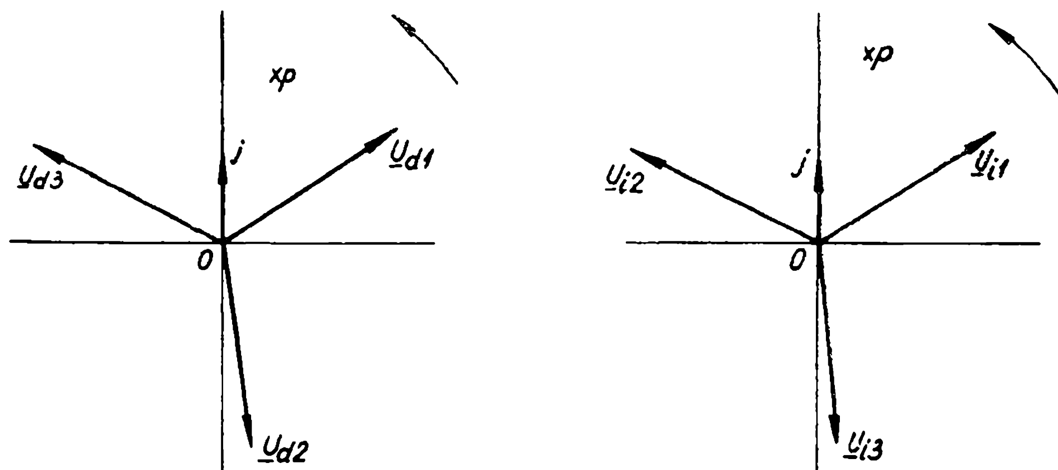


Fig. 6-4. Tensiuni trifazate cu succesiune directă (*a*) şi cu succesiune inversă (*b*).

reşte ordinea în care trec prin faţa sa tensiunile $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$, $\underline{U}_3$ ce se rotesc în sensul trigonometric. Dacă această ordine este 1, 2, 3, 1, 2, ..., sistemul este cu succesiune directă, iar dacă ordinea este 1, 3, 2, 1, 3, ..., sistemul este cu succesiune inversă.

Folosind mărimea complexă de modul egal cu unitatea şi argument egal cu $\frac{2\pi}{3}$:

$$\underline{a}=e^{j\frac{2\pi}{3}}=-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad (6\text{-}4)$$

rezultă următoarele relaţii pentru tensiunile de succesiune directă, respectiv de succesiune inversă simetrice:

$$\underline{U}_{2d}=\underline{a}^2\underline{U}_{1d}, \qquad \underline{U}_{3d}=\underline{a}\underline{U}_{1d}; \qquad (6\text{-}5)$$

$$\underline{U}_{2i}=\underline{a}\underline{U}_{1i}, \qquad \underline{U}_{3i}=\underline{a}^2\underline{U}_{1i}. \qquad (6\text{-}6)$$

Un receptor sau, în general, un consumator trifazat este *echilibrat* atunci cînd impedanţele pe cele trei faze sînt egale. În caz contrar, receptorul (consumatorul) trifazat este *neechilibrat*. Precizăm că prin noţiunea de consumator se înţelege un grup de receptoare de energie electrică.

6.1.2. CONEXIUNEA FAZELOR

Conexiunile de bază ale fazelor generatoarelor şi receptoarelor trifazate sînt: conexiunea în stea şi conexiunea în triunghi. Pentru a explica mai uşor aceste conexiuni, se consideră în fig. 6-5 un generator trifazat ce alimentează un receptor trifazat prin intermediul unei linii de transport de energie electrică. Cele trei faze ale generatorului, respectiv ale receptorului, sînt considerate ca trei circuite monofazate independente. Începuturile fazelor generatorului se notează cu *A*, *B* şi *C*, iar sfîrşiturile cu *x*, *y* şi *z*, fixarea acestor începuturi şi sfîrşituri făcîndu-se

în funcție de sensul în care acționează tensiunile electromotoare induse $\underline{U}_{g1}$, $\underline{U}_{g2}$ și $\underline{U}_{g3}$. La receptor se notează cu *1*, *2* și *3* bornele de intrare (început) și cu *1'*, *2'* și *3'* bornele de ieșire (sfîrșit) ale impedanțelor $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ și $\underline{Z}_3$ de pe cele trei faze.

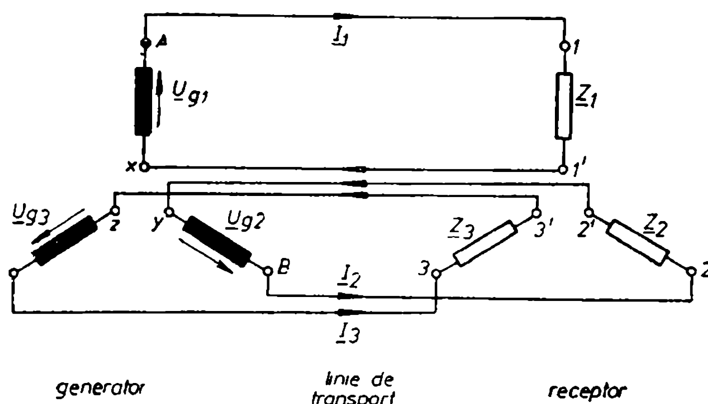


Fig. 6-5. Reprezentarea prin circuite monofazate a rețelei electrice trifazate.

Conexiunea fazelor ca în fig. 6-5 este neeconomică, deoarece linia de transport constă din $3 \times 2 = 6$ conductoare.

Conexiunea în stea a celor trei faze ale generatorului (sau receptorului) se realizează legînd împreună sfîrșiturile *x*, *y*, *z* (*1'*, *2'*, *3'*), așa cum este arătat în fig. 6-6, unde se prezintă și schemele uzuale pentru această conexiune.

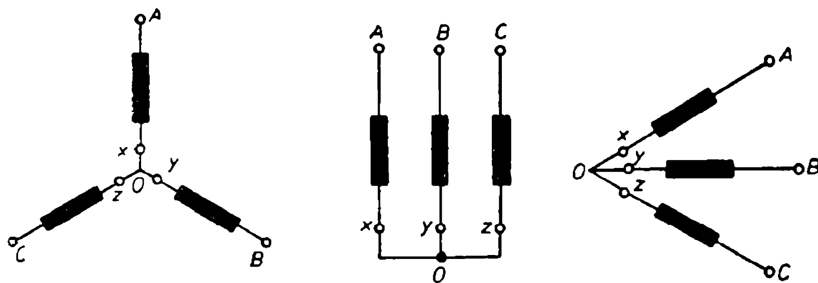


Fig. 6-6. Conexiunea în stea.

Punctul în care se unesc cele trei faze se numește *punct de nul* (*0,0'*). Simbolic, conexiunea în stea se notează cu Y (sau Y).

Conexiunea în triunghi a celor trei faze ale generatorului (sau ale receptorului) se realizează legînd împreună sfîrșitul primei faze cu începutul fazei a doua, sfîrșitul fazei a doua cu începutul fazei a treia și sfîrșitul fazei a treia cu începutul fazei întîi, așa cum se arată în fig. 6-7, unde se reprezintă și schemele uzuale ale acestei conexiuni. Simbolic, conexiunea în triunghi se notează cu Δ. Se remarcă faptul că la conexiunea în triunghi nu există punct nul.

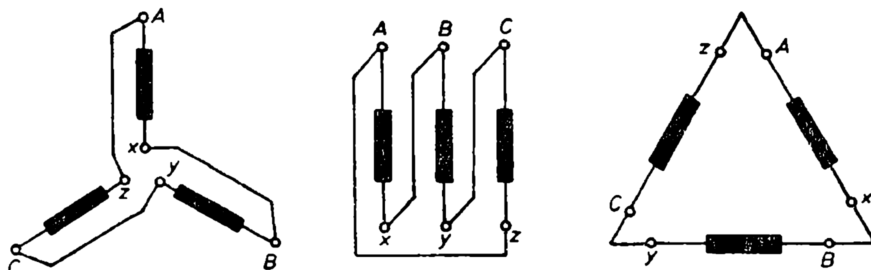


Fig. 6-7. Conexiunea în triunghi.

Folosind conexiunea în stea sau în triunghi a fazelor, în locul schemei din fig. 6-5 se obțin schemele din fig. 6-8, pentru care numărul conductorilor liniei de transport este de 4 sau 3.

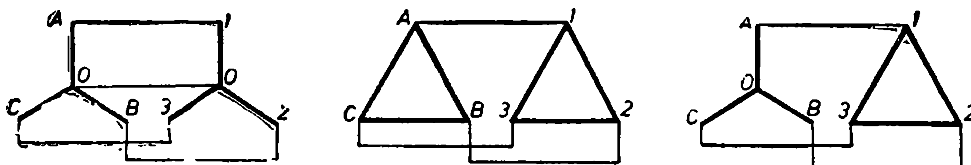


Fig. 6-8. Scheme de conectare ale fazelor pentru sursă și pentru receptor.

6.2. TENSIUNILE ŞI CURENŢII LA CONEXIUNILE ÎN STEA ŞI ÎN TRIUNGHI A FAZELOR

Atît la conexiunea în stea, cît și la conexiunea în triunghi a fazelor sursei sau receptorului intervin următoarele tensiuni și curenți:

Tensiunea de fază, este egală cu diferența de potențial între începutul și sfîrșitul fazei respective.

Tensiunea de linie (înlănțuită) este egală cu diferența de potențial între începuturile a două faze. Această tensiune apare între conductoarele (fazele) liniei de transport de energie.

Curentul de fază este curentul care circulă prin înfășurarea unei faze a sursei sau prin impedanța care formează o fază a receptorului.

Curentul de linie este curentul care circulă prin conductoarele liniei de transport între sursă și consumator (receptor).

Curentul din conductorul de nul intervine numai în cazul conexiunilor în stea.

Aceste tensiuni și curenți sînt diferite la conexiunea în stea față de conexiunea în triunghi, după cum se va vedea în continuare.

6.2.1. TENSIUNILE ŞI CURENŢII LA CONEXIUNEA ÎN STEA

Se consideră un receptor trifazat cu impedanțele $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ și $\underline{Z}_3$ conectate în stea, alimentat de la o sursă cu conexiune a fazelor de asemenea în stea (fig. 6-9). Linia de transport de energie este prevăzută cu 4 conductoare, trei conductoare

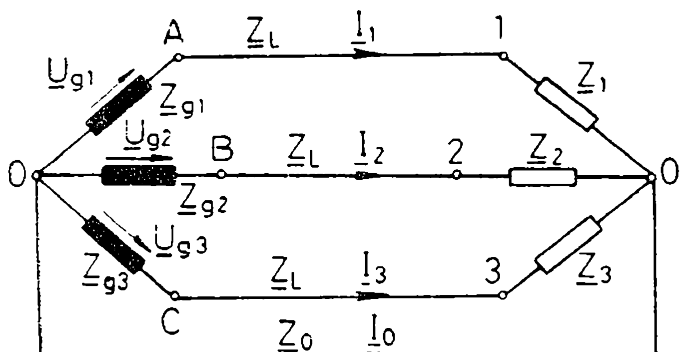


Fig. 6-9. Rețea trifazată cu conexiune în stea.

pentru cele trei faze și al patrulea, *conductorul de nul* care unește între ele punctele de nul O și O' de la sursă și de la receptor. Se analizează mai întîi situația tensiunilor și curenților la receptor.

Tensiunile de fază la receptor sînt:

$$\underline{U}_1=\underline{V}_1-\underline{V}_{o'}\,;\quad \underline{U}_2=\underline{V}_2-\underline{V}_{o'}\,;\quad \underline{U}_3=\underline{V}_3-\underline{V}_{o'}. \qquad (6\text{-}7)$$

Reprezentînd în planul complex aceste trei tensiuni de fază, ele formează o stea simetrică sau nesimetrică, după cum tensiunile sînt simetrice sau nesimetrice.

Curenții de fază, care circulă prin impedanțele $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ și $\underline{Z}_3$ ale receptorului, sînt:

$$\underline{I}_1=\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1}\,;\quad \underline{I}_2=\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2}\,;\quad \underline{I}_3=\frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3}\,. \qquad (6\text{-}8)$$

În figura 6-10 sînt reprezentate tensiunile de fază și curenții de fază în caz de nesimetrie.

Curentul din conductorul de nul rezultă prin aplicarea teoremei I a lui Kirchhoff în nodul O' al schemei din fig. 6-9, obținîndu-se:

$$\underline{I}_0=-(\underline{I}_1+\underline{I}_2+\underline{I}_3)=-\left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1}+\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2}+\frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3}\right). \qquad (6\text{-}9)$$

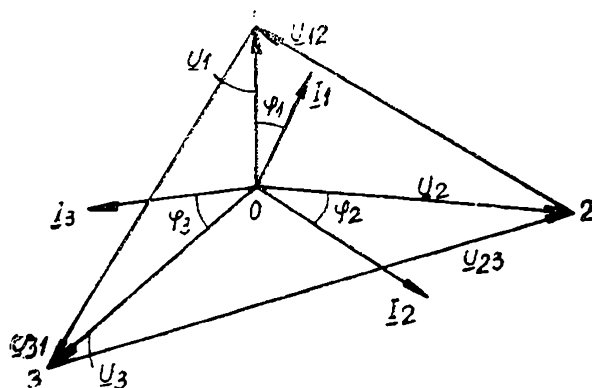


Fig. 6-10. Diagrama tensiunilor și curenților la conexiunea în stea, în caz de nesimetrie.

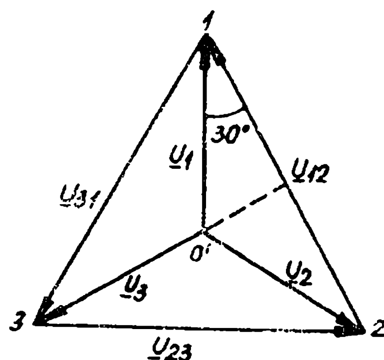


Fig. 6-11. Diagrama tensiunilor la conexiunea în stea, în caz de simetrie.

Dacă tensiunile de fază sînt simetrice, adică $\underline{U}_1+\underline{U}_2+\underline{U}_3=0$ și receptorul este echilibrat, adică $\underline{Z}_1=\underline{Z}_2=\underline{Z}_3$, rezultă : $I_1=I_2=I_3$, $\underline{I}_1+\underline{I}_2+\underline{I}_3=0$ și $I_0=0$.

Tensiunile de linie (înlănțuite) la receptor sînt :

$$\begin{aligned} \underline{U}_{12}&=\underline{V}_1-\underline{V}_2=(\underline{V}_1-\underline{V}_{0'})-(\underline{V}_2-\underline{V}_{0'})=\underline{U}_1-\underline{U}_2\\ \underline{U}_{23}&=\underline{V}_2-\underline{V}_3=(\underline{V}_2-\underline{V}_{0'})-(\underline{V}_3-\underline{V}_{0'})=\underline{U}_2-\underline{U}_3\\ \underline{U}_{31}&=\underline{V}_3-\underline{V}_1=(\underline{V}_3-\underline{V}_{0'})-(\underline{V}_1-\underline{V}_{0'})=\underline{U}_3-\underline{U}_1 \end{aligned} \tag{6-10}$$

de unde se vede că, întotdeauna, suma tensiunilor de linie, ca mărimi complexe, este nulă :

$$\underline{U}_{12}+\underline{U}_{23}+\underline{U}_{31}=0. \tag{6-11}$$

Relația (6-11) ilustrează că cele trei tensiuni de linie $\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$ și $\underline{U}_{31}$ formează în planul complex un triunghi închis. Acest triunghi este oarecare dacă tensiunile sînt nesimetrice (fig. 6-10) și este echilateral dacă tensiunile sînt simetrice (fig. 6-11). În ambele cazuri, conform relațiilor (6-10), steaua tensiunilor de fază are extremitățile în vîrfurile triunghiului tensiunilor de linie, iar centrul undeva în planul triunghiului.

În cazul tensiunilor de linie și de fază simetrice, reprezentate în fig. 6-11, punctul O' este situat în centrul triunghiului echilateral și se obține următoarea legătură între valoarea tensiunii de linie și valoarea tensiunii de fază : $\frac{U_{12}}{2}=U_1\cos 30°$, adică $U_{12}=\sqrt{3}U_1$, sau

$$U_l=\sqrt{3}U_f, \tag{6-12}$$

unde s-a notat cu U_l tensiunea de linie și cu U_f tensiunea de fază.

Deci, în caz de simetrie, la conexiunea în stea tensiunea de linie este de $\sqrt{3}$ ori mai mare decît tensiunea de fază. Valorile acestor tensiuni la rețele electrice de distribuție de joasă tensiune sînt : $U_f=220$ V, $U_l=380$ V.

Curentul de linie la conexiunea în stea este egal cu cel de fază (v. fig. 6-9).

În concluzie, la conexiunea în stea, tensiunile de fază și tensiunile de linie nu sînt egale ca valoare și nu sînt în fază. În schimb, curenții de fază și curenții de linie sînt aceeași.

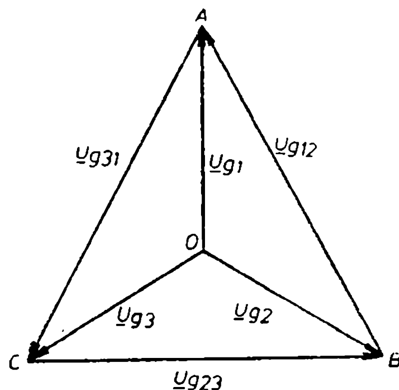


Fig. 6-12. Diagrama tensiunilor induse la un generator trifazat.

În ce privește t.e.m. induse pe fază de generator $\underline{U}_{g1}$, $\underline{U}_{g2}$ și $\underline{U}_{g3}$, acestea, prin construcția generatorului, sînt simetrice și formează steaua din fig. 6-12. T.e.m. de linie definite prin relațiile :

$$\underline{U}_{g12}=\underline{U}_{g1}-\underline{U}_{g2}\ ;\quad \underline{U}_{g23}=\underline{U}_{g2}-\underline{U}_{g3}\ ;\quad \underline{U}_{g31}=\underline{U}_{g3}-\underline{U}_{g1} \tag{6-13}$$

sînt de asemenea simetrice și formează un triunghi echilateral (fig. 6-12), indiferent dacă consumatorul este echilibrat sau neechilibrat.

Avînd în vedere această simetrie a t.e.m. induse, se pune problema dacă tensiunile de linie $\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$, $\underline{U}_{31}$ de la receptor sînt sau nu simetrice. Pentru a răspunde la această problemă

este necesar să se stabilească legătura dintre tensiunile la receptor şi t.e.m. induse la generator. Pe baza schemei din fig. 6-9 rezultă :

$$\underline{U}_{12}=\underline{V}_1-\underline{V}_2=(\underline{V}_1-\underline{V}_0)-(\underline{V}_2-\underline{V}_0)=[\underline{U}_{g1}-\underline{I}_1(\underline{Z}_{g1}+\underline{Z}_L)]-[\underline{U}_{g2}-\underline{I}_2(\underline{Z}_{g2}+\underline{Z}_L)]$$
$$\underline{U}_{23}=\underline{V}_2-\underline{V}_3=(\underline{V}_2-\underline{V}_0)-(\underline{V}_3-\underline{V}_0)=[\underline{U}_{g2}-\underline{I}_2(\underline{Z}_{g2}+\underline{Z}_L)]-[\underline{U}_{g3}-\underline{I}_3(\underline{Z}_{g3}+\underline{Z}_L)] \qquad (6\text{-}14)$$
$$\underline{U}_{31}=\underline{V}_3-\underline{V}_1=(\underline{V}_3-\underline{V}_0)-(\underline{V}_1-\underline{V}_0)=[\underline{U}_{g3}-\underline{I}_3(\underline{Z}_{g3}+\underline{Z}_L)]-[\underline{U}_{g1}-\underline{I}_1-(\underline{Z}_{g1}+\underline{Z}_L)]$$

unde $\underline{Z}_{g1}$, $\underline{Z}_{g2}$, $\underline{Z}_{g3}$ sînt impedanţele pe fază la generator, iar $\underline{Z}_L$ este impedanţa conductoarelor liniei de transport, aceeaşi pentru toate cele trei faze.

Produsele $\underline{I}_1(\underline{Z}_{g1}+\underline{Z}_L)$, $\underline{I}_2(\underline{Z}_{g2}+\underline{Z}_L)$, $\underline{I}_3(\underline{Z}_{g3}+\underline{Z}_L)$ reprezintă căderile de, tensiune pe cele trei faze ale generatorului şi ale liniei de transport. Întrucît în general, aceste căderi de tensiune sînt mici, ele pot fi neglijate şi rezultă :

$$\underline{U}_{12}\cong\underline{U}_{g1}-\underline{U}_{g2}=\underline{U}_{g12}$$
$$\underline{U}_{23}\cong\underline{U}_{g2}-\underline{U}_{g3}=\underline{U}_{g23} \qquad (6\text{-}15)$$
$$\underline{U}_{31}\cong\underline{U}_{g3}-\underline{U}_{g1}=\underline{U}_{g31}$$

Prin urmare, făcînd neglijarea de mai sus, indiferent dacă receptorul trifazat este echilibrat sau neechilibrat, tensiunile de linie la receptor sînt simetrice şi formează împreună un triunghi echilateral. Simetria tensiunilor la receptor se păstrează şi atunci cînd căderile de tensiune nu sînt neglijabile, dar receptorul este echilibrat.

Dacă receptorul este neechilibrat şi căderile de tensiune pe cele trei faze nu sînt neglijabile, tensiunile de linie la receptor nu sînt simetrice şi formează împreună un triunghi oarecare.

În practică, se poate accepta că tensiunile de linie la receptor sînt simetrice.

6.2.2. TENSIUNILE ŞI CURENŢII LA CONEXIUNEA ÎN TRIUNGHI

Se consideră un receptor trifazat cu impedanţele $\underline{Z}_{12}$, $\underline{Z}_{23}$, $\underline{Z}_{31}$ conectate în triunghi şi alimentat de la o reţea de curent alternativ (fig. 6-13). La această conexiune punctul de nul, respectiv conductorul de nul lipsesc.

Tensiunile de fază sînt egale cu tensiunile de linie. În schimb, curenţii de linie $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$ şi curenţii de fază $\underline{I}_{12}$, $\underline{I}_{23}$, $\underline{I}_{31}$ sînt diferiţi. Curenţii de fază se calculează cu relaţiile :

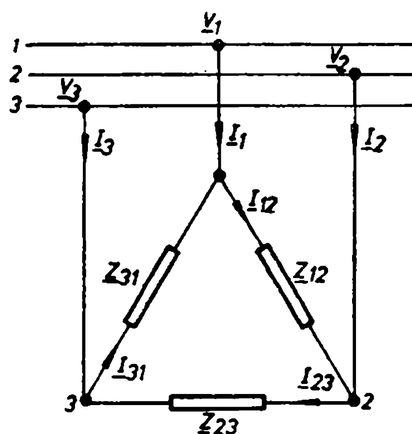


Fig. 6-13. Receptor trifazat cu conexiunea în triunghi.

$$\underline{I}_{12}=\frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}};\quad \underline{I}_{23}=\frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}};\quad \underline{I}_{31}=\frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}}. \qquad (6\text{-}16)$$

Între curenţii de linie şi cei de fază există următoarele relaţii obţinute prin aplicarea teoremei I a lui Kirchhoff :

$$\underline{I}_1=\underline{I}_{12}-\underline{I}_{31};\ \underline{I}_2=\underline{I}_{23}-\underline{I}_{12};\ \underline{I}_3=\underline{I}_{31}-\underline{I}_{23}. \qquad (6\text{-}17)$$

Din relațiile (6-17) rezultă că, la conexiunea în triunghi, întotdeauna suma curenților de linie este egală cu zero, adică:

$$\underline{I}_1+\underline{I}_2+\underline{I}_3=0. \qquad (6\text{-}18)$$

Deci, acești curenți formează împreună un triunghi.

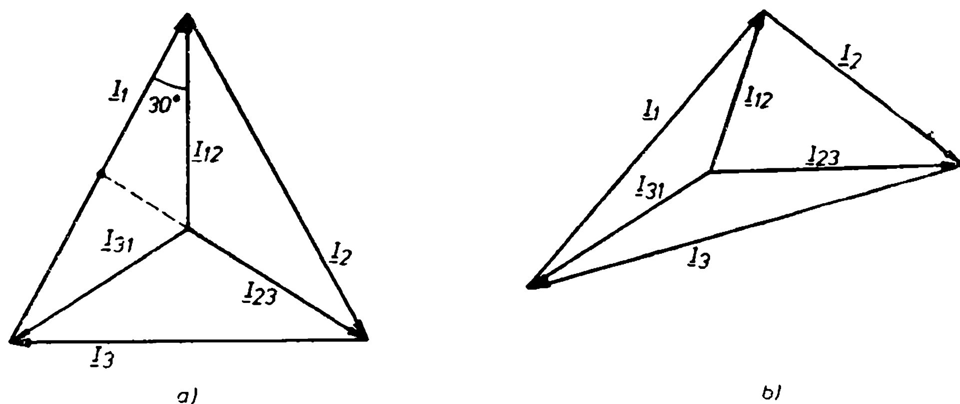


Fig. 6-14. Diagrama curenților la conexiunea în triunghi, în caz de simetrie (*a*) și în caz de nesimetrie (*b*).

Dacă tensiunile de linie sînt simetrice și receptorul este echilibrat ($\underline{Z}_{12}=$ $=\underline{Z}_{23}=\underline{Z}_{31}$), triunghiul curenților de linie este echilateral, iar curenții de fază formează o stea simetrică ce se situează pe medianele triunghiului echilateral (fig. 6-14). În această situație, se obține următoarea legătură între valoarea curentului de linie și valoarea curentului de fază:

$$\frac{I_1}{2}=I_{12}\cos 30°, \text{ adică } I_1=\sqrt{3}I_{12}, \text{ sau } I_l=\sqrt{3}I_f \qquad (6\text{-}19)$$

unde I_l este curentul de linie și I_f este curentul de fază.

Prin urmare, la conexiunea în triunghi a fazelor unui receptor echilibrat, alimentat cu tensiuni simetrice, curentul de linie este de $\sqrt{3}$ mai mare decît curentul de fază.

În caz de nesimetrie, sau dezechilibru, curenții la conexiunea în triunghi sînt nesimetrici (fig. 6-14, *b*).

6.3. PUTEREA LA REȚELELE TRIFAZATE

6.3.1. PUTEREA LA REȚELELE CU CONEXIUNE ÎN STEA

Se consideră receptorul trifazat cu conexiune în stea din fig. 6-15. Valoarea instantanee a puterii electromagnetice pentru cele trei faze este:

$$p=(v_1-v_{0'})\,i_1+(v_2-v_{0'})\,i_2+(v_3-v_{0'})\,i_3=u_1i_1+u_2i_2+u_3i_3,$$

în care valorile instantanee ale celor trei tensiuni de fază şi ale celor trei curenţi se exprimă, în general, prin relaţiile :

$$u_1 = \sqrt{2}U_1 \sin(\omega t + \alpha_1);$$

$$u_2 = \sqrt{2}U_2 \sin(\omega t + \alpha_2);$$

$$u_3 = \sqrt{2}U_3 \sin(\omega t + \alpha_3);$$

$$i_1 = \sqrt{2}I_1 \sin(\omega t + \alpha_1 - \varphi_1),$$

$$i_2 = \sqrt{2}I_2 \sin(\omega t + \alpha_2 - \varphi_2),$$

$$i_3 = \sqrt{2}I_3 \sin(\omega t + \alpha_3 - \varphi_3).$$

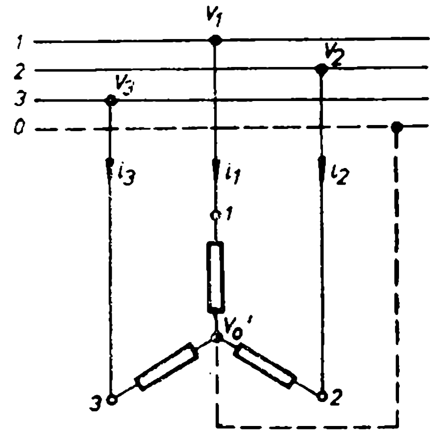


Fig. 6-15. Receptor trifazat cu conexiune în stea.

În cazul tensiunilor de fază simetrice, avem :

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_2 - \alpha_3 = \alpha_3 - \alpha_1 = \frac{2\pi}{3} \text{ şi } U_1 = U_2 = U_3.$$

Puterea activă, după cum s-a arătat la circuitele monofazate, este valoarea medie în raport cu o perioadă a puterii electromagnetice instantanee, adică se obţine :

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt = U_1 I_1 \cos\varphi_1 + U_2 I_2 \cos\varphi_2 + U_3 I_3 \cos\varphi_3, \qquad (6\text{-}20)$$

unde U_1, U_2, U_3 şi I_1, I_2, I_3 sînt valorile efective ale tensiunilor de fază, respectiv ale curenţilor de fază (aceeaşi cu cei de linie) iar φ_1, φ_2 şi φ_3 sînt defazajele dintre tensiunile de fază şi curenţii de fază. Se remarcă faptul că puterea activă este egală cu suma puterilor active pe cele trei faze.

Dacă reţeaua trifazată este simetrică şi echilibrată, adică $U_1 = U_2 = U_3 = U_f$, $I_1 = I_2 = I_3 = I_f$ şi $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi$, relaţia (6-20) devine :

$$P = 3U_f I_f \cos\varphi. \qquad (6\text{-}21)$$

Avînd în vedere că în practică nu se măsoară tensiunea de fază, ci tensiunea de linie $U_l = \sqrt{3}U_f$ şi că la conexiunea în stea curentul de fază este egal cu cel de linie $I_f = I_l$, rezultă :

$$P = \sqrt{3}U_l I_l \cos\varphi \text{ sau } P = \sqrt{3}UI\cos\varphi. \qquad (6\text{-}22)$$

La scrierea fără indici înseamnă că U este tensiunea de linie, I este curentul de linie şi φ este defazajul între curentul de fază şi tensiunea de fază.

Puterea reactivă este :

$$Q = U_1 I_1 \sin\varphi_1 + U_2 I_2 \sin\varphi_2 + U_3 I_3 \sin\varphi_3. \qquad (6\text{-}23)$$

În caz de simetrie şi echilibru, rezultă :

$$Q = 3U_f I_f \sin\varphi, \qquad (6\text{-}24)$$

de unde, înlocuind mărimile de fază cu cele de linie, se obţine :

$$Q = \sqrt{3}U_l I_l \sin\varphi \text{ sau } Q = \sqrt{3}UI\sin\varphi. \qquad (6\text{-}25)$$

Puterea aparentă este :

$$S=\sqrt{P^2+Q^2}. \tag{6-26}$$

Pentru circuite simetrice **şi** echilibrate rezultă :

$$S=\sqrt{3}\,U_l I_l \text{ sau } S=\sqrt{3}\,UI. \tag{6-27}$$

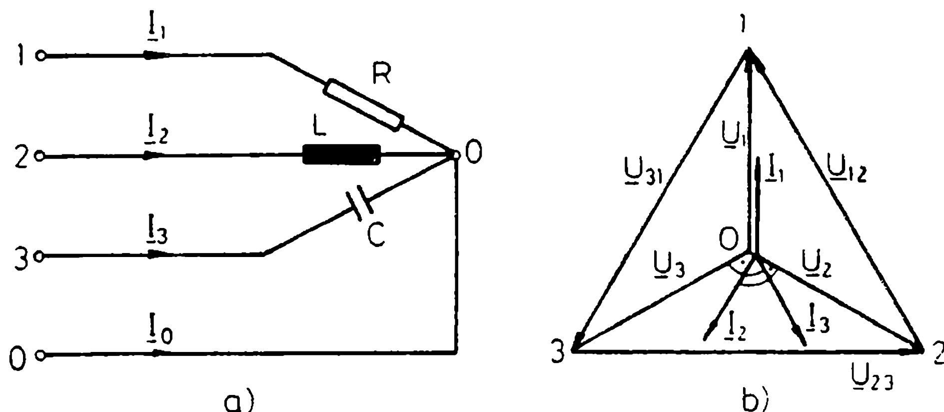


Fig. 6-16. Receptor trifazat cu conexiune în stea (*a*) şi diagrama tensiunilor şi curenţilor (*b*).

Aplicaţia 6-1. Receptorul trifazat cu conexiune în stea a fazelor, avînd schema din fig. 6-16, *a*, este alimentat cu tensiuni de linie şi de fază simetrice. Să se determine curenţii din circuit şi puterile pentru următoarele valori ale tensiunilor şi parametrilor :

$$U_l=380 \text{ V}, \quad U_f=220 \text{ V}, \quad f=50 \text{ Hz}, \quad R=\omega L=\frac{1}{\omega C}=22\ \Omega.$$

Rezolvare. **Se construieşte în fig. 6-16, *b* diagrama în planul complex a tensiunilor şi curenţilor. Valorile curenţilor din circuit sînt :**

$$I_1=\frac{U_1}{Z_1}=\frac{U_1}{R}=\frac{220}{22}=10 \text{ A}, \quad I_2=\frac{U_2}{Z_2}=\frac{U_2}{\omega L}=\frac{220}{22}=10 \text{ A},$$

$$I_3=\frac{U_3}{Z_3}=\frac{U_3}{\dfrac{1}{\omega C}}=\frac{220}{22}=10 \text{ A}.$$

Dacă se consideră $\underline{U}_{23}=U_{23}$, se obţin următoarele exprimări în complex simplificat a curenţilor :

$$\underline{I}_1=I_1 e^{j\frac{\pi}{2}}=j\,10 \text{ A},$$

$$\underline{I}_2=I_2 e^{-j\frac{2\pi}{3}}=10\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=5\,(-1-j\sqrt{3}) \text{ A},$$

$$\underline{I}_3=I_3 e^{-j\frac{\pi}{3}}=10\left(\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=5\,(1-j\sqrt{3}) \text{ A},$$

$$\underline{I}_0=-(\underline{I}_1+\underline{I}_2+\underline{I}_3)=j\,10\,(1-\sqrt{3}), \quad I_0=7{,}3 \text{ A}.$$

Defazajele dintre tensiunile de fază și curenții de fază sînt : $\varphi_1=0$, $\varphi_2=\frac{\pi}{2}$, $\varphi_3=-\frac{\pi}{2}$.

Puterile din circuit au valorile :

$$P=U_1I_1\cos\varphi_1+U_2I_2\cos\varphi_2+U_3I_3\cos\varphi_3=2\,200\ \text{W},$$

$$Q=U_1I_1\sin\varphi_1+U_2I_2\sin\varphi_2+U_3I_3\sin\varphi_3=0.$$

$$S=\sqrt{P^2+Q^2}=2\,200\ \text{VA}.$$

6.3.2. PUTEREA LA REȚELELE TRIFAZATE CU CONEXIUNE ÎN TRIUNGHI

Se consideră rețeaua trifazată cu conexiune în triunghi din fig. 6-17. Valoarea instantanee a puterii electromagnetice pentru cele trei faze este :

$$p=(v_1-v_2)\,i_{12}+(v_2-v_3)\,i_{23}+(v_3-v_1)\,i_{31}=$$
$$=u_{12}i_{12}+u_{23}i_{23}+u_{31}i_{31}.$$

Puterea activă este :

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p\,dt=U_{12}I_{12}\cos\varphi_{12}+U_{23}I_{23}\cos\varphi_{23}+$$
$$+U_{31}I_{31}\cos\varphi_{31}. \qquad (6\text{-}28)$$

În caz de simetrie și echilibru, adică $U_{12}=U_{23}=U_{31}=U_f$, $I_{12}=I_{23}=I_{31}=I_f$, $\varphi_{12}=\varphi_{23}=\varphi_{31}=\varphi$ rezultă :

$$P=3\,U_fI_f\cos\varphi, \qquad (6\text{-}29)$$

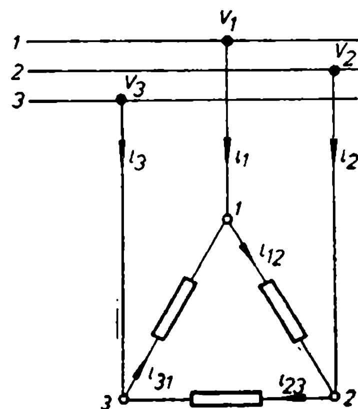


Fig. 6-17. Receptor trifazat cu conexiune în triunghi.

de unde, avînd în vedere că $I_f=\frac{1}{\sqrt{3}}I_l$ și $U_f=U_l$, se obține :

$$P=\sqrt{3}\,U_lI_l\cos\varphi,\ \text{sau}\ P=\sqrt{3}\,UI\cos\varphi. \qquad (6\text{-}30)$$

Puterea reactivă este :

$$Q=U_{12}I_{12}\sin\varphi_{12}+U_{23}I_{23}\sin\varphi_{23}+U_{31}I_{31}\sin\varphi_{31}. \qquad (6\text{-}31)$$

În caz de simetrie și echilibru rezultă :

$$Q=3\,U_fI_f\sin\varphi \qquad (6\text{-}32)$$

sau, înlocuind curentul de fază prin curentul de linie, se obține :

$$Q=\sqrt{3}\,U_lI_l\sin\varphi,\ \text{respectiv}\ Q=\sqrt{3}\,UI\sin\varphi. \qquad (6\text{-}33)$$

Puterea aparentă este :

$$S=\sqrt{P^2+Q^2}. \qquad (6\text{-}34)$$

La simetrie și echilibru se obține :

$$S=\sqrt{3}\,U_lI_l,\ \text{sau}\ S=\sqrt{3}\,UI. \qquad (6\text{-}35)$$

Se remarcă faptul că expresiile puterilor activă, reactivă și aparentă pentru rețelele cu conexiune în triunghi sînt aceleași ca pentru rețelele cu conexiune în stea.

Aplicaţia 6-2. Să se rezolve aplicaţia 6-1 considerînd receptorul cu aceiaşi parametri conectat în triunghi (fig. 6-18, *a*).

Rezolvare. Se reprezintă în fig. 6-18, *b* diagrama tensiunilor şi curenţilor de fază ca mărimi complexe. Curenţii de fază sînt:

$$I_{12}=\frac{U_{12}}{Z_{12}}=\frac{U_{12}}{R}=\frac{380}{22}=17{,}3\text{ A},\quad I_{23}=\frac{U_{23}}{Z_{23}}=\frac{U_{23}}{\omega L}=\frac{380}{22}=17{,}3\text{ A}$$

$$I_{31}=\frac{U_{31}}{Z_{31}}=\frac{U_{31}}{\frac{1}{\omega C}}=\frac{380}{22}=17{,}3\text{ A}$$

sau, în complex:

$$\underline{I}_{12}=I_{12}e^{j\frac{2\pi}{3}}=(-8{,}7+j\,15{,}7)\text{ A},\quad \underline{I}_{23}=I_{23}e^{-j\frac{\pi}{2}}=-j\,17{,}3\text{ A},$$

$$\underline{I}_{31}=I_{31}e^{-j\frac{\pi}{6}}=(15{,}7-j\,8{,}7)\text{ A}.$$

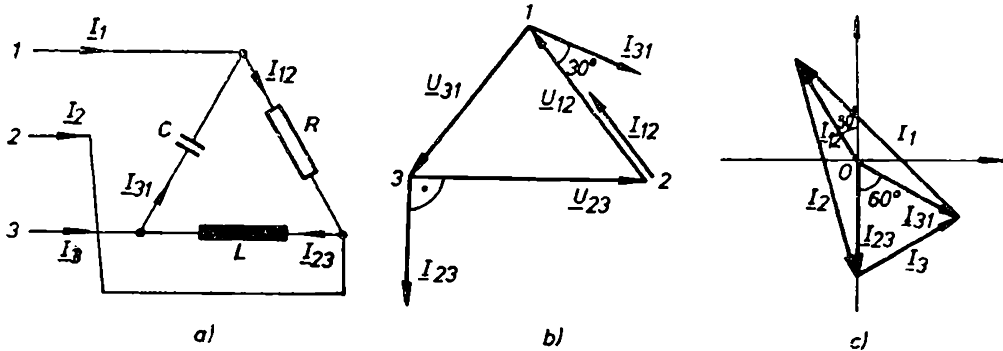


Fig. 6-18. Receptor trifazat dezechilibrat (*a*), diagrama tensiunilor şi curenţilor de fază (*b*) şi a curenţilor de linie (*c*).

Curenţii de linie reprezentaţi în fig. 6-18, *c* sînt:

$$\underline{I}_1=\underline{I}_{12}-\underline{I}_{31}=24{,}4\,(1+j)\text{ A},\quad \underline{I}_2=\underline{I}_{23}-\underline{I}_{12}=-(8{,}7+j\,33)\text{ A},$$

$$\underline{I}_3=\underline{I}_{31}-\underline{I}_{23}=(15{,}7+j\,8{,}6)\text{ A}.$$

Defazajele dintre curenţii de fază şi tensiunile de fază (linie) au valorile: $\varphi_{12}=0$, $\varphi_{23}=\frac{\pi}{2}$, $\varphi_{31}=-\frac{\pi}{2}$.

Puterile din circuit sînt:

$$P=U_{12}I_{12}\cos\varphi_{12}+U_{23}I_{23}\cos\varphi_{23}+U_{31}I_{31}\cos\varphi_{31}=6\,574\text{ W},$$

$$Q=U_{12}I_{12}\sin\varphi_{12}+U_{23}I_{23}\sin\varphi_{23}+U_{31}I_{31}\sin\varphi_{31}=0,$$

$$S=\sqrt{P^2+Q^2}=6\,574\text{ VA}.$$

6.4. FACTORUL DE PUTERE LA REŢELELE TRIFAZATE

La circuitele monofazate s-a văzut că factorul de putere se defineşte prin raportul dintre puterea activă şi puterea activă maximă transportată la aceleaşi pierderi prin efect Joule-Lenz pe linie, care, în regim sinusoidal, rezultă egal cu factorul de defazare : $\Delta = \cos\varphi = \frac{P}{S}$. În acelaşi mod se defineşte factorul de putere pentru reţelele trifazate, adică este egal cu raportul dintre puterea activă P şi puterea activă maximă P_{max} transportată la aceleaşi pierderi prin efect Joule-Lenz pe linia de transport dintre sursă şi consumator. La reţelele trifazate simetrice şi echilibrate, puterea activă este $P=\sqrt{3}UI\cos\varphi$, iar pentru puterea activă maximă, la acelaşi curent (pierderi) pe linie, este egală cu puterea aparentă $P_{max}=\sqrt{3}UI$. Rezultă şi în acest caz factorul de putere egal cu factorul de defazare.

La reţelele trifazate nesimetrice şi neechilibrate, factorul de putere este diferit de factorul de defazare. În acest caz, puterea activă a consumatorului considerat cu conexiune în stea şi alimentat de la sursă prin linia de transport este : $P=U_1I_1\cos\varphi_1+U_2I_2\cos\varphi_2+U_3I_3\cos\varphi_3$. Acestei puteri îi corespund pierderile pe linie : $(I_1^2+I_2^2+I_3^2)R_L$, unde R_L este rezistenţa conductoarelor.

În ce priveşte puterea activă maximă în caz de nesimetrie, aceasta se stabileşte mai dificil. Se adoptă criteriul că puterea activă la consumator este maximă cînd are pe fiecare fază rezistenţa electrică pură R, tensiunile de linie nesimetrice rămînînd nemodificate. În acest caz, curenţii de fază şi tensiunile de fază vor fi : I_1', I_2', I_3', respectiv U_1', U_2', U_3', astfel că

$$P_{max}=(I_1'^2+I_2'^2+I_3'^2)R=\frac{U_1'^2+U_2'^2+U_3'^2}{R},$$

de unde rezultă :

$$P_{max}^2=(U_1'^2+U_2'^2+U_3'^2)(I_1'^2+I_2'^2+I_3'^2).$$

Dar, avînd în vedere că puterea maximă se transportă cu aceleaşi pierderi prin efect Joule-Lenz pe linie ca şi cele pentru puterea P, se obţine :

$$I_1'^2+I_2'^2+I_3'^2=I_1^2+I_2^2+I_3^2 \tag{6-36}$$

Astfel, puterea maximă se exprimă prin relaţia ;

$$P_{max}^2=(U_1'^2+U_2'^2+U_3'^2)(I_1^2+I_2^2+I_3^2) \tag{6-37}$$

care, printr-un artificiu de calcul, devine :

$$P_{max}^2=(U_1'I_1\cos\varphi_1'+U_2'I_2\cos\varphi_2'+U_3'I_3\cos\varphi_3')^2+$$
$$+(U_1'I_1\sin\varphi_1'+U_2'I_2\sin\varphi_2'+U_3'I_3\sin\varphi_3')^2+$$
$$+\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{3}[U_j'^2I_k^2-2U_j'U_k'I_jI_k\cos(\varphi_j'-\varphi_k')],$$

adică

$$P_{max}^2=P^2+Q^2+P_{nes}^2=S^2+P_{nes}^2. \tag{6-38}$$

Puterea de nesimetrie este:

$$P_{nes}^2 = \sum_{\substack{j,\, k=1 \\ j\neq k}}^{3} [U_j'^2 I_k^2 - 2U_j' U_k' I_j I_k \cos(\varphi_j' - \varphi_k')]. \tag{6-39}$$

S-a notat cu φ_j' unghiul de defazaj între tensiunea U_j' și curentul I_j.
Rezultă factorul de putere:

$$\Delta^2 = \frac{P^2}{P_{max}^2} = \frac{P^2}{S^2 + P_{nes}^2} = \frac{P^2}{S^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{P_{nes}}{S}\right)^2} \tag{6-40}$$

adică

$$\Delta = \Delta_f \, \Delta_{nes}, \tag{6-41}$$

unde

$$\Delta_f = \frac{P}{S} \tag{6-42}$$

este factorul de defazare iar

$$\Delta_{nes} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{P_{nes}}{S}\right)^2}} \tag{6-43}$$

este factorul de nesimetrie.

Aplicația 6-3. Se consideră rețeaua trifazată neechilibrată din fig. 6-19, *a*. Se cere să se calculeze factorul de putere, tensiunile de linie fiind simetrice.

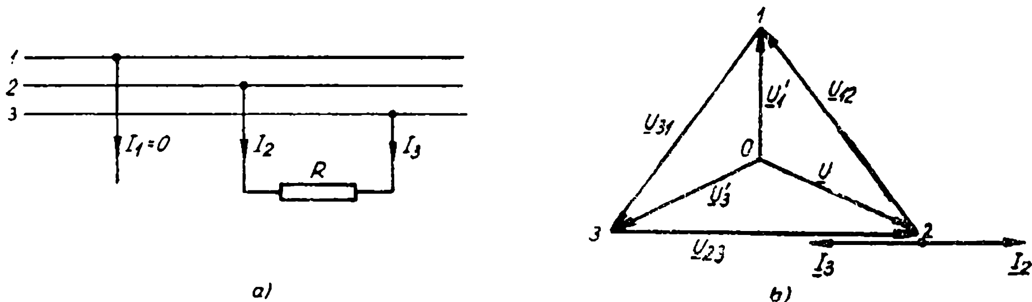


Fig. 6-19. Încărcarea neechilibrată a rețelei trifazate (*a*) și diagrama tensiunilor și curenților (*b*).

Rezolvare. Se obține: $I_1=0$, $I_2=-I_3=\frac{U_{23}}{R}$. Deci, curentul I_2 este în fază cu tensiunea U_{23}, iar I_3 este în opoziție de fază față de aceeași tensiune.

În fig. 6-19, *b* este reprezentată diagrama tensiunilor și curenților. S-au notat cu „prim" tensiunile de fază simetrice. Defazajele dintre curenții I_2 și I_3 și tensiunea U_2' respectiv U_3' sînt: $\varphi_2' = -\frac{\pi}{6}$, $\varphi_3' = \frac{\pi}{6}$.

Puterea activă este:

$$P = U_1' I_1 \cos \varphi_1' + U_2' I_2 \cos \varphi_2' + U_3' I_3 \cos \varphi_3' = \sqrt{3} U_f' I,$$

unde

$$U_1' = U_2' = U_3' = U_f', \quad I_2 = I_3 = I \text{ și } I_1 = 0.$$

Puterea reactivă rezultă egală cu zero, $Q=0$ și puterea aparentă este egală cu puterea activă, $S=\sqrt{3}U_f'I$.

Puterea activă maximă se obține din relația (6-37):

$$P_{max} = \sqrt{3U_f'^2 \cdot 2I^2} = \sqrt{3}\sqrt{2}U_f'I.$$

Puterea de nesimetrie este:

$$P_{nes} = \sqrt{P_{max}^2 - S^2} = \sqrt{6U_f'^2 I^2 - 3U_f'^2 I^2} = \sqrt{3}U_f'I.$$

Factorul de defazaj și factorul de nesimetrie sînt:

$$\Delta_f = \frac{P}{S} = 1; \quad \Delta_{nes} = \frac{S}{P_{max}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

cu care rezultă factorul de putere

$$\Delta = \Delta_f \Delta_{nes} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Se remarcă faptul că deși receptorul este cu caracter rezistiv factorul de putere este diferit de unitate.

6.5. CALCULUL REȚELELOR TRIFAZATE

6.5.1. CONSIDERAȚIUNI GENERALE ASUPRA METODELOR DE CALCUL A REȚELELOR ELECTRICE

Rețelele electrice de curent alternativ conțin, în general, mai multe impedanțe și surse conectate între ele în serie, în paralel, mixt, în formă de poligon sau de stea. Elementele topologice principale ale rețelei sînt: nodurile, laturile și ochiurile.

Problemele care se pun la calculul rețelelor de c.a. sînt similare cu cele care se pun la calculul rețelelor de c.c., adică se referă, în majoritate, la calculul curenților din laturi. Aspectele suplimentare de calcul ce apar la rețelele de c.a. se referă la determinarea defazajelor între anumite mărimi, a factorului de putere, a puterilor activă, reactivă și aparentă etc. De asemenea, la rețelele de c.a. intervin și cuplaje magnetice între bobine (impedanțe de cuplaj), care nu apar la rețelele de c.c.

În regimul sinusoidal de funcționare permanentă a rețelelor de c.a. mărimile ce intervin în calcule (tensiuni, curenți, impedanțe, admitanțe) se exprimă, obișnuit, sub formă complexă, ceea ce conduce la un mod simplu de a scrie relațiile între mărimi și de a găsi soluția problemei. Procedînd în acest mod,

se obţin relaţii algebrice între mărimi complexe, similare cu relaţiile scrise pentru reţelele de curent continu, existînd următoarele corespondenţe între mărimi :

c.c.	I_b	U_e	I	R	G
c.a.	$\underline{U}_b$	$\underline{U}_e$	$\underline{I}$	$\underline{Z}$	$\underline{Y}$

La capitolul 3 s-au prezentat următoarele metode de calcul a reţelelor de c.c. în regim permanent :

— metoda teoremelor lui Kirchhoff ;
— metoda superpoziţiei ;
— metoda transfigurării ;
— metoda ochiurilor independente (curenţilor ciclici) ;
— metoda potenţialelor nodurilor.

Aceste metode se aplică şi la calculul reţelelor de c.a. în regim permanent sinusoidal, ţinînd seama de precizările făcute mai sus. Aici se vor prezenta în plus, problemele de calcul specifice reţelelor trifazate cu conexiune în stea şi în triunghi precum şi metoda generatorului echivalent.

6.5.2. CALCULUL REŢELELOR TRIFAZATE CU CONEXIUNE ÎN STEA

Se consideră în fig. 6-20, *a* schema trifazată cu conexiune în stea a unui receptor, alimentat de la o reţea (sursă) cu tensiuni de linie şi de fază simetrice. Impedanţele pe cele trei faze ale receptorului sînt $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$, iar impedanţa conductorului de nul, legat între punctul de nul O al sursei şi punctul de nul O' al receptorului, este $\underline{Z}_0$. În fig. 6-20, *b* sînt reprezentate tensiunile de fază şi de linie simetrice, disponibile la reţeaua (sursa) de alimentare.

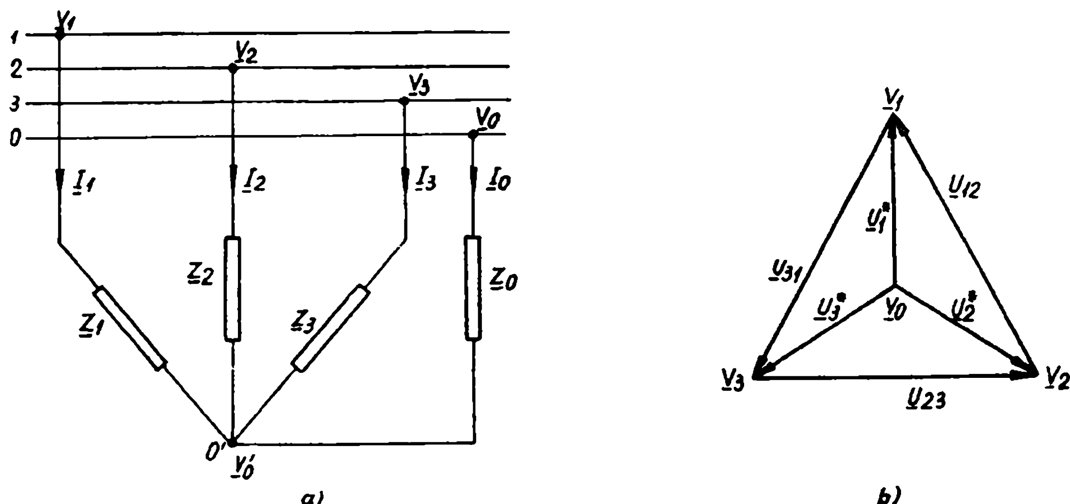


Fig. 6-20. Impedanţe conectate în stea (*a*) şi diagrama tensiunilor (*b*).

Calculul pe care îl urmărim în continuare se referă la determinarea curenţilor şi tensiunilor de fază la receptor în funcţie de tensiunile sursei şi impedanţele receptorului.

Tensiunile de fază la receptor se exprimă în funcție de potențiale și curenți prin relațiile :

$$\underline{U}_1=\underline{V}_1-\underline{V}_{0'}=\underline{I}_1\underline{Z}_1\ ;\ \underline{U}_2=\underline{V}_2-\underline{V}_{0'}=\underline{I}_2\underline{Z}_2\ ;$$

$$\underline{U}_3=\underline{V}_3-\underline{V}_{0'}=\underline{I}_3\underline{Z}_3. \tag{6-44}$$

Diferența de potențial între punctul de nul al sursei și punctul de nul al receptorului este :

$$\Delta\underline{U}=\underline{V}_0-\underline{V}_{0'}=\underline{I}_0\underline{Z}_0. \tag{6-45}$$

Pentru a putea calcula curenții din circuit în funcție de tensiunile disponibile la rețea și de impedanțe este necesar, mai întîi, să se calculeze potențialul $V_{0'}$. Conform teoremei I a lui Kirchhoff, se obține :

$$\underline{I}_1+\underline{I}_2+\underline{I}_3+\underline{I}_0=0 \tag{6-46}$$

sau, ținînd seama de relațiile (6-44) și (6-45), rezultă :

$$\sum_{\nu=0}^{3}\frac{\underline{V}_\nu}{\underline{Z}_\nu}-\underline{V}_{0'}\sum_{\nu=0}^{3}\frac{1}{\underline{Z}_\nu}=0,$$

de unde :

$$\underline{V}_{0'}=\frac{\dfrac{\underline{V}_0}{\underline{Z}_0}+\dfrac{\underline{V}_1}{\underline{Z}_1}+\dfrac{\underline{V}_2}{\underline{Z}_2}+\dfrac{\underline{V}_3}{\underline{Z}_3}}{\dfrac{1}{\underline{Z}_0}+\dfrac{1}{\underline{Z}_1}+\dfrac{1}{\underline{Z}_2}+\dfrac{1}{\underline{Z}_3}}. \tag{6-47}$$

Deci, potențialul $\underline{V}_{0'}$, depinde atît de potențialele $\underline{V}_1$, $\underline{V}_2$, $\underline{V}_3$ și $\underline{V}_0$, precum și de impedanțele $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$ și $\underline{Z}_0$.

Înlocuind (6-47) în (6-44), se obțin pentru curenții $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ și $\underline{I}_3$ expresiile :

$$\underline{I}_1=\frac{(\underline{V}_1-\underline{V}_2)\underline{Z}_3-(\underline{V}_3-\underline{V}_1)\underline{Z}_2+(\underline{V}_1-\underline{V}_0)\dfrac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_0}}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2+\underline{Z}_2\underline{Z}_3+\underline{Z}_3\underline{Z}_1+\dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_0}}$$

$$\underline{I}_2=\frac{(\underline{V}_2-\underline{V}_3)\underline{Z}_1-(\underline{V}_1-\underline{V}_2)\underline{Z}_3+(\underline{V}_2-\underline{V}_0)\dfrac{\underline{Z}_3\underline{Z}_1}{\underline{Z}_0}}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2+\underline{Z}_2\underline{Z}_3+\underline{Z}_3\underline{Z}_1+\dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_0}} \tag{6-48}$$

$$\underline{I}_3=\frac{(\underline{V}_3-\underline{V}_1)\underline{Z}_2-(\underline{V}_2-\underline{V}_3)\underline{Z}_1+(\underline{V}_3-\underline{V}_0)\dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_0}}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2+\underline{Z}_2\underline{Z}_3+\underline{Z}_3\underline{Z}_1+\dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_0}}.$$

Curentul $\underline{I}_0$ se deduce din (6-46) prin înlocuirea relațiilor (6-48) :

$$\underline{I}_0=-(\underline{I}_1+\underline{I}_2+\underline{I}_3)=\frac{(\underline{V}_1-\underline{V}_0)\dfrac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_0}+(\underline{V}_2-\underline{V}_0)\dfrac{\underline{Z}_3\underline{Z}_1}{\underline{Z}_0}+(\underline{V}_3-\underline{V}_0)\dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_0}}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2+\underline{Z}_2\underline{Z}_2+\underline{Z}_3\underline{Z}_1+\dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_0}} \tag{6-49}$$

Avînd în vedere relațiile (6-10), se obțin pentru curenți expresiile finale în funcție de tensiunile sursei și de impedanțe :

$$\underline{I}_1=\frac{\underline{U}_{12}\underline{Z}_3-\underline{U}_{31}\underline{Z}_2+\underline{U}_1^*\dfrac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_0}}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2+\underline{Z}_2\underline{Z}_3+\underline{Z}_3\underline{Z}_1+\dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_0}}$$

$$\underline{I}_2=\frac{\underline{U}_{23}\underline{Z}_1-\underline{U}_{12}\underline{Z}_3+\underline{U}_2^*\dfrac{\underline{Z}_3\underline{Z}_1}{\underline{Z}_0}}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2+\underline{Z}_2\underline{Z}_3+\underline{Z}_3\underline{Z}_1+\dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_0}} \qquad (6\text{-}50)$$

$$\underline{I}_3=\frac{\underline{U}_{31}\underline{Z}_2-\underline{U}_{23}\underline{Z}_1+\underline{U}_3^*\dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_0}}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2+\underline{Z}_2\underline{Z}_3+\underline{Z}_3\underline{Z}_1+\dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_0}}$$

$$\underline{I}_0=\frac{\underline{U}_1^*\dfrac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_0}+\underline{U}_2^*\dfrac{\underline{Z}_3\underline{Z}_1}{\underline{Z}_0}+\underline{U}_3^*\dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_0}}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2+\underline{Z}_2\underline{Z}_3+\underline{Z}_3\underline{Z}_1+\dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_0}}. \qquad (6\text{-}51)$$

Cu ajutorul relațiilor scrise mai sus se analizează diferite situații particulare din care rezultă și rolul conductorului de nul.

a. **Conexiunea în stea cu conductorul de nul legat** ($\underline{Z}_0=0$). Aceasta înseamnă că $\underline{V}_0=\underline{V}_{0'}$ iar tensiunile de fază la receptor sînt : $\underline{U}_1=\underline{U}_1^*$, $\underline{U}_2=\underline{U}_2^*$, $\underline{U}_3=\underline{U}_3^*$, adică sînt tensiuni simetrice.

Dacă receptorul este echilibrat, adică $\underline{Z}_1=\underline{Z}_2=\underline{Z}_3$, curenții $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ și $\underline{I}_3$ sînt simetrici și $\underline{I}_0=0$.

Dacă receptorul este neechilibrat, adică $\underline{Z}_1\neq\underline{Z}_2\neq\underline{Z}_3$, atunci curenții $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ și $\underline{I}_3$ nu sînt nesimetrici, iar $\underline{I}_0\neq0$. În schimb, tensiunile de fază la receptor $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$, $\underline{U}_3$, se păstrează simetrice, ceea ce înseamnă că *conductorul de nul are rolul de a simetriza tensiunile de fază la receptorul conectat în stea atunci cînd acestea este neechilibrat.*

b. **Conexiunea în stea fără conductor de nul** ($\underline{Z}_0=\infty$). În această situație, dacă receptorul este echilibrat, adică $\underline{Z}_1=\underline{Z}_2=\underline{Z}_3$, din relațiile (6-50) se obțin pentru curenți expresiile :

$$\underline{I}_1=\frac{\underline{U}_{12}-\underline{U}_{31}}{3\underline{Z}_1}=\frac{\underline{U}_1^*}{\underline{Z}_1},\quad \underline{I}_2=\frac{\underline{U}_2^*}{\underline{Z}_2},\quad \underline{I}_3=\frac{\underline{U}_3^*}{\underline{Z}_3}, \qquad (6\text{-}52)$$

în care $\underline{U}_{12}-\underline{U}_{31}=3\underline{U}_1^*$, așa cum reiese din fig. 6-21. Comparînd între ele expresiile (6-52) și (6—44), rezultă : $\underline{U}_1=\underline{U}_1^*$, $\underline{U}_2=\underline{U}_2^*$, $\underline{U}_3=\underline{U}_3^*$ și $\underline{V}_{0'}=\underline{V}_0$. Deci, în acest caz, atît curenții, cît și tensiunile de fază la receptor sînt simetrice.

Dacă receptorul este neechilibrat, adică $\underline{Z}_1 \neq \underline{Z}_2 \neq \underline{Z}_3$, din (6-50) rezultă:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{12}\underline{Z}_3 - \underline{U}_{31}\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2+\underline{Z}_2\underline{Z}_3+\underline{Z}_3\underline{Z}_1}, \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{23}\underline{Z}_1 - \underline{U}_{12}\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2+\underline{Z}_2\underline{Z}_3+\underline{Z}_3\underline{Z}_1},$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{31}\underline{Z}_2 - \underline{U}_{23}\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2+\underline{Z}_2\underline{Z}_3+\underline{Z}_3\underline{Z}_1}, \qquad (6\text{-}53)$$

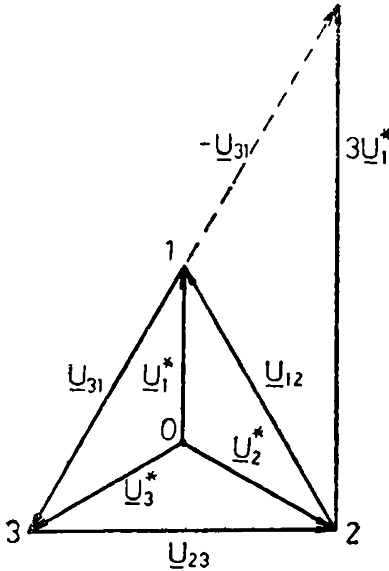


Fig. 6-21. Diagramă de calcul a tensiunii $\underline{U}_{12}$—$\underline{U}_{31}$.

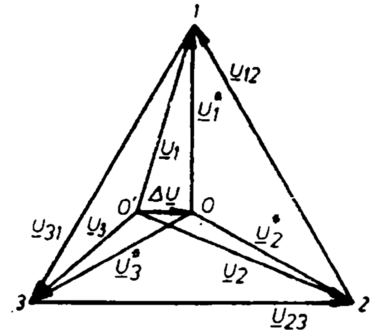


Fig. 6-22. Deplasarea $\Delta\underline{U}$ a punctului de nul în planul tensiunilor.

adică curenţii sînt nesimetrici dar, suma lor este nulă $\underline{I}_1+\underline{I}_2+\underline{I}_3=0$, ceea ce înseamnă că aceşti trei curenţi formează un triunghi oarecare. În ceea ce priveşte tensiunile de fază la receptor, acestea sînt nesimetrice deoarece curenţii sînt nesimetrici şi impedanţele nu sînt egale. Ca urmare, rezultă $\underline{V}_{0'} \neq \underline{V}_0$ adică poziţia punctului O' este deplasată cu $\Delta\underline{U}=\underline{V}_0-\underline{V}_{0'}$ faţă de centrul O al triunghiului tensiunilor de linie (fig. 6-22).

Pentru calculul deplasării $\Delta\underline{U}$, din fig. 6-22 se deduc relaţiile:

$$\underline{U}_1=\Delta\underline{U}-\underline{U}_1^*, \quad \underline{U}_2=\Delta\underline{U}+\underline{U}_2^*, \quad \underline{U}_3=\Delta\underline{U}+\underline{U}_3^* \qquad (6\text{-}54)$$

care, dacă se înmulţesc cu admitanţele $\underline{Y}_1$, $\underline{Y}_2$, respectiv $\underline{Y}_3$ a celor trei faze şi se adună, rezultă:

$$\Delta\underline{U} = -\frac{\underline{U}_1^*\underline{Y}_1+\underline{U}_2^*\underline{Y}_2+\underline{U}_3^*\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1+\underline{Y}_2+\underline{Y}_3} \qquad (6\text{-}55)$$

unde s-a ţinut seama că $\underline{U}_1\underline{Y}_1+\underline{U}_2\underline{Y}_2+\underline{U}_3\underline{Y}_3=0$ (suma curenţilor este nulă).

Aplicaţia 6-4. În fig. 6-23, *a* este reprezentată schema electrică a unui receptor trifazat neechilibrat, cu conexiune în stea, fără conductor de nul, avînd pe faze impedanţele: $\underline{Z}_1=22\ \Omega$, $\underline{Z}_2=\mathrm{j}\,22\ \Omega$ şi $\underline{Z}_3=-\mathrm{j}\,22\ \Omega$. Să se determine curenţii şi tensiunile de fază, precum şi puterile activă, reactivă şi aparentă, ştiind că alimentarea se face de la o sursă (reţea) cu tensiunile de linie $\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$, $\underline{U}_{31}$ simetrice.

Rezolvare. Considerînd tensiunea $\underline{U}_{23}$ situată pe axa reală (fig. 6-23, *b*), se obțin :

$$\underline{U}_{23}=U_{23}=U_l=380 \text{ V},$$

$$\underline{U}_{12}=U_{12}e^{j\frac{2\pi}{3}}=380\left(-\frac{1}{2}+j\frac{3}{2}\right) \text{ V},$$

$$\underline{U}_{31}=U_{31}e^{-j\frac{2\pi}{3}}=380\left(-\frac{1}{2}-j\frac{3}{2}\right) \text{ V}.$$

Cu relațiile (6-53) se calculează curenții pe cele trei faze :

$$\underline{I}_1=\frac{\underline{U}_{12}\underline{Z}_3-\underline{U}_{31}\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2+\underline{Z}_2\underline{Z}_3+\underline{Z}_3\underline{Z}_1}=j\ 17{,}4 \text{ A},$$

$$\underline{I}_2=\frac{\underline{U}_{23}\underline{Z}_1-\underline{U}_{12}\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2+\underline{Z}_2\underline{Z}_3+\underline{Z}_3\underline{Z}_1}=17{,}4\,(0{,}16-j\ 0{,}5) \text{ A},$$

$$\underline{I}_3=\frac{\underline{U}_{31}\underline{Z}_2-\underline{U}_{23}\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2+\underline{Z}_2\underline{Z}_3+\underline{Z}_3\underline{Z}_1}=17{,}4(-0{,}16-j\ 0{,}5) \text{ A}.$$

Se observă că $\underline{I}_1+\underline{I}_2+\underline{I}_3=0$.

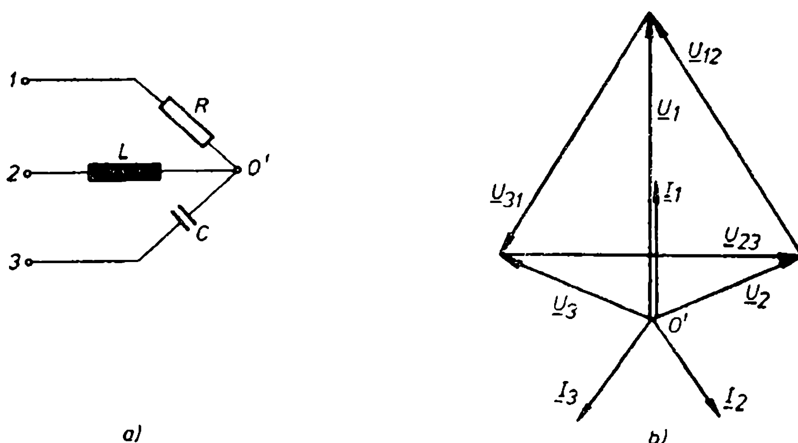


Fig. 6-23. Impedanțe diferite conectate în stea (*a*) și diagrama corespunzătoare pentru tensiuni și curenți (*b*).

Valorile efective a acestor curenți se determină calculînd modulele mărimilor complexe prin care se exprimă. Rezultă : $I_1=17{,}4$ A, $I_2=9{,}05$ A, $I_3=9{,}05$ A.

Tensiunile de fază la receptor sînt : $\underline{U}_1=\underline{I}_1\underline{Z}_1=j\ 382{,}8$ V, $\underline{U}_2=\underline{I}_2\underline{Z}_2=382{,}8\ (0{,}5-0{,}16\ j)$ V, $\underline{U}_3=\underline{I}_3\underline{Z}_3=382{,}8\ (0{,}5+0{,}15\ j)$ V.

Valorile efective ale acestor tensiuni sînt: $U_1=382{,}8$ V, $U_2=199$ V, $U_3=199$ V.

Tensiunile $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$, $\underline{U}_3$ și curenții $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$ sînt reprezentate în fig. 6-23, *b*. Defazajele dintre curenții de fază și tensiuniile de fază sînt $\varphi_1=0$, $\varphi_2=\frac{\pi}{2}$, $\varphi_3=\frac{\pi}{2}$.

Puterile activă, reactivă şi aparentă obţin valorile:

$$P = U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 = 6\,660 \text{ W},$$

$$Q = U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 = 0,$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 6\,660 \text{ VA}.$$

Se remarcă faptul că puterea aparentă nu este egală su suma puterilor aparente pe cele trei faze, $S \neq U_1 I_1 + U_2 I_2 + U_3 I_3$, din cauza nesimetriei tensiunilor şi curenţilor pe faze. De asemenea, puterea activă obţine altă valoare faţă de cazul cînd conductorul de nul este legat (v. aplicaţia 6-1).

Aplicaţia 6-5. Un receptor trifazat cu conexiune în stea, fără conductor de nul, are impedanţele pe faze $\underline{Z}_1 = 0$ (scurtcircuit), $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$ şi este alimentat de la o reţea cu tensiuni de linie simetrice (fig. 6-24, *a*). Să se determine tensiunile de fază la receptor.

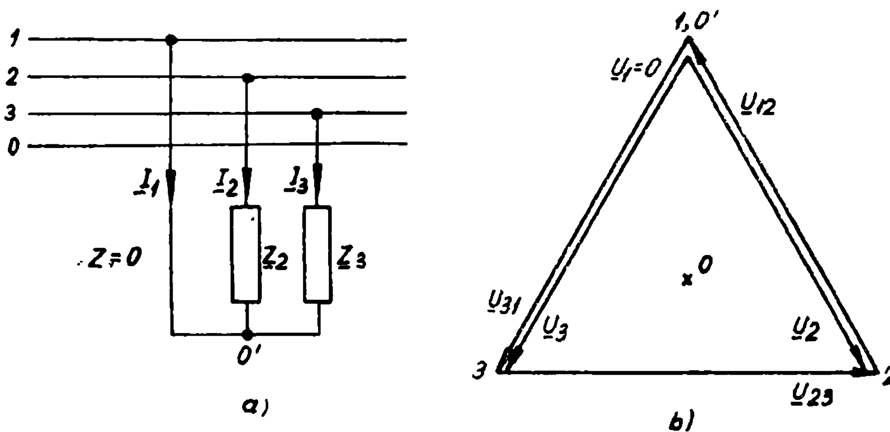


Fig. 6-24. Faza *1* scurtcircuitată (*a*) şi diagrama corespunzătoare pentru tensiuni (*b*), în absenţa conductorului de nul.

Rezolvare. În această situaţie $\underline{U}_1 = 0$, $\underline{U}_2 = -\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_3 = \underline{U}_{31}$ (fig. 6-24, *b*), adică tensiunile de fază $\underline{U}_2$ şi $\underline{U}_3$ obţin valoarea tensiunii de linie. Din acest exemplu rezultă importanţa prezenţei conductorului de nul. Dacă acest conductor de nul lipseşte, tensiunile de fază la receptorul neechilibrat pot atinge valori mai mari decît cele normale.

6.5.3. CALCULUL REŢELELOR TRIFAZATE CU CONEXIUNE ÎN TRIUNGHI

Se consideră în fig. 6-25 schema unui receptor trifazat cu fazele conectate în triunghi, cu impedanţele pe faze $\underline{Z}_{12}$, $\underline{Z}_{23}$, $\underline{Z}_{31}$ şi alimentat de la o sursă (reţea) cu tensiuni de linie $\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$, $\underline{U}_{31}$ simetrice. Se reaminteşte că la conexiunea în triunghi, tensiunile de linie sînt aceleaşi cu tensiunile de fază.

Curenţii de fază se determină în funcţie de tensiunile de fază şi impedanţele de fază cu relaţiile:

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}}; \quad \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}}; \quad \underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}}. \tag{6-56}$$

Aplicînd teorema I a lui Kirchhoff în nodurile *1*, *2* şi *3* (fig. 6-25), rezultă legătura dintre curenţii de linie şi curenţii de fază :

$$\underline{I}_1=\underline{I}_{12}-\underline{I}_{31},\ \underline{I}_2=\underline{I}_{23}-\underline{I}_{12},\ \underline{I}_3=\underline{I}_{31}-\underline{I}_{23}. \qquad (6\text{-}57)$$

Dacă receptorul este echilibrat, adică $\underline{Z}_{12}=\underline{Z}_{23}=\underline{Z}_{31}$, avînd în vedere că tensiunile sînt simetrice, rezultă şi curenţii de fază, respectiv de linie, simetrici. În fig. 6-26 este reprezentată diagrama tensiunilor şi curenţilor pentru acest caz, în care $\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3$.

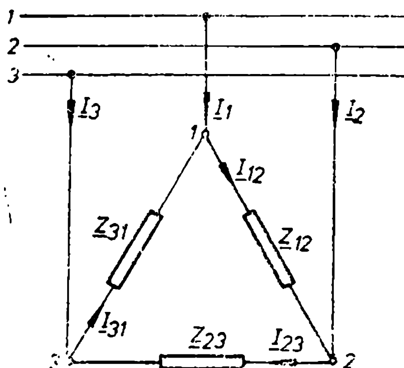


Fig. 6-25. Impedanţe conectate în triunghi.

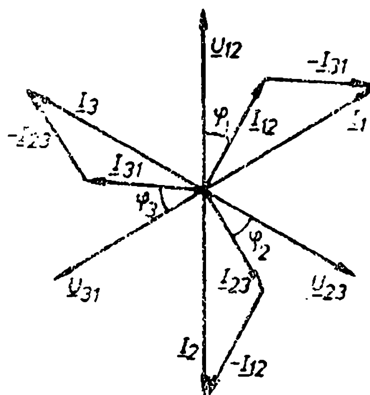


Fig. 6-26. Diagrama tensiunilor de linie, a curenţilor de linie şi de fază la conexiunea în triunghi, în caz de simetrie.

Curenţii de linie sînt de $\sqrt{3}$ ori mai mari decît cei de fază. Dacă receptorul este neechilibrat, curenţii de fază, respectiv de linie, nu sînt simetrici, dar suma curenţilor de linie este şi în acest caz nulă :

$$\underline{I}_1+\underline{I}_2+\underline{I}_3=0. \qquad (6\text{-}58)$$

Înseamnă că triunghiul curenţilor de linie este oarecare, iar curenţii de fază $\underline{I}_{12}$, $\underline{I}_{23}$, $\underline{I}_{31}$ se situează într-un anumit fel în planul acestui triunghi (fig. 6-27), respectîndu-se relaţiile (6-57). Pentru a găsi poziţia centrului *O* a stelei curenţilor de fază, atunci cînd se cunoaşte triunghiul curenţilor de linie, se procedează astfel : se notează cu $\underline{I}^*_{12}$, $\underline{I}^*_{23}$, $\underline{I}^*_{31}$ curenţii de fază ce se suprapun peste medianele triunghiului, a căror sumă se poate demonstra uşor că este nulă :

$$\underline{I}^*_{12}+\underline{I}^*_{23}+\underline{I}^*_{31}=0. \qquad (6\text{-}59)$$

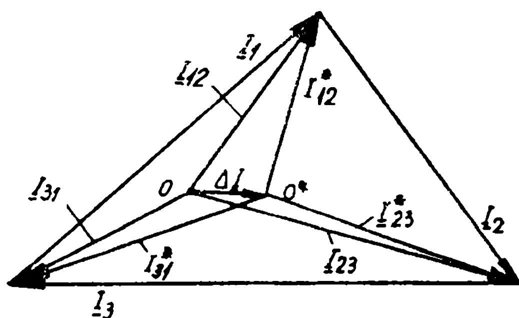


Fig. 6-27. Diagrama curenţilor de linie şi de fază nesimetrici.

Apoi, se notează cu $\Delta\underline{I}$ curentul corespunzător distanţei dintre punctul *O* şi centrul *O** de greutate al triunghiului. Cu aceasta se obţine :

$$\underline{I}_{12}=\Delta\underline{I}+\underline{I}^*_{12},\ \underline{I}_{23}=\Delta\underline{I}+\underline{I}^*_{23},$$
$$\underline{I}_{31}=\Delta\underline{I}+\underline{I}^*_{31}. \qquad (6\text{-}60)$$

Aceste relații se înmulțesc cu $\underline{Z}_{12}$, $\underline{Z}_{23}$, respectiv $\underline{Z}_{31}$, se adună și rezultă:

$$\Delta \underline{I} = -\frac{\underline{I}_{12}^{*}\underline{Z}_{12}+\underline{I}_{23}^{*}\underline{Z}_{23}+\underline{I}_{31}^{*}\underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12}+\underline{Z}_{23}+\underline{Z}_{31}}, \tag{6-61}$$

unde s-a ținut seama că $\underline{I}_{12}\underline{Z}_{12}+\underline{I}_{23}\underline{Z}_{23}+\underline{I}_{31}\underline{Z}_{31}=0$ (suma tensiunilor de linie este nulă). Astfel, cunoscînd pe $\Delta \underline{I}$, rezultă poziția în planul complex a punctului O față de centrul O^* al triunghiului curenților de linie, respectiv rezultă poziția curenților de fază $\underline{I}_{12}$, $\underline{I}_{23}$, $\underline{I}_{31}$.

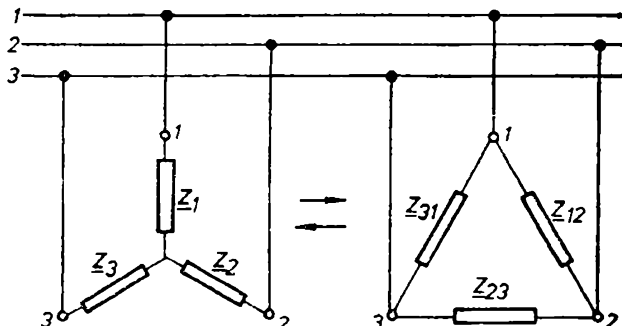


Fig. 6-28. Transfigurarea stea-triunghi.

6.5.4. PROBLEMA TRANSFIGURĂRII

Receptoarele trifazate, alimentate de la o sursă trifazată, pot fi cu conexiune în stea sau cu conexiune în triunghi (fig. 6-28). Pentru a găsi receptorul echivalent este necesar să se facă transfigurarea conexiunii stea în conexiune triunghi, sau invers, astfel încît toate receptoarele să aibă aceeași conexiune. Se preferă conexiunea în triunghi pentru receptorul echivalent deoarece se evită problemele referitoare la potențialul punctului de nul.

Problema transfigurării circuitelor se pune în felul următor: cunoscîndu-se impedanțele $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$ ale conexiunii în stea, să se determine impedanțele $\underline{Z}_{12}$, $\underline{Z}_{23}$, $\underline{Z}_{31}$ ale conexiunii în triunghi, sau invers. Condițiile ce se impun în acest sens se formulează astfel încît curenții de linie și puterile absorbite de la sursă să fie aceleași la ambele conexiuni, ceea ce înseamnă că impedanța echivalentă dintre punctele *1—2*, *2—3* și *3—1* de la conexiunea în stea să fie egală cu impedanța echivalentă dintre aceleași puncte de la conexiunea în triunghi. Deci:

$$\begin{aligned}
&(1-2) \quad \underline{Z}_1+\underline{Z}_2=\frac{\underline{Z}_{12}(\underline{Z}_{23}+\underline{Z}_{31})}{\underline{Z}_{12}+\underline{Z}_{23}+\underline{Z}_{31}}\\
&(2-3) \quad \underline{Z}_2+\underline{Z}_3=\frac{\underline{Z}_{23}(\underline{Z}_{12}+\underline{Z}_{31})}{\underline{Z}_{12}+\underline{Z}_{23}+\underline{Z}_{31}}\\
&(3-1) \quad \underline{Z}_3+\underline{Z}_1=\frac{\underline{Z}_{31}(\underline{Z}_{12}+\underline{Z}_{23})}{\underline{Z}_{12}+\underline{Z}_{23}+\underline{Z}_{31}}.
\end{aligned} \tag{6-62}$$

S-a obținut astfel un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute care pot fi: $\underline{Z}_{12}$, $\underline{Z}_{23}$, $\underline{Z}_{31}$ sau $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$. Din (6-62) se obțin simplu următoarele egalități:

$$\frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{23}\underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12}+\underline{Z}_{23}+\underline{Z}_{31}}=\underline{Z}_{12}\underline{Z}_3=\underline{Z}_{23}\underline{Z}_1=\underline{Z}_{31}\underline{Z}_2=\underline{Z}_1\underline{Z}_2+\underline{Z}_2\underline{Z}_3+\underline{Z}_3\underline{Z}_1 \tag{6-63}$$

de care se poate face uz la determinarea impedanțelor necunoscute.

Aplicația 6-6. Să se calculeze curenții de linie $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ și $\underline{I}_3$ absorbiți de la sursa trifazată de către consumatorul ce constă din două receptoare, unul cu conexiune în stea și altul cu conexiune în triunghi (fig. 6-29). Tensiunile de linie ale sursei de alimentare sînt simetrice, cu valoarea efectivă 380 V, iar parametrii elementelor de pe fazele receptoarelor au valorile:

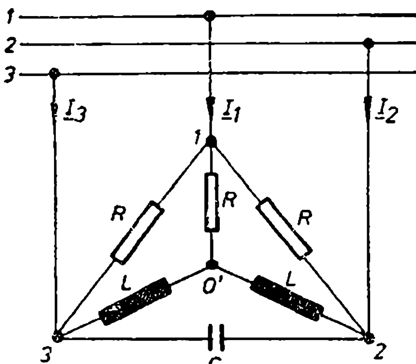


Fig. 6-29. Două receptoare trifazate neechilibrate, conectate în triunghi și în stea, alimentate de la aceeași sursă.

$$R=\omega L=\frac{1}{\omega C}=10\ \Omega.$$

Rezolvare. Impedanțele conectate în stea, respectiv în triunghi, sînt: $\underline{Z}_1=R=10\ \Omega$, $\underline{Z}_2=\underline{Z}_3=\mathrm{j}\omega L=$ $=\mathrm{j}\,10\ \Omega$, $\underline{Z}_{12}=\underline{Z}_{31}=R=10\ \Omega$; $\underline{Z}_{23}=-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}=-\mathrm{j}10\ \Omega$.

Pentru rezolvarea problemei, conexiunea în stea se transfigurează în triunghi. Conform relațiilor de transfigurare (6-63) se obține:

$$\underline{Z}'_{12}=\frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2+\underline{Z}_2\underline{Z}_3+\underline{Z}_3\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3}=10\,(2+\mathrm{j})\ \Omega,$$

$$\underline{Z}'_{23}=\frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2+\underline{Z}_2\underline{Z}_3+\underline{Z}_3\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1}=10\,(-1+\mathrm{j}\,2)\ \Omega,$$

$$\underline{Z}'_{31}=\frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2+\underline{Z}_2\underline{Z}_3+\underline{Z}_3\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}=10\,(2+\mathrm{j})\ \Omega.$$

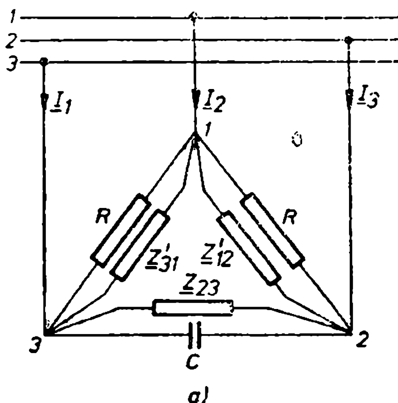
În urma transfigurării se obține circuitul din fig. 6-30, *a*. Impedanțele receptorului echivalent conectat în triunghi (fig. 6-30, *b*) sînt:

$$\underline{Z}_{12e}=\frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}'_{12}}{\underline{Z}_{12}+\underline{Z}'_{12}}=(7+\mathrm{j})\ \Omega,\ \underline{Z}_{23e}=5\,(-1-\mathrm{j}\,3)\ \Omega,\ \underline{Z}_{31e}=(7+\mathrm{j})\ \Omega.$$

Pentru calculul curenților pe cele trei faze (fig. 6-30, *b*), se consideră tensiunea $\underline{U}_{23}$ situată pe axa reală, deci:

$$\underline{U}_{23}=U_{23}=380\ \mathrm{V},\ \underline{U}_{12}=U_{12}e^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}}=380\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathrm{V},$$

$$\underline{U}_{31}=U_{31}e^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}}=380\left(-\frac{1}{2}-\mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathrm{V}.$$



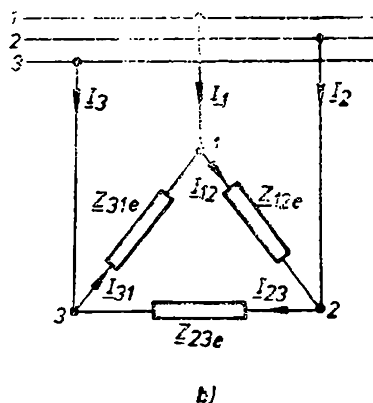


Fig. 6-30. Scheme echivalente.

Curenții de fază pentru receptorul echivalent se calculează cu relațiile (6-56) din care, după înlocuirea valorilor complexe ale tensiunilor și impedanțelor echivalente de mai sus, se obține :

$$\underline{I}_{12}=7,6\,(-2,64+\mathrm{j}\,6,52)\ \mathrm{A},\quad \underline{I}_{23}=7,6\,(-1-\mathrm{j}\,3)\ \mathrm{A},$$

$$\underline{I}_{31}=7,6\,(-4,36-\mathrm{j}\,5,52)\ \mathrm{A}.$$

Cunoscînd curenții de fază, rezultă curenții de linie :

$$\underline{I}_1=\underline{I}_{12}-\underline{I}_{31}=7,6\,(-1,72+\mathrm{j})\ \mathrm{A},\quad \underline{I}_2=\underline{I}_{23}-\underline{I}_{12}=7,6\,(1,64-\mathrm{j}\,9,52)\ \mathrm{A},$$

$$\underline{I}_3=\underline{I}_{31}-\underline{I}_{23}=7,6\,(-3,36-\mathrm{j}\,2,52)\ \mathrm{A}.$$

6.5.5. METODA GENERATORULUI ECHIVALENT DE TENSIUNE

Această metodă, cunoscută și sub denumirea de teorema lui Thévenin, se aplică atunci cînd se cere să se determine curentul dintr-o latură pasivă a rețelei în funcție de parametrii elementelor rețelei, sau atunci cînd se cere să se determine variația curentului din latură în funcție de impedanța laturii respective.

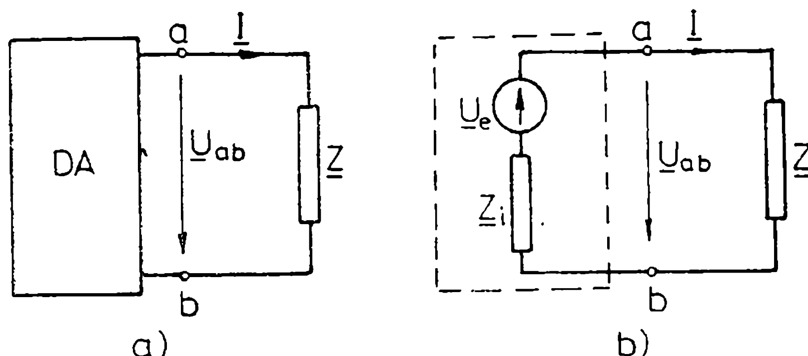


Fig. 6-31. Latura de rețea (*a*) și schema generatorului echivalent de tensiune (*b*).

Se consideră în fig. 6-31, *a* o latură pasivă cuprinsă între bornele *a* și *b* ale unei rețele complexe, avînd impedanța $\underline{Z}$ și fiind parcursă de curentul $\underline{I}$. Tensiunea la borne $\underline{U}_{ab}$ este asigurată de sursele conținute de restul rețelei, ce constituie un dipol activ (DA). Metoda la care ne referim constă în înlocuirea dipolului activ DA printr-un generator echivalent de tensiune, avînd t.e.m. $\underline{U}_e$ și impedanța interioară $\underline{Z}_i$ care, conectat în serie cu latura de impedanță $\underline{Z}$ (fig. 6-31, *b*), asigură prin această latură același curent $\underline{I}$, respectiv aceeași tensiune $\underline{U}_{ab}$, ca și în cazul real. Astfel, curentul din latură se determină cu relația simplă :

$$\underline{I}=\frac{\underline{U}_e}{\underline{Z}+\underline{Z}_i}\cdot \tag{6-64}$$

Evident, pentru calculul curentului $\underline{I}$ cu această relație este necesar să se cunoască $\underline{U}_e$ și $\underline{Z}_i$. În acest sens, se observă că :

$$\underline{U}_e=(\underline{U}_{ab})_{Z=\infty}=(\underline{I}\underline{Z})_{Z=\infty} \tag{6-65}$$

$$\underline{Z}_i=(\underline{Z}_{ab})_{Z=\infty,\ p}=\frac{\underline{U}_e}{\underline{I}_k} \tag{6-66}$$

unde $\underline{I}_k=(\underline{I})_{\underline{Z}=0}$ este curentul din circuitul generatorului echivalent de tensiune cînd bornele a și b sînt scurtcircuitate iar $(\underline{Z}_{ab})_{\underline{Z}=\infty,\,p}$ este impedanța echivalentă între bornele a și b a dipolului pasivizat (t.e.m. ale surselor dipolului considerate egale cu zero).

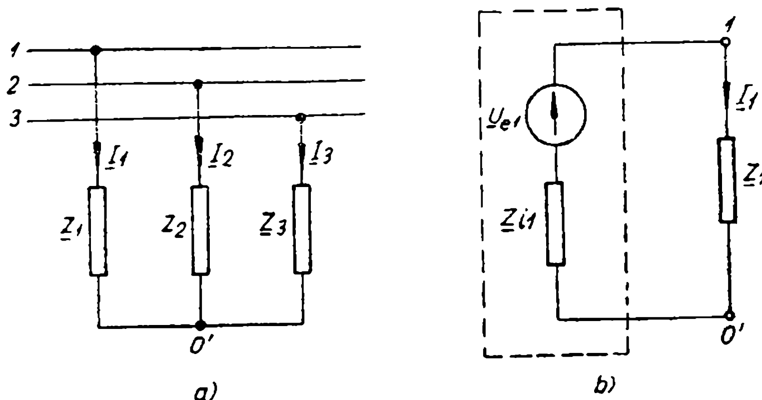


Fig. 6-32. Schema receptorului trifazat conectat în stea (a) și schema generatorului echivalent de tensiune pentru calculul curentului $\underline{I}_1$ (b).

Aplicația 6-7. Se consideră schema reprezentată în fig. 6-32, a a unui receptor trifazat cu fazele conectate în stea. Se cere să se determine curentul $\underline{I}_1$ folosind metoda generatorului echivalent de tensiune. Impedanțele interioare ale sursei se neglijează.

Rezolvare. Latura prin care circulă curentul $\underline{I}_1$ este cuprinsă între punctele *1* și *0'*. Se detașează această latură iar restul rețelei se înlocuiește cu un generator echivalent de tensiune (fig. 6-32, b), avînd t.e.m. $\underline{U}_{e1}$ și impedanța interioară $\underline{Z}_{i1}$, obținîndu-se:

$$\underline{I}_1=\frac{\underline{U}_{e1}}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_{i1}}.$$

În baza relației (6-65) și din fig. 6-33, a, t.e.m. $\underline{U}_{e1}$ este:

$$\underline{U}_{e1}=(\underline{U}_{10'})_{\underline{Z}_1=\infty}=\underline{U}_{12}+\underline{Z}_2\underline{I}_{23}=\underline{U}_{12}+\underline{Z}_2\frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}=\frac{\underline{U}_{12}\underline{Z}_3+(\underline{U}_{12}+\underline{U}_{23})\,\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}=$$

$$=\frac{\underline{U}_{12}\underline{Z}_3-\underline{U}_{31}\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3},$$

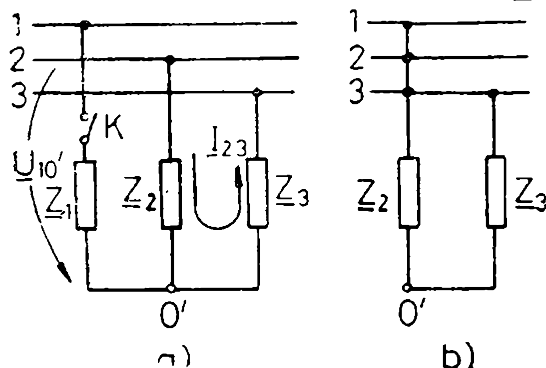


Fig. 6-33. Schema receptorului trifazat conectat în stea cu faza *1* întreruptă (a) și schema de calcul a impedanței dipolului pasivizat (b).

unde s-a ținut seama că $\underline{U}_{12}+\underline{U}_{23}+\underline{U}_{31}=0$.

Impedanța interioară $\underline{Z}_{i1}$ se obține pasivizînd dipolul activ (fig. 6-33, b) și, conform relației (6-66), calculînd impedanța $\underline{Z}_{10'}$ a acestuia, adică:

$$\underline{Z}_{i1}=(\underline{Z}_{10'})_{p,\,\underline{Z}=\infty}=\frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}.$$

Prin înlocuirea lui $\underline{U}_e$ și $\underline{Z}_{i1}$ în expresia lui $\underline{I}_1$, rezultă:

$$\underline{I}_1=\frac{\underline{U}_{12}\underline{Z}_3-\underline{U}_{31}\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2+\underline{Z}_2\underline{Z}_3+\underline{Z}_3\underline{Z}_1},$$

relație care este identică cu (6-53).

6.5.6. METODA COMPONENTELOR SIMETRICE

Metoda componentelor simetrice se aplică pentru calculul rețelelor trifazate la care tensiunile, respectiv curenții, nu formează sisteme simetrice. Pentru ilustrarea metodei, se consideră un receptor trifazat alimentat cu tensiuni de linie $\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$, $\underline{U}_{31}$ nesimetrice, reprezentate în fig. (6-34, *a*).

Se poate demonstra că un sistem trifazat nesimetric de tensiuni (sau curenți) se descompune univoc într-un sistem simetric de succesiune directă, un sistem

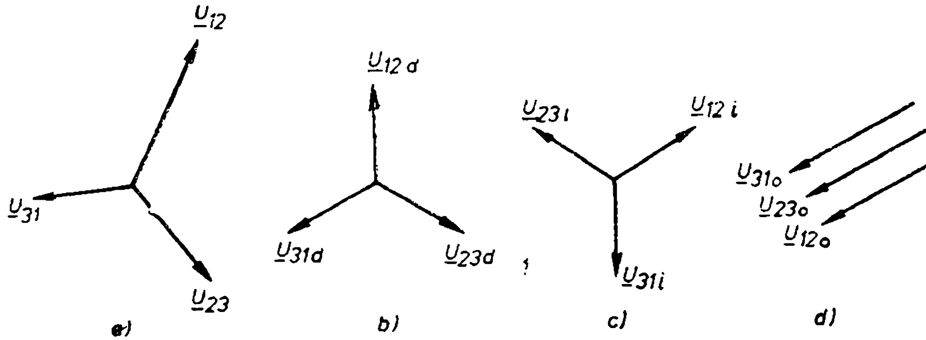


Fig. 6-34. Descompunerea în componente simetrice :
a — sistemul de tensiuni trifazate nesimetrice; *b* — sistemul de tensiuni simetrice directe; *c* — sistemul de tensiuni simetrice inverse; *d* — sistemul de tensiuni omopolare.

simetric de succesiune inversă și un sistem omopolar (fig. 6-34, *b*, *c* și *d*). Așadar, cele trei tensiuni de linie nesimetrice pot fi scrise, ca mărimi complexe, astfel :

$$\begin{aligned}\underline{U}_{12}&=\underline{U}_{12d}+\underline{U}_{12i}+\underline{U}_{120}\\ \underline{U}_{23}&=\underline{U}_{23d}+\underline{U}_{23i}+\underline{U}_{230}\\ \underline{U}_{31}&=\underline{U}_{31d}+\underline{U}_{31i}+\underline{U}_{310}\end{aligned} \qquad (6\text{-}67)$$

unde indicii *d*, *i* și *o* se referă la componentele simetrice de succesiune directă, inversă și omopolare. Sistemul omopolar se caracterizează prin faptul că cele trei tensiuni, corespunzătoare celor trei faze, sînt în fază și egale între ele, adică : $\underline{U}_{120}=\underline{U}_{230}=\underline{U}_{310}=\underline{U}_0$.

Problema ce se pune este următoarea : fiind dat sistemul de tensiuni nesimetrice $\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$, $\underline{U}_{31}$, să se determine componentele simetrice de succesiune directă, inversă și omopolară. Dacă această problemă este rezolvată, receptorul trifazat liniar, alimentat cu sistemul trifazat nesimetric de tensiuni, se înlocuiește prin trei receptoare alimentate :

— primul, cu un sistem trifazat simetric de tensiuni de succesiune directă ($\underline{U}_{12d}$, $\underline{U}_{23d}$, $\underline{U}_{31d}$) ;

— al doilea, cu un sistem trifazat simetric de tensiuni de succesiune inversă ($\underline{U}_{12i}$, $\underline{U}_{23i}$, $\underline{U}_{31i}$) ;

— al treilea, cu un sistem omopolar de tensiuni ($\underline{U}_0$).

Componentele $\underline{U}_0$, $\underline{U}_{12d}$ și $\underline{U}_{12i}$ se determină ținînd seama de cele explicate la paragraful 6.1.1. În cazul la care ne referim, se obțin :

$$\underline{U}_{23d}=\underline{a}^2\underline{U}_{12d},\quad \underline{U}_{31d}=\underline{a}\underline{U}_{12d},\quad \underline{U}_{23i}=\underline{a}\underline{U}_{12i},\quad \underline{U}_{31i}=\underline{a}^2\underline{U}_{12i}. \qquad (6\text{-}68)$$

Înlocuind (6-68) în (6-67), rezultă:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{12}&=\underline{U}_{12d}+\underline{U}_{12i}+\underline{U}_0\\ \underline{U}_{23}&=\underline{a}^2\underline{U}_{12d}+\underline{a}\underline{U}_{12i}+\underline{U}_0\\ \underline{U}_{31}&=\underline{a}\underline{U}_{12d}+\underline{a}^2\underline{U}_{12i}+\underline{U}_0.\end{aligned} \qquad (6\text{-}69)$$

Însumînd relațiile (6-69) și avînd în vedere că:

$$1+\underline{a}+\underline{a}^2=0, \qquad (6\text{-}70)$$

se obține $\underline{U}_{12}+\underline{U}_{23}+\underline{U}_{31}=3\underline{U}_0$, de unde:

$$\underline{U}_0=\frac{1}{3}(\underline{U}_{12}+\underline{U}_{23}+\underline{U}_{31})=0. \qquad (6\text{-}71)$$

De remarcat că atunci cînd suma geometrică a celor trei tensiuni nesimetrice este nulă, cum e cazul tensiunilor de linie la circuitele trifazate, componenta omopolară a acestora este nulă.

Pentru determinarea componentelor simetrice directe, relațiile (6-69) se înmulțesc astfel: a doua cu $\underline{a}$ și a treia cu $\underline{a}^2$ și se obține:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{12}&=\underline{U}_{12d}+\underline{U}_{12i}+\underline{U}_0\\ \underline{a}\underline{U}_{23}&=\underline{a}^3\underline{U}_{12d}+\underline{a}^2\underline{U}_{12i}+\underline{a}\underline{U}_0\\ \underline{a}^2\underline{U}_{31}&=\underline{a}^3\underline{U}_{12d}+\underline{a}^4\underline{U}_{12i}+\underline{a}^2\underline{U}_0.\end{aligned}$$

Cum $\underline{a}^3=1$ și $\underline{a}^4=\underline{a}$, adunînd aceste relații și ținînd seama de (6-70), se obține componenta $\underline{U}_{12d}$ în forma:

$$\underline{U}_{12d}=\frac{1}{3}(\underline{U}_{12}+\underline{a}\underline{U}_{23}+\underline{a}^2\underline{U}_{31}). \qquad (6\text{-}72)$$

Cunoscînd pe $\underline{U}_{12d}$, cu relațiile (6-68) se obțin ușor celelalte două componente: $\underline{U}_{23d}$ și $\underline{U}_{31d}$.

Pentru determinarea componentelor simetrice inverse, se înmulțesc relațiile (6—69) astfel: a doua cu $\underline{a}^2$ și a treia cu $\underline{a}$. Apoi se adună și rezultă:

$$\underline{U}_{12i}=\frac{1}{3}(\underline{U}_{12}+\underline{a}^2\underline{U}_{23}+\underline{a}\underline{U}_{31}). \qquad (6\text{-}73)$$

Cu relațiile (6-68) se obțin ușor celelalte două componente: $\underline{U}_{23i}$ și $\underline{U}_{31i}$.

Corespunzător sistemului de tensiuni cu succesiune directă, pe fazele receptorului se obțin curenții $\underline{I}_{1fd}$, $\underline{I}_{2fd}$ și $\underline{I}_{3fd}$. Sistemul simetric de tensiuni de succesiune inversă produce pe fazele receptorului curenții $\underline{I}_{1fi}$, $\underline{I}_{2fi}$ și $\underline{I}_{3fi}$. În mod asemănător, sistemul omopolar de tensiuni, dacă acestea există, determină curenții $\underline{I}_{1f0}$, $\underline{I}_{2f0}$ și $\underline{I}_{3f0}$. După ce acești curenți au fost determinați,

se aplică principiul superpoziției, rezultînd că tensiunile trifazate nesimetrice $\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$, $\underline{U}_{31}$ produc pe fazele receptorului curenții :

$$\underline{I}_{1f}=\underline{I}_{1fd}+\underline{I}_{1fi}+\underline{I}_{1f0}$$
$$\underline{I}_{2f}=\underline{I}_{2fd}+\underline{I}_{2fi}+\underline{I}_{2f0} \qquad (6\text{-}74)$$
$$\underline{I}_{3f}=\underline{I}_{3fd}+\underline{I}_{3fi}+\underline{I}_{3f0}.$$

În sistemele energetice (linii de transport și rețele de distribuție a energiei electrice), nesimetria tensiunilor și curenților poate avea loc în caz de scurt-circuit între două faze, puneri la pămînt a unei faze, întreruperea unei faze, receptoarele trifazate nu sînt echilibrate (pe faze se conectează receptoare monofazate de puteri diferite) etc.

Ținînd seama de faptul că nesimetria tensiunilor, respectiv a curenților, este cu atît mai mare cu cît componentele inverse și omopolare sînt mai mari, practic se consideră că sistemul de tensiuni (respectiv curenții) este simetric dacă gradul de disimetrie ε_i și gradul de asimetrie ε_h, definiți prin :

$$\varepsilon_i\,\% = \frac{U_i}{U_d}\,100\,; \quad \varepsilon_h\,\% = \frac{U_0}{U_d}\,100, \qquad (6\text{-}75)$$

nu depășesc 5%.

Capitolul 7

CIRCUITE ELECTRICE ÎN REGIM TRANZITORIU

7.1. DEFINIREA REGIMULUI TRANZITORIU

În capitolele precedente s-a studiat regimul permanent de funcționare al circuitelor (rețelelor) electrice. Acest regim corespunde stării în care se stabilesc mărimile din circuit (curenți, tensiuni) după un timp lung, teoretic infinit, scurs de la producerea unei modificări în circuit (conectarea sau deconectarea unei surse, introducerea sau scoaterea unui element din circuit etc.). *Regimul permanent* al circuitelor (rețelelor) de c.c. se caracterizează prin valori constante ale curenților și tensiunilor. Pentru circuitele (rețelele) de c.a., regimul permanent se caracterizează prin valori constante ale amplitudinilor tensiunilor și curenților, respectiv a defazajelor.

Pentru definirea regimului tranzitoriu de funcționare a circuitelor (rețelelor) electrice, se prezintă unele considerațiuni referitoare la conectarea la o sursă de tensiune a unei bobine, respectiv a unui condensator.

Se consideră un circuit, avînd o rezistență R și o inductanță L legate în serie, ce se conectează la momentul $t=0$ la bornele unei surse de c.c. cu t.e.m. U_e constantă și cu rezistența interioară R_i. Curentul din circuit este nul atît înainte cît și imediat după conectare, iar după un timp lung, scurs de la conectare, devine constant:

$$\{i\,(t)\}_{t=0_+}=0, \quad \lim_{t\to\infty} i\,(t)=I=\frac{U_e}{R+R_i}. \qquad (7\text{-}1)$$

S-a notat cu $t=0_+$ momentul imediat următor conectării. Creșterea curentului de la valoarea zero la valoarea I nu are loc instantaneu deoarece, în acest caz și fluxul magnetic creat de curent în bobină s-ar modifica instantaneu de la valoarea zero la Φ. O asemenea variație ar da o derivată în raport cu timpul a fluxului magnetic de valoare infinită și conform legii inducției electromagnetice ar apare o t.e.m. indusă infinit de mare, ceea ce este o imposibilitate, deoarece tensiunea de alimentare a circuitului este finită. Curentul crește treptat de la valoarea zero la valoarea constantă I, într-un interval de timp care practic este foarte scurt, depinzînd de constanta de timp a circuitului. Acest interval de timp se numește *durată tranzitorie*, iar regimul de funcționare al circuitului în acest timp se numește *regim tranzitoriu*.

Fenomenul este analog dacă sursa la care se conectează circuitul este de c.a. În acest caz, amplitudinea curentului din circuit crește în timp de la valoarea zero la valoarea: $I_m = \frac{U_{em}}{Z}$, unde Z este impedanța circuitului (inclusiv sursa).

O situație puțin deosebită are loc cînd circuitul constă dintr-o rezistență R și o capacitate C legate în serie. Considerînd condensatorul în stare inițială descărcat și conectînd circuitul la sursa de c.c. cu t.e.m. U_e și rezistența interioară R_i, în circuit apare un curent electric corespunzător deplasării sarcinilor electrice de încărcare a condensatorului. După ce condensatorul s-a încărcat, deplasarea sarcinilor electrice încetează, respectiv curentul devine nul. Încărcarea condensatorului are loc în timp deoarece tensiunea u_c de la bornele sale nu admite variații bruște. Dacă u_C s-ar modifica brusc, curentul din circuit, $i=\frac{dQ}{dt}=C\frac{du_C}{dt}$, ar deveni infinit, respectiv efectul termic al curentului Ri^2 ar fi infinit de mare, ceea ce contrazice principiul de conservare a energiei. Deci, în acest caz, la momentul $t=0_+$ al conectării la sursă, curentul din circuit este :

$$\{i\,(t)\}_{t=0_+}=I=\frac{U_e}{R+R_i} \text{ și } \lim_{t\to\infty} i\,(t)=0. \tag{7-2}$$

În intervalul de timp cît curentul din circuit se modifică de la valoarea I la zero, circuitul funcționează în regim tranzitoriu.

Dacă sursa la care se conectează circuitul cu RC în serie este de c.a., condensatorul se încarcă și se descarcă alternativ. Aceasta face ca în circuit să existe un curent și după un timp lung scurs de la conectare (curentul permanent), avînd amplitudinea : $I_m=\frac{U_{em}}{Z}$.

Cele prezentate mai sus ilustrează că regimul tranzitoriu de funcționare a circuitelor (rețelelor) electrice se desfășoară în timp și are loc la trecerea de la un regim permanent la altul. În general, stabilirea unei stări staționare de orice natură (electrostatică, electrocinetică, magnetostatică etc.) este întotdeauna precedată de un proces tranzitoriu electromagnetic.

Cu toate că regimul normal de funcționare al circuitelor este cel permanent, în unele cazuri prezintă importanță și studiul regimului tranzitoriu. Se urmărește în special modul de variație în timp a curenților, a tensiunii condensatoarelor etc. De exemplu, regimul tranzitoriu ce are loc la pornirea sau la frînarea unui motor electric are o importanță deosebită atît pentru motorul însuși, cît și pentru mașina (instalația) acționată.

7.2. METODICA DE STUDIU A REGIMURILOR TRANZITORII

7.2.1. ECUAȚIA INTEGRO-DIFERENȚIALĂ

Studiul funcționării unui circuit electric în regim tranzitoriu se referă la găsirea modului de variație în timp a curenților și tensiunilor din circuit pe durata cît are loc acest regim. În acest scop este necesar să se stabilească și să se soluționeze ecuația integro-diferențială referitoare la mărimea în cauză (curent, tensiune etc.). Spre exemplu, se consideră circuitul cu parametrii constanți RLC serie, reprezentat în fig. 7-1 care, la momentul $t=0$, se conectează la o sursă cu tensiunea de borne $u_b\,(t)$, prin închiderea întreruptoru-

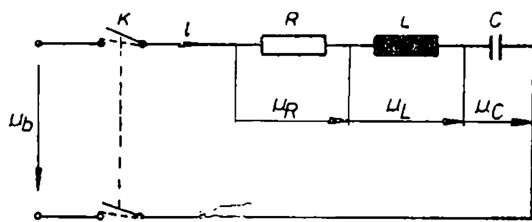


Fig. 7-1. Circuit RLC serie.

lui K. Evident că dacă sursa este de c.c., tensiunea de borne este constantă, $u_b(t)=U_b$, iar dacă sursa este de curent alternativ, atunci $u_b(t)=U_m \sin(\omega t+\alpha)$.

Se urmărește variația în timp a curentului, $i(t)$ începînd din momentul $t=0_+$.

Ecuația integro-diferențială a curentului din circuit se stabilește pe baza egalității dintre tensiunea la borne și suma căderilor de tensiune pe elementele circuitului:

$$u_b(t)=u_R(t)+u_L(t)+u_C(t),$$

în care se înlocuiesc:

$$u_R(t)=Ri(t), \quad u_L(t)=L\frac{di(t)}{dt}, \quad u_C(t)=\frac{1}{C}\int i(t)\,dt+\frac{Q_0}{C}$$

și se obține:

$$L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)+\frac{1}{C}\int i(t)\,dt+\frac{Q_0}{C}=u_b(t), \tag{7-3}$$

unde $\frac{Q_0}{C}$ este o constantă de integrare.

Ecuația integro-diferențială (7-3) este liniară, cu coeficienți constanți și neomogenă. Rezolvînd această ecuație se obține curentul ca funcție de timp, $i(t)$.

Soluția generală a ecuației neomogene (7-3) are două componente și anume:

— soluția particulară a ecuației neomogene care reprezintă componenta forțată (permanentă) a curentului;

— soluția generală a ecuației omogene care, în cazul de față reprezintă componenta liberă (tranzitorie) a curentului, adică:

$$i(t)=i_p(t)+i_{tr}(t) \tag{7-4}$$

Expresiile acestor două soluții se stabilesc pe baza cunoștințelor referitoare la rezolvarea ecuațiilor diferențiale, prezentate în cadrul disciplinei de matematici superioare.

7.2.2. CONDIȚII INIȚIALE

O atenție deosebită trebuie acordată determinării constantelor de integrare ce intervin în soluția generală a ecuației integro-diferențiale neomogene (7-3). Acestea se determină pe baza condițiilor inițiale, adică a valorilor pe care le obțin curentul din circuit, tensiunile la bornele unora dintre elemente etc., la momentul $t=0_+$ (imediat după conectarea circuitului). În unele cazuri este necesar să se folosească și condițiile finale, corespunzătoare la $t=\infty$.

Numărul de condiții inițiale ce se pun trebuie să fie egal cu numărul de constante de integrare ce trebuie determinate. Altfel spus, prin punerea con-

dițiilor inițiale, se stabilește un sistem de ecuații din care se determină constantele de integrare.

Pentru exemplificare, ne referim la ecuația integro-diferențială (7-3), stabilită pentru circuitul RLC serie conectat la sursa cu tensiunea de borne $u_b(t) = U_b$ (tensiune continuă). Soluția acestei ecuații are două componente, $i_p(t)$ și $i_{tr}(t)$ (relația 7-4), ce trebuie determinate fiecare în parte.

Curentul permanent ce se stabilește în circuit după un timp lung scurs de la conectarea circuitului la tensiunea continuă este nul: $i_p(t)=0$, deoarece circuitul conține un condensator legat în serie cu celelalte elemente. Ca urmare, curentul din circuit are numai componenta tranzitorie: $i(t)=i_{tr}(t)$. Curentul permanent $i_p(t)=0$ fiind soluția particulară a ecuației integro-diferențiale neomogene, prin înlocuirea sa în ecuație rezultă valoarea constantei de integrare $\frac{Q_0}{C} = U_b$.

Componenta tranzitorie (liberă) a curentului se găsește rezolvînd ecuația omogenă:

$$L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)\,\mathrm{d}t + \frac{Q_0}{C} = 0 \tag{7-5}$$

în care, deși se referă la curentul tranzitoriu, nu s-a pus la curent indicile „tr", deoarece $i_{tr}(t)=i(t)$.

Derivînd în raport cu timpul ecuația (7-5), rezultă:

$$L\frac{\mathrm{d}^2i(t)}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}i(t)=0. \tag{7-6}$$

Soluția unei astfel de ecuații diferențiale omogene este de forma:

$$i(t)=I_1e^{p_1t}+I_2e^{p_2t}, \tag{7-7}$$

în care

p_1, p_2 sînt rădăcinile ecuației caracteristice;
I_1, I_2 — constante de integrare ce se determină din condițiile inițiale.

Ecuația caracteristică fiind:

$$Lp^2+Rp+\frac{1}{C}=0 \tag{7-8}$$

rezultă

$$p_{1,2}=-\Delta_1\pm\Delta_2, \tag{7-9}$$

unde

$$\Delta_1=\frac{R}{2L}, \quad \Delta_2=\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}. \tag{7-10}$$

Condițiile inițiale care se pun pentru determinarea constantelor de integrare I_1 și I_2 sînt:

Prima condiție inițială: la momentul $t=0_+$, cînd are loc conectarea circuitului la tensiunea de borne U_b, curentul din circuit este nul deoarece în circuit există o bobină care nu permite variații bruște ale curentului. Din (7-7) rezultă:

$$i(0_+)=0=I_1+I_2. \tag{7-11}$$

A doua condiție inițială: la momentul $t=0_+$, tensiunea aplicată la bornele circuitului este egală și de semn opus cu t.e.m. indusă în bobină, adică

$$U_b=\left\{L\frac{di(t)}{dt}\right\}_{t=0_+}=p_1I_1+p_2I_2. \tag{7-12}$$

Din ecuațiile (7-11) și (7-12), rezultă constantele de integrare:

$$I_1=\frac{U_b}{2\Delta_2};\quad I_2=-\frac{U_b}{2\Delta_2}, \tag{7-13}$$

cu care soluția (7-7) devine:

$$i(t)=\frac{U_b}{2\Delta_2}e^{\Delta_1 t}\left(e^{\Delta_2 t}-e^{-\Delta_2 t}\right), \tag{7-14}$$

unde s-a ținut seama de (7-9).

7.2.3. NATURA RĂDĂCINILOR ECUAȚIEI CARACTERISTICE

Referindu-ne la ecuația caracteristică de gradul doi (7-8), dependent de valorile parametrilor R, L și C ai circuitului se disting trei moduri de variație în timp a curentului în regim tranzitoriu.

Cazul a: $R>2\sqrt{\frac{L}{C}}$ — *regim aperiodic*; rădăcinile p_1 și p_2 ale ecuației caracteristice sînt reale și distincte (Δ_2 mărime reală).

Cazul b: $R=2\sqrt{\frac{L}{C}}$ — *regim aperiodic critic*; rădăcinile ecuației caracteristice sînt duble: $p_1=p_2=-\Delta_1$ ($\Delta_2=0$).

Cazul c: $R<2\sqrt{\frac{L}{C}}$ — *regim oscilator amortizat*; rădăcinile p_1 și p_2 sînt complex conjugate (Δ_2 mărime imaginară).

În fig. 7-2, *a* este arătat modul de variație în timp a curentului din circuit pentru cazurile *a* și *b*, iar în fig. 7-2, *b* pentru cazul *c*.

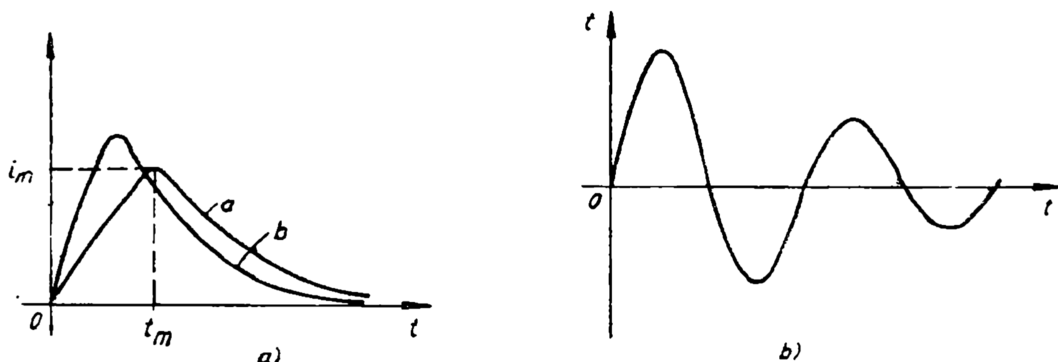


Fig. 7-2. Variația în timp a curentului:
a — aperiodică (*a*) și aperiodică critică (*b*); *b* — oscilator amortizată.

În regim oscilator amortizat (cazul c) se poate scrie $\Delta_2 = j\omega$, unde $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$, cu care relația (7-14) devine:

$$i(t) = \frac{U_b}{\omega} e^{-\Delta_1 t} \left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right) = \frac{U_b}{\omega} e^{-\Delta_1 t} \sin \omega t. \qquad (7\text{-}15)$$

Se remarcă faptul că amplitudinea acestei funcții sinusoidale scade în timp, devenind nulă pentru $t = \infty$. Amortizarea este cu atît mai mare cu cît $\Delta_1 = \frac{R}{2L}$ are valoarea mai mare. Pentru $R = 0$, amortizarea este nulă, adică amplitudinea oscilațiilor curentului din circuit este constantă.

Aplicația 7-1. Bobina de excitație a unei mașini electrice se conectează la o sursă de c.c. cu tensiunea la borne U_b. Să se determine variația în timp a curentului din circuit.

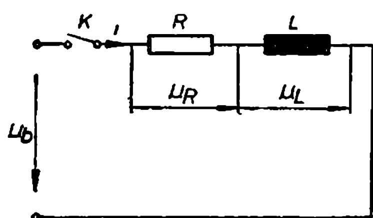
Rezolvare. Bobina considerată are inductanța L și rezistența R în serie (fig. 7-3).

În timpul procesului tranzitoriu ce are loc după închiderea întreruptorului K, curentul din circuit crește de la valoarea zero la valoarea corespunzătoare regimului permanent: $I = \frac{U_b}{R}$. Se obține următoarea ecuație diferențială a curentului din circuit:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = U_b, \qquad (7\text{-}16)$$

care arată că tensiunea aplicată la bornele circuitului este egală cu suma căderilor de tensiune pe elementele circuitului legate în serie.

Fig. 7-3. Schema electrică a bobinei.



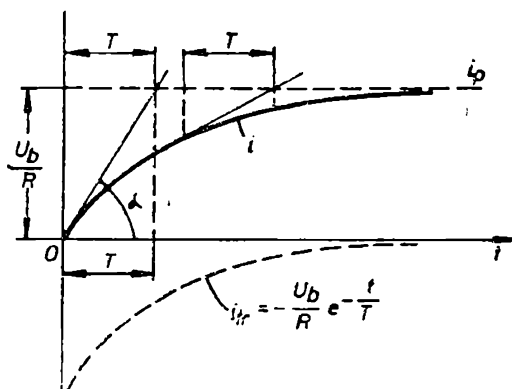


Fig. 7-4. Variația în timp a curentului la conectarea bobinei la o sursă de c.c.

Soluția generală a ecuației (7-16) are două componente: componenta permanentă și componenta tranzitorie: $i(t) = i_p(t) + i_{tr}(t)$. Componenta permanentă este soluția particulară a ecuației diferențiale neomogene, adică $i_p(t) = I = \frac{U_b}{R}$. Componenta tranzitorie (liberă) este soluția generală a ecuației omogene:

$$L \frac{di_{tr}(t)}{dt} + Ri_{tr}(t) = 0,$$

avînd forma: $i_{tr}(t) = I_0 e^{pt} = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$, unde I_0 este constanta de integrare. Deci, curentul din circuit este:

$$i(t) = \frac{U_b}{R} + I_0 e^{-\frac{t}{T}}, \qquad (7\text{-}17)$$

unde

$$T = \frac{L}{R} \qquad (7\text{-}18)$$

este *constanta electromagnetică de timp* a circuitului.

Constanta de integrare I_0 se determină din condiţia iniţială şi anume, la $t=0_+$ avem $i(0_+)=0$, adică :

$$i(0_+)=0=\frac{U_b}{R}+I_0\,;\quad I_0=-\frac{U_b}{R}$$

cu care relaţia (7-17) devine:

$$i(t)=\frac{U_b}{R}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}\right). \tag{7-19}$$

În fig. 7-4 este reprezentată curba exponenţială de variaţie în timp a curentului din circuit şi a componentelor sale permanentă şi tranzitorie. Se poate dovedi uşor că tangenta în origine sau în oricare alt punct la curba exponenţială determină pe asimptotă un segment care, măsurat la scara timpului, este egal cu constanta de timp T a circuitului.

În ceea ce priveşte durata procesului tranzitoriu, teoretic aceasta este infinită. Practic se consideră că procesul tranzitoriu s-a încheiat atunci cînd curentul din circuit diferă cu mai puţin de 5% faţă de curentul de regim permanent. Timpul t_1 corespunzător atingerii acestei situaţii rezultă astfel:

$$0{,}95=\frac{i_1}{I}=\frac{\frac{U_b}{R}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t_1}{T}}\right)}{\frac{U_b}{R}}=1-\mathrm{e}^{-\frac{t_1}{T}}\,;$$

$$t_1=T\ln\frac{1}{0{,}05}\simeq 3T. \tag{7-20}$$

Deci, după scurgerea unui timp de (3...4) T procesul tranzitoriu este practic încheiat.

Aplicaţia 7-2. Să se studieze regimul tranzitoriu ce are loc la conectarea unui circuit RC serie la o tensiune de borne sinusoidală.

Rezolvare. Se consideră tensiunea sinusoidală $u_b=U_{bm}\sin(\omega t+\alpha)$ aplicată la bornele circuitului reprezentat în fig. 7-5. Se urmăreşte variaţia în timp a curentului din circuit şi a tensiunii u_C la bornele condensatorului, după închiderea la momentul $t=0$ a întreruptorului K, în starea iniţială condensatorul fiind descărcat.

Ecuaţia integro-diferenţială a curentului din circuit se obţine din: $u_R+u_C=u_b$, adică:

$$Ri(t)+\frac{1}{C}\int i(t)\,\mathrm{d}t+\frac{Q_0}{C}=U_{bm}\sin(\omega t+\alpha). \tag{7-21}$$

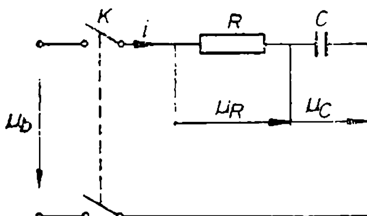


Fig. 7-5. Circuit RC serie.

Soluţia generală a acestei ecuaţii are două componente: $i(t)=i_p(t)+i_{tr}(t)$, unde, pentru circuitul considerat, componenta permanentă este: $i_p(t)=I_m\sin(\omega t+\alpha-\varphi)$, în care

$$I_m=\frac{U_{bm}}{\sqrt{R^2+\left(-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}=\frac{U_{bm}}{Z}\,,\ \mathrm{tg}\,\varphi=\frac{-\frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Deoarece $i_p(t)$ este o soluţie particulară a ecuaţiei integro-diferenţiale neomogene (7-21), prin înlocuirea acestei soluţii în ecuaţie rezultă $\frac{Q_0}{C}=0$.

Componenta tranzitorie a curentului este soluţia generală a ecuaţiei omogene:

$$Ri_{tr}(t)+\frac{1}{C}\int i_{tr}(t)\,dt=0$$

care, prin derivare în raport cu timpul, devine:

$$R\frac{di_{tr}}{dt}+\frac{1}{C}i_{tr}=0.$$

Soluţia generală a acestei ecuaţii este: $i_{tr}(t)=I_0 e^{-\frac{t}{T}}$, unde I_0 este constanta de integrare, iar

$$T=RC \tag{7-22}$$

este constanta electromagnetică de timp a circuitului.

Astfel, rezultă:

$$i(t)=I_m\sin(\omega t+\alpha-\varphi)+I_0 e^{-\frac{t}{T}}. \tag{7-23}$$

Constanta de integrare I_0 se determină din condiţia iniţială şi anume: la $t=0_+$, $i(0_+)=\frac{u_b(0)}{R}$, adică curentul din circuit în momentul închiderii întreruptorului K depinde de valoarea tensiunii la borne în acel moment şi de rezistenţa electrică a circuitului. Dacă $R=0$ şi $u_b(0)\neq 0$, rezultă $i(0_+)=\infty$, adică curentul obţine o valoare foarte mare în momentul iniţial, ceea ce în practică trebuie evitat. Din condiţia iniţială, rezultă:

$$I_m\sin(\alpha-\varphi)+I_0=\frac{U_{bm}}{R}\sin\alpha,$$

$$I_0=\frac{U_{bm}}{R}\sin\alpha-I_m\sin(\alpha-\varphi)=I_m\,\mathrm{tg}\,\varphi\cos(\alpha-\varphi).$$

Cu acestea se obţine următoarea expresie de variaţie în timp a curentului total din circuit:

$$i(t)=I_m\{\sin(\omega t+\alpha-\varphi)+\mathrm{tg}\,\varphi\cos(\alpha-\varphi)\,e^{-\frac{t}{T}}\}. \tag{7-24}$$

Tensiunea la condensator are, ca şi curentul din circuit, două componente: $u_C(t)=u_{Cp}(t)+u_{Ctr}(\,)$, adică:

$$u_{Cp}(t)=\frac{1}{C}\int i_p(t)\,dt=-\frac{I_m}{\omega C}\cos(\omega t+\alpha-\varphi), \tag{7-25}$$

$$u_{Ctr}(t)=\frac{1}{C}\int i_{tr}(t)\,dt=\frac{I_m}{\omega C}\cos(\alpha-\varphi)\,e^{-\frac{t}{T}}, \tag{7-26}$$

unde s-a ţinut seama că $T=RC$ şi $\mathrm{tg}\,\varphi=-\frac{1}{\omega RC}$.

În continuare se pot analiza anumite situaţii particulare. De exemplu, dacă se consideră $\alpha=\varphi$, din relaţiile de mai sus se obţin:

$$i_p(t)=I_m\sin\omega t,\quad i_{tr}(t)=I_m\,\mathrm{tg}\,\varphi\,e^{-\frac{t}{T}},$$

$$i(t)=I_m(\sin\omega t+\mathrm{tg}\,\varphi\,e^{-\frac{t}{T}}),$$

$$u_{Cp}(t)=U_{bm}\sin\varphi\cos\omega t,\quad u_{Ctr}(t)=-U_{bm}\sin\varphi\,e^{-\frac{t}{T}},$$

$$u_C(t)=U_{bm}\sin\varphi(\cos\omega t-e^{-\frac{t}{T}}).$$

Variaţia în timp a acestor mărimi este reprezentată în fig. 7-6.

Aplicația 7-3. Se consideră un condensator de capacitate C, încărcat cu sarcina electrică Q_1 și avînd între armături tensiunea U_{C1}. La momentul $t=0$ se închide întreruptorul K și condensatorul se descarcă peste rezistența R (fig. 7-7). Să se determine modul de variație în timp a curentului de descărcare a condensatorului, a tensiunii condensatorului și să se facă un bilanț al energiilor ce intervin.

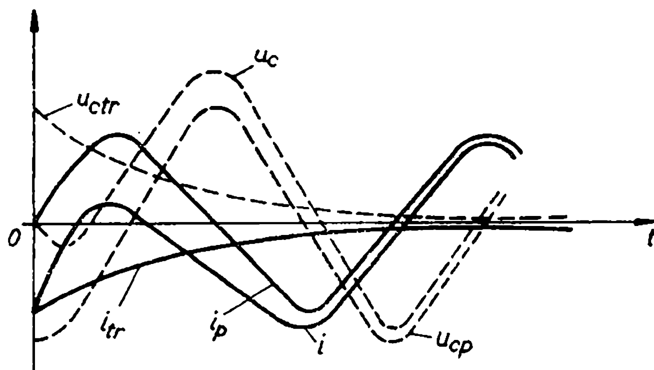


Fig. 7-6. Variația în timp a curentului și a tensiunii condensatorului cînd tensiunea aplicată la borne este sinusoidală.

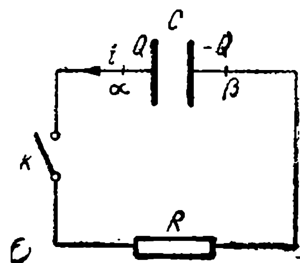


Fig. 7-7. Descărcarea condensatorului pe un rezistor.

Rezolvare. Curentul din circuit se exprimă prin relația : $i=-\frac{dQ}{dt}$, unde s-a pus semnul minus pentru a rezulta valoarea pozitivă a curentului, deoarece $dQ<0$ (sarcina condensatorului scade în timp), iar $dt>0$.

Ecuația diferențială pentru sarcina electrică a condensatorului rezultă din : $u_C=u_R$, adică $\frac{Q}{C}=-R\frac{dQ}{dt}$, sau

$$R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=0. \tag{7-27}$$

Soluția acestei ecuații este de forma :

$$Q(t)=Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}, \tag{7-28}$$

unde Q_0 este constanta de integrare ce se determină din următoarea condiție inițială : la $t=0_+$, $Q=Q_1$, adică $Q(0_+)=Q_1=Q_0$. Deci,

$$Q(t)=Q_1 e^{-\frac{t}{T}}, \tag{7-29}$$

unde $T=RC$ este constanta electromagnetică de timp a circuitului.

Pentru curentul din circuit rezultă variația exponențială :

$$i(t)=-\frac{dQ(t)}{dt}=\frac{Q_1}{RC}e^{-\frac{t}{T}}=\frac{U_1}{R}e^{-\frac{t}{T}}, \tag{7-30}$$

iar pentru tensiunea la bornele condensatorului se obține :

$$u_C(t)=\frac{Q(t)}{C}=U_1 e^{-\frac{t}{T}}, \tag{7-31}$$

unde s-a introdus $U_1=\frac{Q_1}{C}$. În fig. 7-8 sînt reprezentate exponențialele de variație în timp a curentului de descărcare a condensatorului și a tensiunii la bornele sale.

În ceea ce privește bilanțul energiilor, conform principiului de conservare, energia înmagazinată în cîmpul electric al condensatorului se transformă integral în energie termică, prin efect J—L, în rezistența R. Se poate scrie:

$$W_{e1} = \frac{1}{2} Q_1 U_1, \tag{7-32}$$

$$W_J = \int_0^\infty Ri^2(t)\,dt = \frac{U_1^2}{R}\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{T}}\,dt = \frac{U_1^2}{R}\,\frac{T}{2} = \frac{U_1^2 RC}{2R} = \frac{1}{2} Q_1 U_1. \tag{7-33}$$

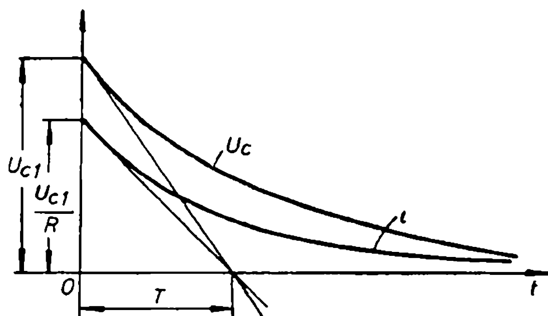


Fig. 7-8. Variația în timp a curentului și tensiunii la descărcarea condensatorului.

Deci, energia înmagazinată în cîmpul electric este egală cu energia termică rezultată prin descărcarea condensatorului pe rezistența R: $W_{e1} = W_J$.

Capitolul 8

CIRCUITE ELECTRICE ÎN REGIM NESINUSOIDAL

Studiul regimurilor de funcţionare a circuitelor electrice în care curenţii şi tensiunile sînt funcţii periodice nesinusoidale de timp prezintă o importanţă tehnică şi teoretică deosebită. Curenţii sau alte mărimi electrice şi magnetice nesinusoidale pot apărea atît în circuitele electrice de forţă, cît şi în circuitele de comandă sau de telecomunicaţii. De exemplu, în circuitele de forţă ce conţin elementele redresoare (diode semiconductoare, tiristoare comandate, redresoare cu mercur etc.), deşi tensiunile de alimentare de la reţea (sursă) sînt sinusoidale, curenţii ce apar sînt cu variaţie nesinusoidală în timp.

Tensiunile şi curenţii nesinusoidali au în anumite situaţii efecte dăunătoare. Astfel, cuplul electromagnetic şi factorul de putere al motoarelor de c.a. sînt mai mici în regim nesinusoidal faţă de regimul sinusoidal. În regim nesinusoidal se pot produce rezonanţe de tensiune şi curent, ce pot duce la străpungerea izolaţiei conductoarelor etc.

În cele ce urmează se prezintă cîteva dintre problemele principale referitoare la funcţionarea circuitelor electrice liniare în regim nesinusoidal.

8.1. DESCOMPUNEREA ÎN ARMONICI A MĂRIMILOR PERIODICE NESINUSOIDALE

Studiul comportării circuitelor electrice liniare alimentate cu tensiune la borne nesinusoidală se poate face aplicînd principiul superpoziţiei. Tensiunea nesinusoidală se descompune în componente cu variaţie sinusoidală, numite armonici. Apoi, pentru fiecare componentă sinusoidală a tensiunii se determină cîte un curent sinusoidal şi, în continuare, însumînd aceşti curenţi se obţine curentul total din circuit. O astfel de descompunere în componente sinusoidale a mărimilor periodice nesinusoidale se numeşte *analiză spectrală*, sau *analiză armonică* (dezvoltarea în serie Fourier).

Se consideră tensiunea $u(t)$ ce acţionează la bornele unui circuit cu variaţie periodică nesinusoidală, adică

$$u(t)=u(t+kT), \qquad (8\text{-}1)$$

unde $T=\frac{2\pi}{\omega}$ este perioada, iar $k=1, 2, 3, \ldots$ O asemenea funcție periodică nesinusoidală se dezvoltă în serie Fourier sub forma:

$$u(t)=U_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}(A_\nu \sin \nu\omega t+B_\nu \cos \nu\omega t), \tag{8-2}$$

unde U_0 este componenta continuă (constantă) a tensiunii, iar A_ν și B_ν sînt coeficienții termenilor de ordinul ν ai dezvoltării în serie Fourier.

Dezvoltarea în serie Fourier exprimată prin relația (8-2) poate fi scrisă și sub forma:

$$u(t)=U_0+\sum_{\nu=1}^{\infty} U_{\nu m} \sin(\nu\omega t+\alpha_\nu), \tag{8-3}$$

unde

$$U_{\nu m}=\sqrt{A_\nu^2+B_\nu^2} \text{ și } \alpha_\nu=\operatorname{arctg}\frac{B_\nu}{A_\nu} \tag{8-4}$$

sînt amplitudinea, respectiv faza inițială, a armonicii de ordinul ν.

Componenta armonică corespunzătoare la $\nu=1$ se numește *fundamentală* (armonica de bază), avînd frecvența $f=\frac{\omega}{2\pi}$, iar componentele corespunzătoare la $\nu=2, 3, \ldots$ se numesc *armonici superioare*. În aplicațiile practice, numărul armonicilor superioare semnificative este limitat, astfel că dezvoltarea în serie Fourier a mărimilor periodice nesinusoidale conține un număr finit de termeni.

Problema care se pune la dezvoltarea în serie Fourier este determinarea coeficienților U_0, A_ν, și B_ν, respectiv a amplitudinii $U_{\nu m}$ și a fazei inițiale α_ν. La rezolvarea acestei probleme pot apare următoarele două situații:

— curba $u(t)$ este cunoscută analitic;

— curba $u(t)$ este dată grafic (prin înregistrare).

Corespunzător acestor situații, pentru determinarea coeficienților (amplitudinilor) se aplică metoda analitică sau metode grafice.

8.1.1. METODA ANALITICĂ

Metoda analitică se bazează pe următoarele relații evidente:

$$\int_0^T \sin \nu\omega t\, dt=0, \quad \int_0^T \cos \nu\omega t\, dt=0,$$

$$\int_0^T \sin \nu\omega t \sin \lambda\omega t\, dt=\frac{1}{2}\int_0^T[\cos(\nu-\lambda)\omega t-\cos(\nu+\lambda)\omega t]\, dt=\begin{cases}0 \text{ pt. } \nu\neq\lambda\\ \frac{T}{2} \text{ pt. } \nu=\lambda\end{cases}$$

$$\int_0^T \cos \nu\omega t \cos \lambda\omega t\, dt=\frac{1}{2}\int_0^T[\cos(\nu-\lambda)\omega t+\cos(\nu+\lambda)\omega t]\, dt=\begin{cases}0 \text{ pt. } \nu\neq\lambda\\ \frac{T}{2} \text{ pt. } \nu=\lambda\end{cases}$$

$$\int_0^T \sin \nu\omega t \cos \lambda\omega t\, dt=\frac{1}{2}\int_0^T[\sin(\nu-\lambda)\omega t+\sin(\nu+\lambda)\omega t]\, dt=0,$$

cu care, din relaţia (8-2) rezultă :

$$\int_0^T u(t)\, dt = U_0 T,$$

$$\int_0^T u(t) \sin \nu\omega t\, dt = \frac{1}{2} A_\nu T, \quad \int_0^T u(t) \cos \nu\omega t\, dt = \frac{1}{2} B_\nu T.$$

Astfel, se obţin :

$$U_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\, dt, \tag{8-5}$$

$$A_\nu = \frac{2}{T}\int_0^T u(t) \sin \nu\omega t\, dt, \quad B_\nu = \frac{2}{T}\int_0^T u(t) \cos \nu\omega t\, dt.$$

Faţă de cazul general al dezvoltării în serie Fourier de mai sus, în aplicaţii pot apare şi unele situaţii particulare, după cum urmează :

Dacă funcţia $u(t)$ este impară, adică $u(t) = -u(-t)$, din relaţiile (8-5) rezultă : $U_0=0$ şi $B_\nu=0$, iar dezvoltarea în serie Fourier obţine forma :

$$u(t) = \sum_\nu U_{\nu m} \sin \nu\omega t. \tag{8-6}$$

Dacă funcţia $u(t)$ este pară, adică $u(t) = u(-t)$, atunci $A_\nu=0$ şi dezvoltarea în serie Fourier obţine forma :

$$u(t) = U_0 + \sum_\nu U_{\nu m} \cos \nu\omega t. \tag{8-7}$$

Dacă funcţia $u(t)$ este simetrică, adică $u(t) = -u\left(t \pm \frac{T}{2}\right)$, rezultă : $U_0=0$, iar amplitudinile de ordin par A_2, A_4, A_6, ..., B_2, B_4, B_6, ... sînt nule. În această situaţie $u(t)$ conţine numai armonicile impare.

Ca exemplu, se consideră o funcţie periodică, nesinusoidală, $u(t)$, impară şi simetrică, care satisface condiţiile : $u(t) = -u(-t)$ şi $u(t) = -u\left(t \pm \frac{T}{2}\right)$. Prin descompunerea ei în armonici, rezultă numai armonicile de ordin impar în sinus :

$$u(t) = \sum_\nu U_{\nu m} \sin \nu\omega t; \quad \nu = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots$$

În fig. 8-1 sînt reprezentate prin linii pline armonica de bază (fundamentala) şi armonica de ordinul 3 a dezvoltării în serie Fourier exprimată prin această relaţie. Prin linie întreruptă este reprezentată suma acestor două componente.

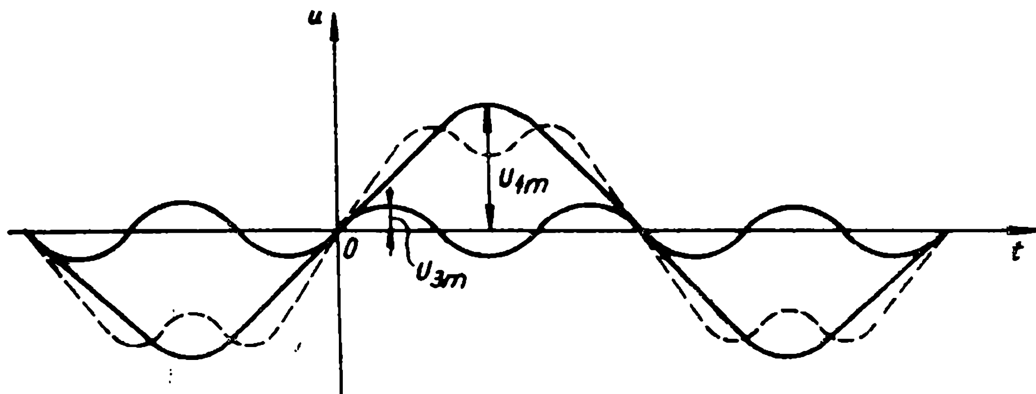


Fig. 8-1. Fundamentala şi armonica de ordinul 3 a tensiunii periodice.

Aplicația 8-1. Să se descompună în armonici tensiunea periodică nesinusoidală $u(t)$ cu variație în timp sub formă de impulsuri dreptunghiulare (fig. 8-2) avînd perioada $T = \frac{2\pi}{\omega} = a + b$.

Rezolvare. Tensiunea $u(t)$ se dezvoltă în serie Fourier conform relației (8-2).

$$u(t) = U_0 + \sum_{\nu} (A_\nu \sin \nu\omega t + B_\nu \cos \nu\omega t),$$

Fig. 8-2. Variația sub formă de impulsuri dreptunghiulare a tensiunii.

unde U_0, A_ν, B_ν sînt mărimi ce trebuie determinate. Din relațiile (8-5) se obțin :

$$U_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^a U\,dt = \frac{a}{T}U,$$

$$A_\nu = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\sin\nu\omega t\,dt = \frac{2}{T}\int_0^a U\sin\nu\omega t\,dt = \frac{2U}{T\nu\omega}(1-\cos\nu\omega a) =$$

$$= \frac{U}{\pi\nu}\left(1-\cos\nu\frac{2\pi a}{T}\right),$$

$$B_\nu = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\cos\nu\omega t\,dt = \frac{2}{T}\int_0^a U\cos\nu\omega t\,dt = \frac{2U}{T\nu\omega}\sin\nu\omega a = \frac{U}{\pi\nu}\sin\nu\frac{2\pi a}{T},$$

de unde se determină A_1, B_1, A_2, B_2, ... , dînd lui ν valorile corespunzătoare.

8.1.2. METODA GRAFICĂ THOMSON-RUNGE

Prin această metodă se determină amplitudinile primelor zece armonici ale dezvoltării în serie Fourier, care sînt practic suficiente pentru a reda funcția periodică nesinusoidală.

Perioada T de variație a mărimii nesinusoidale se împarte în $2K = 24$ intervale egale, timpul corespunzător fiecărui interval fiind Δt (fig. 8-3), deci :

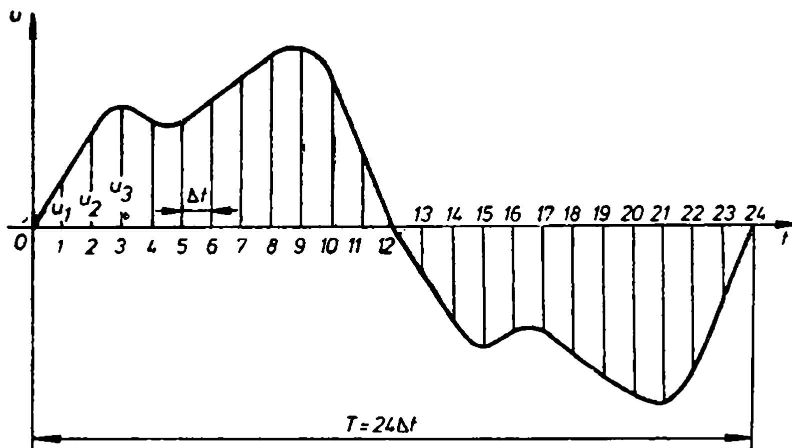


Fig. 8-3. Figură explicativă pentru descompunerea în armonici prin metoda grafică.

$$T=2K\Delta t=24\Delta t \tag{8-8}$$

Prin aceasta, integralele (8-5) se transformă în următoarele sume:

$$U_0=\frac{1}{2K\Delta t}\sum_{n=1}^{24} u_n\Delta t=\frac{1}{24}\sum_{n=1}^{24} u_n$$

$$A_\nu=\frac{2}{2K\Delta t}\sum_{n=1}^{24} u_n\left(\sin\nu\frac{2\pi}{2K\Delta t}n\Delta t\right)\Delta t=\frac{1}{12}\sum_{n=1}^{24} u_n\sin\nu\frac{n\pi}{12} \tag{8-9}$$

$$B_\nu=\frac{2}{2K\Delta t}\sum_{n=1}^{24} u_n\left(\cos\nu\frac{2\pi}{2K\Delta t}n\Delta t\right)\Delta t=\frac{1}{12}\sum_{n=1}^{24} u_n\cos\nu\frac{n\pi}{12}$$

unde u_n este valoarea tensiunii $u(t)$ în dreptul diviziunii n.

În cazul cînd $u(t)$ este o curbă periodică, nesinusoidală și simetrică (fig. 8-3), pentru care $u(t)=-u\left(t\pm\frac{T}{2}\right)$, dezvoltarea în serie Fourier conține numai armonicile de ordin impar în sinus și cosinus. De asemenea, ținînd seama că la $\frac{T}{2}$ corespund $K=12$ diviziuni, rezultă:

$$u_n=-u_{n\pm K},\ \sin\nu\frac{n\pi}{K}=-\sin\nu\frac{(n\pm K)\pi}{K},\ \cos\nu\frac{n\pi}{K}=-\cos\nu\frac{(n\pm K)\pi}{K} \tag{8-10}$$

Ținînd seama de relațiile (8-10) și avînd în vedere că $u_0=u_{12}=0$, sumele din relațiile (8-9) devin:

$$U_0=0,\ A_\nu=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{11} u_n\sin\nu\frac{n\pi}{12},\ B_\nu=\frac{1}{6}\sum_{\nu=1}^{11} u_n\cos\nu\frac{n\pi}{12}\cdot \tag{8-11}$$

Pentru $\nu=1$, se obține:

$$A_1=\frac{1}{6}(u_1\sin 15^\circ+u_2\sin 30^\circ+u_3\sin 45^\circ+u_4\sin 60^\circ+u_5\sin 75^\circ+u_6\sin 90^\circ+$$

$$+u_7\sin 75^\circ+u_8\sin 60^\circ+u_9\sin 45^\circ+u_{10}\sin 30^\circ+u_{11}\sin 15^\circ)=$$

$$=(u_1+u_{11})\frac{\sin 15^\circ}{6}+(u_2+u_{10})\frac{\sin 30^\circ}{6}+(u_3+u_9)\frac{\sin 45^\circ}{6}+(u_4+u_8)\frac{\sin 60^\circ}{6}+$$

$$+(u_5+u_7)\frac{\sin 75^\circ}{6}+u_6\frac{\sin 90^\circ}{6}\cdot$$

Introducînd notațiile:

$$S_1=u_1+u_{11},\ S_2=u_2+u_{10},\ S_3=u_3+u_9,$$

$$S_4=u_4+u_8,\ S_5=u_5+u_7,\ S_6=u_6;$$

$$a=\frac{1}{6}\sin 15^\circ,\ b=\frac{1}{6}\sin 30^\circ,\ c=\frac{1}{6}\sin 45^\circ,$$

$$d=\frac{1}{6}\sin 60^\circ,\ e=\frac{1}{6}\sin 75^\circ,\ f=\frac{1}{6}\sin 90^\circ,$$

se obține :

$$A_1 = S_1a + S_2b + S_3c + S_4d + S_5e + S_6f. \quad (8\text{-}12, a)$$

În mod analog rezultă :

$$B_1 = D_1e + D_2d + D_3c + D_4b + D_5a, \quad (8\text{-}12, b)$$

unde :

$$D_1 = u_1 - u_{11}, \; D_2 = u_2 - u_{10}, \; D_3 = u_3 - u_9,$$

$$D_4 = u_4 - u_8, \; D_5 = u_5 - u_7.$$

Pentru $\nu = 3$, se obțin :

$$A_3 = (S_1 + S_3 - S_5)\, c + (S_2 - S_6)\, f, \quad (8\text{-}13)$$

$$B_3 = (D_1 - D_3 - D_5)\, c - D_4f.$$

În mod analog rezultă :

$$A_5 = S_1e + S_2b - S_3c - S_4d + S_5a + S_6f, \quad (8\text{-}14)$$

$$B_5 = D_1a - D_2d - D_3c + D_4b + D_5e\,;$$

$$A_7 = S_1e - S_2b - S_3c + S_4d + S_5a - S_6f, \quad (8\text{-}15)$$

$$B_7 = D_1a - D_2d + D_3c + D_4b - D_5e\,;$$

$$A_9 = (S_1 + S_3 - S_5)\, c - (S_2 - S_6)\, f,$$

$$B_9 = -(D_1 - D_3 - D_5)\, c - D_4f. \quad (8\text{-}16)$$

Relațiile de mai sus pot conduce și la valori negative ale coeficienților A_ν și B_ν.

Tehnica modernă de calcul, reprezentată prin calculatoarele electronice, este folosită în prezent pentru analiza armonică a funcțiilor.

8.2. VALORI EFECTIVE ÎN REGIM NESINUSOIDAL

Valoarea efectivă I a unui curent periodic nesinusoidal $i\,(t)$ se definește la fel ca și valoarea efectivă a curentului sinusoidal, adică :

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,(t)\, \mathrm{d}t}. \quad (8\text{-}17)$$

Prin dezvoltarea în serie Fourier a curentului periodic nesinusoidal se obține :

$$i\,(t) = I_0 + i_1\,(t) + i_2\,(t) + i_3\,(t) + \ldots$$

unde I_0 este componenta continuă (constantă), iar

$$i_1\,(t) = I_{1m} \sin\,(\omega t - \varphi_1), \; i_2\,(t) = I_{2m} \sin\,(2\omega t - \varphi_2),$$

$$i_3\,(t) = I_{3m} \sin\,(3\omega t - \varphi_3), \; \ldots$$

Patratul valorii instantanee a acestui curent nesinusoidal este :

$$i^2(t)=[I_0+i_1(t)+i_2(t)+i_3(t)+\dots]^2=\sum_{\nu=0}^{\infty} i_\nu^2(t)+2\sum_{\substack{\lambda,\nu=0\\ \nu\neq\lambda}}^{\infty} i_\nu(t)\, i_\lambda(t),$$

unde trebuie ţinut seama că $i_0(t)=I_0$. Deci :

$$I^2=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{T}\int_0^T i_\nu^2(t)\,\mathrm{d}t+2\sum_{\substack{\lambda,\nu=0\\ \nu\neq\lambda}}^{\infty}\frac{1}{T}\int_0^T i_\nu(t)\, i_\lambda(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ţinînd seama că al doilea termen din membrul drept al acestei relaţii este nul şi că valoarea efectivă a armonicii de ordinul ν a curentului este

$$I_\nu^2=\frac{1}{T}\int_0^T i_\nu^2(t)\,\mathrm{d}t, \qquad (8\text{-}18)$$

rezultă :

$$I^2=I_0^2+I_1^2+I_2^2+I_3^2+\dots$$

sau

$$I=\sqrt{I_0^2+I_1^2+I_2^2+\dots} \qquad (8\text{-}19)$$

Adică, valoarea efectivă a unui curent periodic nesinusoidal este egală cu rădăcina pătrată a sumei patratelor valorilor efective ale armonicilor lui, adunată cu patratul componentei continue. O astfel de sumă evidenţiază faptul că efectul Joule-Lenz al curentului nesinusoidal este egal cu suma efectelor Joule-Lenz a componentelor sale armonice, inclusiv componenta continuă, dacă aceasta există.

Printr-un raţionament asemănător se obţine valoarea efectivă a unei tensiuni nesinusoidale $u(t)$ în forma :

$$U=\sqrt{U_0^2+U_1^2+U_3^2+\dots} \qquad (8\text{-}20)$$

Abaterea unei mărimi periodice nesinusoidale de la forma sinusoidală este caracterizată prin *coeficientul de distorsiune* k_d, definit de raportul dintre valoarea efectivă a tuturor armonicilor superioare (deci fără cea fundamentală) şi valoarea efectivă a mărimii nesinusoidale, mai puţin componenta continuă care nu afectează forma. Se poate scrie deci :

$$k_{di}=\sqrt{\frac{I_2^2+I_3^2+\dots}{I_1^2+I_2^2+I_3^2+\dots}}=\frac{I_d}{\sqrt{I^2-I_0^2}}. \qquad k_{du}=\sqrt{\frac{U_2^2+U_3^2+\dots}{U_1^2+U_2^2+U_3^2+\dots}}=\frac{U_d}{\sqrt{U^2-U_0^2}}, \qquad (8\text{-}21)$$

unde

$$I_d=\sqrt{I_2^2+I_3^2+\dots} \text{ şi } U_d=\sqrt{U_2^2+U_3^2+\dots}.$$

În electrotehnică, o mărime se consideră sinusoidală dacă coeficientul de distorsiune este mai mic decît 0,05.

8.3. PUTEREA ACTIVĂ, REACTIVĂ, APARENTĂ ȘI DEFORMANTĂ ÎN REGIM NESINUSOIDAL

a. **Puterea activă**, definită ca valoarea medie în raport cu o perioadă a puterii electromagnetice instantanee

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T ui\, dt \tag{8-22}$$

este valabilă pentru orice formă de variație a mărimilor u și i. Dacă aceste mărimi sînt nesinusoidale și se consideră că numai primele n armonici sînt semnificative, se poate scrie :

$$u = U_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu,$$

$$i = I_0 + i_1 + i_2 + i_3 + \ldots + i_n = \sum_{\nu=0}^{n} i_\nu,$$

unde $u_0 = U_0$, $i_0 = I_0$ și $u_\nu = U_{\nu m} \sin(\nu\omega t + \alpha_\nu)$,

$$i_\nu = I_{\nu m} \sin(\nu\omega t + \alpha_\nu - \varphi_\nu).$$

Puterea activă corespunzătoare acestor n armonici este :

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\sum_{\nu=0}^{n} u_\nu\right)\left(\sum_{\nu=0}^{n} i_\nu\right) dt = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{T}\int_0^T u_\nu i_\nu\, dt + \sum_{\substack{\nu,\lambda=0\\ \nu\neq\lambda}}^{n} \frac{1}{T}\int_0^T u_\nu i_\lambda\, dt.$$

Deoarece $\frac{1}{T}\int_0^T u_\nu i_\lambda\, dt = 0$ atunci cînd $\nu \neq \lambda$, se obține :

$$P = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{T}\int_0^T u_\nu i_\nu\, dt$$

sau

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos\varphi_1 + U_2 I_2 \cos\varphi_2 + \ldots + U_n I_n \cos\varphi_n = \sum_{\nu=0}^{n} U_\nu I_\nu \cos\varphi_\nu, \tag{8-23}$$

unde $\varphi_0 = 0$.

Deci, puterea activă, în cazul cînd tensiunea și curentul din circuit sînt mărimi nesinusoidale, este egală cu suma puterilor active ale armonicilor de același ordin din tensiune și curent, plus puterea $U_0 I_0$ corespunzătoare componentelor continue.

b. **Puterea reactivă**, definită în mod analog ca sumă a puterilor reactive ale armonicilor de același ordin, se exprimă prin :

$$Q = \sum_{\nu=1}^{n} U_\nu I_\nu \sin\varphi_\nu. \tag{8-24}$$

Componentele continue U_0 și I_0 nu determină o putere reactivă deoarece $\sin\varphi_0 = 0$.

c. **Puterea aparentă** se defineşte prin produsul valorilor efective ale tensiunii şi curentului, adică :

$$S = UI = \sqrt{(U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \ldots + U_n^2)(I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \ldots + I_n^2)} \tag{8-25}$$

d. **Puterea deformantă.** În regim sinusoidal, între puterea activă, reactivă şi aparentă este valabilă relaţia : $S^2 = P^2 + Q^2$. În regim nesinusoidal, relaţia dintre puteri este :

$$S^2 = P^2 + Q^2 + D^2, \tag{8-26}$$

unde D este puterea deformantă, măsurată cu unitatea denumită volt-amper-deformant [VAd]. Expresia puterii deformante se obţine avînd în vedere că :

$$S^2 = U^2 I^2 = (U_0^2 + U_1^2 + \ldots + U_n^2)(I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \ldots + I_n^2) =$$

$$= \left(\sum_{\nu=0}^{n} U_\nu I_\nu \cos\varphi_\nu\right)^2 + \left(\sum_{\nu=0}^{n} U_\nu I_\nu \sin\varphi_\nu\right)^2 + \sum_{\substack{\nu,\lambda=0\\ \nu\neq\lambda}} [U_\nu^2 I_\lambda^2 - 2U_\nu U_\lambda I_\nu I_\lambda \cos(\varphi_\nu - \varphi_\lambda)].$$

Deci, ţinînd seama de relaţiile (8-23), (8-24) şi (8-26), rezultă :

$$D^2 = \sum_{\substack{\nu,\lambda=0\\ \nu\neq\lambda}}^{n} [U_\nu^2 I_\lambda^2 - 2U_\nu U_\lambda I_\nu I_\lambda \cos(\varphi_\nu - \varphi_\lambda)]. \tag{8-27}$$

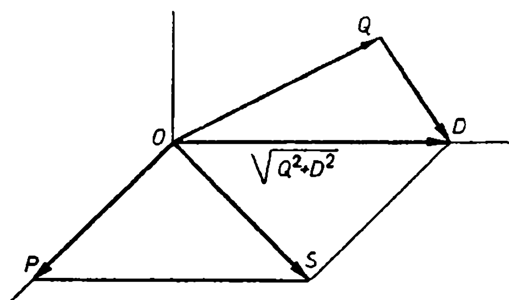


Fig. 8-4. Reprezentarea în spaţiu a puterilor în regim deformant.

În baza relaţiei (8-26) se poate întocmi reprezentarea grafică a puterilor în regim nesinusoidal ca în fig. 8-4. Din această reprezentare se vede că, dacă $D = 0$, se obţine triunghiul puterilor din regimul sinusoidal.

8.4. CALCULUL CIRCUITELOR ELECTRICE LINIARE ÎN REGIM NESINUSOIDAL

În cazul circuitelor electrice cu **elemente liniare**, alimentate cu tensiuni nesinusoidale de forma :

$$u(t) = U_0 + \sum_{\nu} U_{\nu m} \sin(\nu\omega t + \alpha_\nu), \tag{8-28}$$

calculul curenților în regim permanent se face prin aplicarea principiului superpoziției (suprapunerii efectelor). Fiecare armonică a curentului se calculează ca și cum ar acționa numai armonica de același ordin a tensiunii la borne. Curentul rezultant este egal cu suma armonicilor :

$$i(t)=I_0+\sum_{\nu} I_{\nu m}\sin(\nu\omega t+\alpha_\nu-\varphi_\nu), \tag{8-29}$$

în care :

$$I_{\nu m}=\frac{U_{\nu m}}{Z_\nu}=\frac{U_{\nu m}}{\sqrt{R^2+\left(\nu\omega L-\frac{1}{\nu\omega C}\right)^2}}, \quad \varphi_\nu=\operatorname{arctg}\frac{\nu\omega L-\frac{1}{\nu\omega C}}{R}. \tag{8-30}$$

Componenta continuă a curentului permanent este nulă, $I_0=0$, deoarece s-a considerat că în circuit există un condensator.

Pentru armonica de un anumit ordin este posibil să apară în circuit fenomenul de rezonanță. Ordinul acestei armonici se deduce din condiția de rezonanță :

$$\nu\omega L-\frac{1}{\nu\omega C}=0. \tag{8-31}$$

Dacă circuitul conține numai rezistorul de rezistență R, atunci armonicile curentului sînt în fază de armonicile tensiunile ($\varphi_\nu=0$). În acest caz, amplitudinile armonicilor curentului, respectiv valoarea constantă a curentului, sînt :

$$I_{\nu m}=\frac{U_{\nu m}}{R}; \quad I_0=\frac{U_0}{R}. \tag{8-32}$$

În cazul circuitului ce conține numai o bobină ideală cu inductivitatea L, și tensiunea la borne nu are componenta continuă, armonica de ordinul ν a curentului este :

$$i_\nu(t)=I_{\nu m}\sin\left(\nu\omega t+\alpha_\nu-\frac{\pi}{2}\right), \tag{8-33}$$

unde :

$$I_{\nu m}=\frac{U_{\nu m}}{\nu\omega L}. \tag{8-34}$$

Deci, în cazul bobinei, amplitudinile armonicilor devin tot mai mici pe măsură ce crește ordinul ν al armonicii, deoarece reactanța inductivă $\nu\omega L$ devine tot mai mare. De aici rezultă rolul de tampon al bobinei pentru armonicile superioare ale curentului, ceea ce se folosește în practică la construcția filtrelor electrice.

Dacă circuitul este constituit numai dintr-un condensator ideal de capacitate C, armonica ν a curentului este:

$$i_\nu(t) = I_{\nu m} \sin\left(\nu\omega t + \alpha_\nu + \frac{\pi}{2}\right), \tag{8-35}$$

unde

$$I_{\nu m} = U_{\nu m} \nu\omega C. \tag{8-36}$$

Deci, în cazul condensatorului, amplitudinile armonicilor curentului devin tot mai mari pe măsură ce crește ordinul ν al armonicii, deoarece reactanța capacitivă $\frac{1}{\nu\omega C}$ devine tot mai mică pentru armonicile superioare. Ca urmare, condensatorul constituie un element de șuntare (scurtcircuitare) a armonicilor curentului de frecvență ridicată, ceea ce, de asemenea, prezintă importanță la realizarea filtrelor electrice.

8.5. FILTRE ELECTRICE

Impedanța unui circuit liniar, corespunzătoare armonicii de ordinul ν a tensiunii, respectiv curentului, se calculează cu relația:

$$Z_\nu = \sqrt{R^2 + \left(\nu\omega L - \frac{1}{\nu\omega C}\right)^2}, \tag{8-37}$$

ceea ce înseamnă că valoarea acestei impedanțe se modifică în funcție de ordinul ν al armonicii considerate. Ca urmare, amplitudinea unei armonici a curentului depinde, la rîndul său, de ordinul armonicii respective:

$$I_\nu = \frac{U_\nu}{Z_\nu}. \tag{8-38}$$

De asemenea, defazajul dintre armonicile de același ordin ν a curentului și tensiunii depinde de acest ordin:

$$\varphi_\nu = \operatorname{arctg}\frac{\nu\omega L - \frac{1}{\nu\omega C}}{R}. \tag{8-39}$$

Pe baza acestor considerente funcționează filtrele electrice care au rolul de a opri, sau de a permite, trecerea prin circuit a componentelor armonice cuprinse într-o anumită bandă de frecvență. În general, filtrele electrice sînt circuite cuadripolare, cu două borne de intrare și cu două borne de ieșire, care se intercalează între sursă și receptor, fiind folosite pe scară largă în schemele aparatelor electronice, în sistemele de comandă și automatizări, la instalațiile de redresare a curentului alternativ etc.

Parametrii caracteristici ai unui filtru sînt atenuarea și defazajul.

Atenuarea se exprimă în funcție de raportul dintre mărimea de intrare și mărimea de ieșire. În funcție de destinația filtrului, raportul se face între

puteri, între tensiuni sau între curenți, relațiile de calcul a atenuării fiind următoarele :

$$a=\frac{1}{2}\ln\frac{P_i}{P_e}\ [\mathrm{Np}];\quad a=10\log\frac{P_i}{P_e}\ [\mathrm{dB}],$$

$$a=\ln\frac{U_i}{U_e}\ [\mathrm{Np}];\quad a=20\log\frac{U_i}{U_e}\ [\mathrm{dB}], \tag{8-40}$$

$$a=\ln\frac{I_i}{I_e}\ [\mathrm{Np}];\quad a=20\log\frac{I_i}{I_e}\ [\mathrm{dB}],$$

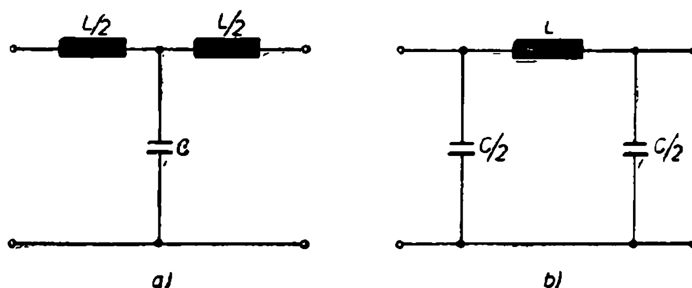


Fig. 8-5. Schema filtrului trece-jos :
a — cu două bobine și un condensator; *b* — cu o bobină și două condensatoare.

unde indicele „*i*" precizează mărimea de intrare, iar indicele „*e*" pe cea de ieșire. Neperul [Np] și decibelul [dB] sînt unități de măsură ale atenuării.

Valoarea cu semn schimbat a atenuării se numește *cîștig* (amplificare).

Defazajul se referă la unghiul dintre mărimea de intrare și mărimea de ieșire (cînd acestea sînt tensiuni sau curenți cu variație sinusoidală în timp).

Dependența de frecvență a atenuării și defazajului constituie *caracteristicile de frecvență* ale filtrului.

Se numește *filtru ideal* un filtru a cărui caracteristică de frecvență a atenuării ar prezenta benzi de trecere de atenuare nulă, alternînd cu benzi de oprire de atenuare infinită. Filtrele reale au atenuare diferită de zero în banda de trecere (din cauza pierderilor) și finită în banda de oprire.

Din punctul de vedere al dependenței în funcție de frecvență a atenuării, filtrele electrice se clasifică după poziția și lățimea în spectrul de frecvență a benzilor de trecere, respectiv a benzilor de oprire. În acest sens, se prezintă în continuare cîteva exemple.

Filtrul trece-jos (fig. 8-5, *a* și *b*), a cărui caracteristică de frecvență prezintă o bandă de trecere cuprinsă între frecvențele $f_1=0$ și $f_2=f_c$. Frecvența f_c se numește *frecvență de tăiere superioară* și corespunde unei atenuări mai mici, cel mult egală cu 3 dB.

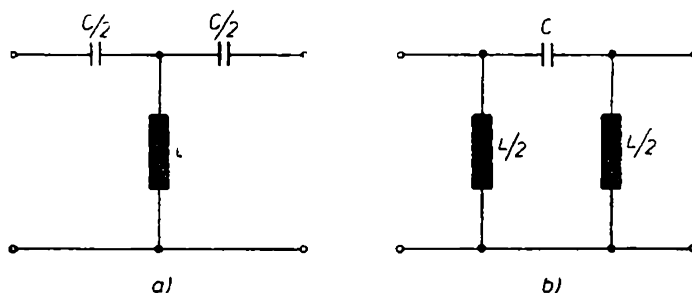


Fig. 8-6. Schema filtrului trece-sus :
a — cu două condensatoare și o bobină; b — cu un condensator și două bobine.

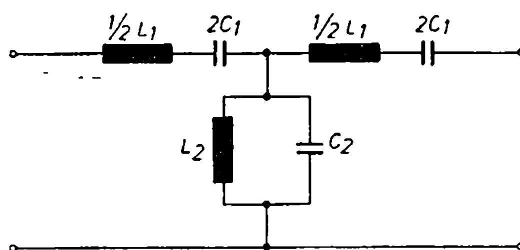


Fig. 8-7. Schema filtrului trece-bandă.

Filtrul trece-sus (fig. 8-6, *a și b*), a cărui caracteristică de frecvență prezintă o bandă de trecere cuprinsă între frecvențele $f_1 = f_c$, denumită *frecvența de tăiere inferioară*, și $f_2 = \infty$. În acest caz, *frecvența* f_c *corespunde* unei atenuări mai mari sau cel mult egală cu 3 dB.

În fig. 8-7 este reprezentată schema unui *filtru trece-bandă*, care poate fi de bandă îngustă sau de bandă largă.

Din schemele filtrelor reprezentate mai sus rezultă că în componența acestora intră bobine și condensatoare. Filtrele reale conțin și rezistoare (de exemplu, rezistența proprie a bobinelor), care provoacă atît atenuarea, cît și pierderi de putere prin efect Joule-Lenz.

Partea II

MĂSURĂRI ELECTRICE

Capitolul 9

MĂSURĂRI ELECTRICE

9.1. CONSIDERAȚIUNI GENERALE ASUPRA MĂSURĂRILOR ȘI INSTRUMENTELOR ELECTRICE DE MĂSURARE

9.1.1. MĂSURAREA MĂRIMILOR FIZICE

Mărimile fizice de aceeași natură se deosebesc între ele numai cantitativ și, ca urmare, pot fi comparate. A măsura o mărime fizică înseamnă a o compara cu o altă mărime de aceeași natură, denumită *unitate de măsură*. Valoarea mărimii se exprimă printr-un număr scalar care arată de cîte ori unitatea folosită se cuprinde în mărimea dată.

Este evident că măsurarea unei mărimi se poate face numai după ce s-a stabilit în prealabil și în mod concret unitatea sa de măsură. Chiar și atunci cînd se face o comparație cantitativă între două mărimi de aceeași natură, în mod implicit una dintre ele este adoptată ca unitate.

Pentru executarea măsurărilor, pe lîngă definirea unităților de măsură independente (fundamentale) și a celor derivate, este necesară realizarea materială a acestor unități. În acest scop, în metrologie se folosesc etaloanele care reproduc sau stabilesc unitățile de măsură cu precizie maximă. În electrotehnică, datorită naturii speciale a mărimilor electrice și magnetice, unitățile multora dintre ele nu pot fi materializate sub formă de etaloane, reproducerea lor făcîndu-se în mod indirect, prin intermediul unor mărimi fizice de altă natură.

După modul în care, prin măsurare, se obține valoarea unei mărimi, se disting : măsurări directe și măsurări indirecte.

Măsurarea directă constă în găsirea valorii mărimii prin măsurarea ei cu ajutorul instrumentului de măsurare adecvat. De exemplu, măsurarea unei lungimi cu rigla gradată, a unui curent cu ampermetrul, a unei rezistențe cu ohmmetrul etc., constituie măsurări directe.

Măsurarea indirectă constă în găsirea valorii mărimii pe bază de calcul, în funcție de alte mărimi ce se măsoară direct. De exemplu, sînt măsurări indirecte : măsurarea ariei unui dreptunghi prin măsurarea laturilor sale, măsurarea rezistenței electrice prin măsurarea tensiunii și a curentului electric (metoda volt-ampermetrică) etc.

După precizia de măsurare, se deosebesc : măsurări de etalonare, de laborator și industriale. *Măsurările de etalonare* se execută în laboratoare metrologice autorizate și se referă de fapt la verificarea stării de funcționare și a clasei de precizie pentru instrumentele folosite în diverse alte laboratoare și unități. Aceste măsurări (verificări) se efectuează cu cele mai precise instrumente de măsurare (considerate etaloane). *Măsurările de laborator* se efectuează, de regulă, în cadrul unor cercetări științifice, analize sau verificări și se exe-

cută cu instrumente de mare precizie. În schimb, *măsurările industriale* se efectuează în timpul desfășurării procesului de producție, instrumentele de măsurat folosite fiind de precizie suficientă pentru necesitățile practice.

9.1.2. ERORI DE MĂSURARE

Oricît de îngrijit s-ar efectua măsurarea unei mărimi fizice, folosind cele mai perfecționate metode și mijloace, totuși nu se poate pretinde că măsurarea este absolut exactă, intervenind întotdeauna o anumită eroare.

Valoarea adevărată (reală sau exactă) a unei mărimi reprezintă acea valoare care ar rezulta dacă măsurarea nu ar fi însoțită de nici o eroare. Aceasta este valoarea către care se tinde în orice operație de măsurare. Dacă X este valoarea adevărată a mărimii și X_m este *valoarea măsurată*, eroarea absolută și eroarea relativă sînt :

$$\Delta X = X_m - X, \quad \Delta_r = \frac{\Delta X}{X}. \qquad (9\text{-}1)$$

Avînd în vedere că valoarea adevărată nu poate fi cunoscută practic decît extrem de rar, se utilizează pentru calculul erorii *valoarea de referință* X_0, obținută prin măsurarea mărimii cu cele mai perfecționate mijloace. În acest caz, eroarea absolută, respectiv eroarea relativă, au expresiile :

$$\Delta X = X_m - X_0, \quad \Delta_r = \frac{\Delta X}{X_0}. \qquad (9\text{-}2)$$

Eroarea relativă, spre deosebire de cea absolută, dă o anumită informație asupra gradului de precizie al măsurării și se exprimă de obicei în procente. Erorile, absolută și relativă, au valori care se modifică în funcție de valoarea mărimii măsurate și pot fi pozitive dacă $X_m > X_0$ sau negative dacă $X_m < X_0$. Important este ca eroarea comisă la oricare măsurare să nu depășească *eroarea maximă admisibilă* ce se stabilește de la caz la caz. Cu cît eroarea relativă este mai mică, cu atît precizia măsurării este mai mare.

Mărimea egală și de semn opus cu eroarea absolută se numește *corecție* :

$$C = -\Delta X = X_0 - X_m. \qquad (9\text{-}3)$$

Cunoscînd corecția, se poate deduce pentru mărimea măsurată valoarea X_0, mai precisă decît valoarea măsurată X_m.

Erorile care afectează o măsurare pot fi clasificate așa cum este arătat în fig. 9-1.

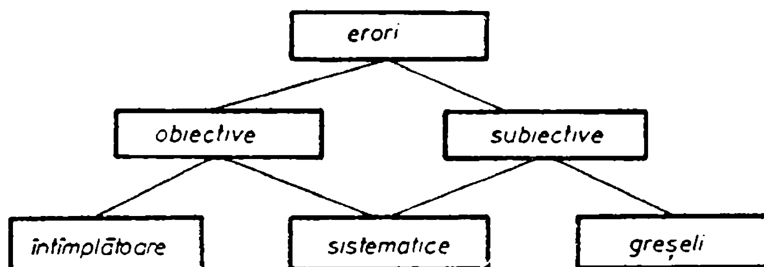


Fig. 9-1. Clasificarea erorilor de măsurare.

Erorile obiective sînt cele care nu depind de experimentator, ci se datoresc imperfecţiunii constructive a instrumentelor de măsurare, metodei de măsurare insuficient de exactă (eroare de metodă) sau influenţei diferiţilor factori externi.

Erorile subiective se datoresc experimentatorului, depinzînd de atenţia şi îndemînarea cu care acesta execută măsurarea şi de starea organelor sale de percepţie.

Erorile sistematice sînt cele care se datoresc acţiunii continue a unor surse de erori ce pot fi cunoscute în urma unei analize atente a condiţiilor în care se execută măsurarea. Ele sînt obiective în cazul cînd sînt cauzate de imperfecţiunea constructivă a aparatelor de măsurare, de imprecizia metodei de măsurare sau de influenţa unor factori externi cu acţiune permanentă ca: temperatura, cîmpuri magnetice sau electrice, vibraţii etc. Erorile sistematice sînt subiective dacă se datoresc unor defecte ale organelor de percepţie ale experimentatorului.

Cunoscînd cauzele erorilor sistematice, se pot lua măsuri pentru ca valoarea lor să fie redusă la minimum sau chiar la zero, respectiv se poate stabili corecţia ce trebuie adusă valorii măsurate.

Erorile întîmplătoare sînt cele datorate acţiunii unor cauze întîmplătoare, imprevizibile şi necontrolabile, împotriva cărora nu pot fi luate măsuri de prevenire. Într-un număr mare de măsurări ale aceleiaşi mărimi, efectuate în condiţiuni identice, valoarea erorii întîmplătoare se schimbă ca mărime şi sens de la o măsurare la alta, fiind supusă legilor statistice de distribuţie.

Greşelile sînt erori ce apar datorită neatenţiei experimentatorului, prin citirea sau manipularea greşită a instrumentelor de măsurat. Întrucît aceste erori denaturează în mod grosolan rezultatele, măsurările afectate de astfel de erori trebuie refăcute cu atenţie.

Aplicaţia 9-1. O tensiune este măsurată cu un voltmetru ce are scala gradată de la 0 la 100. La o măsurare instrumentul arată 5 diviziuni şi la o altă măsurare, 90 diviziuni. Care este eroarea relativă la fiecare măsurare dacă $\pm \frac{1}{10}$ dintr-o diviziune nu poate fi distinsă ?

Rezolvare. Dacă U_1 şi U_2 sînt tensiunile la cele două măsurări, eroarea absolută cu care este măsurată fiecare este:

$$\Delta U_1 = \frac{5 \pm \frac{1}{10}}{5} U_1 - U_1 = \pm \frac{1}{10 \cdot 5} U_1,$$

$$\Delta U_2 = \frac{90 \pm \frac{1}{10}}{90} U_2 - U_2 = \pm \frac{1}{10 \cdot 90} U_2.$$

Erorile relative sînt:

$$\Delta_{r_1} = \frac{\Delta U_1}{U_1} = \pm \frac{1}{50} \quad (\pm 2\%),$$

$$\Delta_{r_2} = \frac{\Delta U_2}{U_2} = \pm \frac{1}{900} \quad (\pm 0{,}11\%).$$

Se remarcă faptul că pentru citirea de la începutul scalei instrumentului, eroarea relativă comisă este mult mai mare decît pentru citirea de la sfîrşitul scalei.

9.1.3. PĂRŢI CONSTRUCTIVE COMUNE ALE INSTRUMENTELOR ELECTRICE

Cu toată diversitatea tipurilor constructive ale instrumentelor electrice de măsurare, totuşi acestea posedă o serie de elemente constructive şi funcţionale comune. Astfel, dacă ne referim la instrumentele de măsurare cele mai uzuale ca : ampermetre, voltmetre, watmetre etc. oricare din acestea constă dintr-o cutie în interiorul căreia se găsesc ca părţi constructive esenţiale *sistemul fix* şi *sistemul mobil*. Pe partea frontală a cutiei se găseşte un *cadran* cu *scală gradată*. De-a lungul scalei gradate se deplasează *acul indicator* care este fixat rigid de sistemul mobil. Pentru legarea instrumentului în circuitul de măsurare se folosesc bornele situate într-o anumită parte a cutiei.

Resoartele spirale (fig. 9-2) se opun deplasării sistemului mobil din poziţia sa de zero (repaus). La unele tipuri de instrumente, aceste resoarte servesc şi la conducerea curentului spre sistemul mobil.

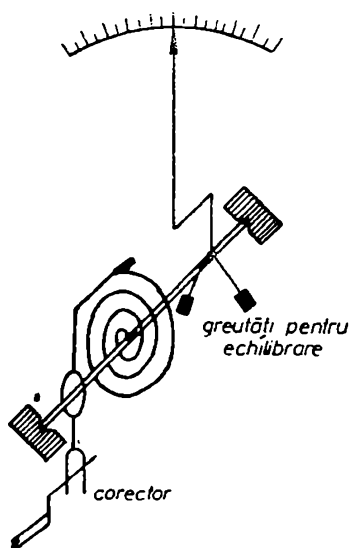


Fig. 9-2. Elemente componente ale sistemului mobil.

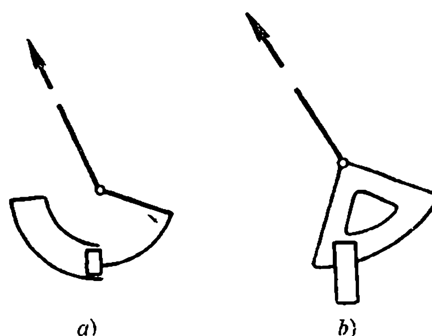
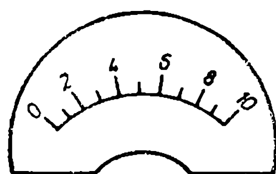


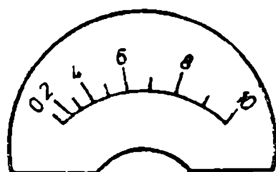
Fig. 9-3. Amortizoare : *a* — pneumatic; *b* — electromagnetic.

Fixarea iniţială, în poziţia de zero, a acului indicator se face cu ajutorul *corectorului* (fig. 9-2), învîrtit cu o şurubelniţă.

Amortizarea mişcării acului indicator şi limitarea oscilaţiilor acestuia în jurul poziţiei de echilibru se realizează cu ajutorul unui amortizor pneumatic sau electromagnetic. *Amortizorul pneumatic*, schiţat în fig. 9-3, *a*, constă dintr-un cilindru în interiorul căruia se mişcă un piston odată cu acul indicator. Între cilindru şi piston se găseşte un interstiţiu prin care trece aerul atunci cînd pistonul se mişcă. Amortizarea mişcărilor se datoreşte pernei de aer formată în cilindru, în spatele pistonului. *Amortizorul electromagnetic*, schiţat în fig. 9-3, *b*, este realizat dintr-o armătură metalică, fixată rigid de sistemul mobil al instrumentului, ce se mişcă între polii unui magnet permanent. Fenomenul de inducţie electromagnetică ce apare la mişcarea armăturii în cîmpul magnetic face ca în armătură să se inducă curenţi, respectiv asupra ei să acţioneze o forţă dirijată în sens opus mişcării, producîndu-se amortizarea.



a)



b)

Fig. 9-4. Scala instrumentului : a — uniformă; b — neuniformă.

Scala gradată a instrumentelor electrice poate fi *uniformă* (fig. 9-4, *a*) sau *neuniformă* (fig. 9-4, *b*), după cum diviziunile de pe scală sînt egal, sau neegal distanţate între ele. După poziţia reperului zero, scalele pot fi *unilaterale*, cu reperul zero plasat la una din extremităţile scalei, sau *bilaterale*, cu reperul zero situat la mijloc. Pentru eliminarea erorii de paralaxă la citirea indicaţiei de pe scală, instrumentele de măsurare de precizie au cadranul prevăzut cu *oglindă*. Poziţia de citire corectă este aceea pentru care cititorul vede acul indicator suprapus peste imaginea sa din oglindă.

9.1.4. MIŞCAREA SISTEMULUI MOBIL

În timpul măsurării, asupra sistemului mobil al unui instrument acţionează, în general, următoarele cupluri :

Cuplul activ, determinat de interacţiunea dintre sistemul fix şi sistemul mobil, care pune în mişcare de rotaţie sistemul mobil, se calculează în funcţie de energia de interacţiune dintre cele două sisteme :

$$C=\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha}\right)_{I=\text{const.}} \tag{9-4}$$

unde α este unghiul de rotaţie (v. teoria forţelor generalizate).

Dependent de tipul constructiv al instrumentului şi de natura mărimii de măsurat, cuplul activ poate avea valoare constantă sau valoare variabilă periodic în raport cu timpul. În ultimul caz este necesar să se determine o valoare medie a acestui cuplu. De asemenea, cuplul activ poate depinde şi de unghiul α, adică de poziţia relativă a sistemului mobil faţă de sistemul fix. În toate cazurile, cuplul activ se exprimă în final ca o funcţie de mărimea măsurată de instrument :

$$C=F(X). \tag{9-5}$$

Cuplul rezistent (antagonist) este determinat de resoartele spirale, fiind proporţional cu deformaţia elastică a acestora :

$$C_r=k_r\alpha. \tag{9-6}$$

Cuplul de amortizare acţionează întotdeauna în sens opus mişcării şi este proporţional cu variaţia în timp a unghiului de rotaţie :

$$C_A=k_A\frac{d\alpha}{dt}. \tag{9-7}$$

Cuplul de frecare se datoreşte frecărilor ce apar în lagăre sau cu aerul, avînd o valoare foarte mică, neglijabilă.

Cuplul de inerție este determinat de mişcarea accelerată sau întîrziată a masei sistemului mobil:

$$M_j = J \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \tag{9-8}$$

unde J este momentul de inerție al maselor în mişcare.

Ecuația de mişcare a sistemului mobil rezultă din legea a II-a a dinamicii pentru corpuri în rotație:

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} = C - C_r - C_A. \tag{9-9}$$

Înlocuind expresiile stabilite mai sus pentru cupluri, se obține următoarea formă a ecuației de mişcare:

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} + k_A \frac{d\alpha}{dt} + k_r\alpha = C. \tag{9-10}$$

În starea de repaus cu deviație permanentă $\alpha =$ const. se obține condiția de echilibru

$$C_r = C, \text{ sau } k_r\alpha = F(X), \tag{9-11}$$

de unde se vede că deviația permanentă α este o funcție de mărimea de măsurat X.

9.1.5. CLASIFICAREA INSTRUMENTELOR ELECTRICE DE MĂSURARE

Clasificarea instrumentelor electrice de măsurare poate fi făcută din mai multe puncte de vedere.

După principiul de funcționare, se deosebesc următoarele tipuri principale de instrumente: magnetoelectrice, electromagnetice, electrodinamice, termice, de inducție, de rezonanță, electronice, numerice (cifrice) etc.

După felul curentului, instrumentele se împart în: de curent continuu, de curent alternativ şi de curent continuu şi alternativ.

După felul mărimii de măsurat, se deosebesc: ampermetre, voltmetre, wattmetre, ohmmetre etc. O categorie aparte o constituie instrumentele folosite pentru măsurarea mărimilor magnetice.

Din punctul de vedere al modului de întrebuințare, se deosebesc: instrumente fixe, sau de tablou şi instrumente portative.

Instrumentele de măsurare se clasifică şi după clasa lor de precizie (v. paragraful 9.1.6.).

Unele instrumente de măsurare sînt prevăzute cu dispozitive de înregistrare a valorilor mărimii măsurate, fiind denumite instrumente înregistratoare.

9.1.6. DATE CARACTERISTICE ŞI SIMBOLURI ALE INSTRUMENTELOR ELECTRICE DE MĂSURARE

Domeniul de măsurare al unui instrument electric este valoarea maximă a mărimii care, în mod normal, poate fi măsurată cu instrumentul. Cu alte cuvinte, domeniul de măsurare este valoarea mărimii măsurată de instrument,

atunci cînd acul indicator se găsește în dreptul ultimei diviziuni pe de scala gradată. De obicei, pe partea frontală a instrumentelor este înscrisă valoarea maximă a mărimii ce poate fi măsurată, adică domeniul de măsurare.

Constanta unui instrument electric este raportul dintre domeniul de măsurare D și numărul total de diviziuni α_{max} de pe scala gradată, adică :

$$K=\frac{D}{\alpha_{max}}. \qquad (9\text{-}12)$$

Dimensiunea constantei este : la voltmetru V/div, la ampermetru A/div, la wattmetru W/div etc. Fără a cunoaște constanta instrumentului folosit într-o măsurare nu se poate ști ce valoare are mărimea măsurată. Cunoscînd constanta K și numărul diviziuni α indicat de instrument, valoarea mărimii este :

$$X=K\alpha. \qquad (9\text{-}13)$$

Aplicația 9-2. Un voltmetru are domeniul $D=150$ V și numărul total de diviziuni de pe scală $\alpha_{max}=30$ div. Constanta acestui instrument. conform relației (9-12) este : $K=\frac{150}{30}=5$ V/div. Dacă acul indicator se găsește în dreptul diviziunii $\alpha=12$, valoarea tensiunii măsurată de voltmetru, conform relației (9-13) este : $U=5\cdot12=60$ V.

Sensibilitatea instrumentelor electrice de măsurare este reprezentată prin numărul de diviziuni cu care deviază acul indicator al instrumentului atunci cînd mărimea de măsurat se modifică cu o unitate. Dimensiunea sensibilității este inversă față de dimensiunea constantei instrumentului adică, div/V, div/A, div/W etc. Sub formă matematică, sensibilitatea se exprimă prin relația :

$$S=\lim_{\Delta X\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta X}. \qquad (9\text{-}14)$$

Clasa de precizie a instrumentelor electrice de măsurare caracterizează gradul de precizie, adică eroarea tolerată a acestora. Se exprimă printr-un număr care reprezintă eroarea maximă admisibilă, în procente, pe care poate să o aibă instrumentul atunci cînd acul indicator se găsește în dreptul ultimei diviziuni.

În practică se folosesc instrumente electrice de măsurare grupate în următoarele cinci clase de precizie :

— clasa 0,1 cu eroarea admisibilă $\pm0,1\%$;
— clasa 0,2 cu eroarea admisibilă $\pm0,2\%$;
— clasa 0,5 cu eroarea admisibilă $\pm0,5\%$;
— clasa 1, cu eroarea admisibilă $\pm1\%$;
— clasa 1,5 cu eroarea admisibilă $\pm1,5\%$;
— clasa 2,5 cu eroarea admisibilă $\pm2,5\%$;
— clasa 4 cu eroarea admisibilă $\pm4\%$.

Instrumentele de clasă 0,1 și 0,2 fiind de precizie ridicată sînt utilizate, în general, pentru etalonarea altor instrumente sau pentru măsurări de precizie. Instrumentele de clasa 0,5 și 1 sînt utilizate pentru măsurări curente în laborator și la standurile de încercare. Instrumentele de clasa 1,5 ; 2,5 și 4 sînt utilizate ca instrumente obișnuite de tablou, cu citire directă și înregistratoare.

Consumul propriu de energie al instrumentelor electrice de măsurare apare în primul rînd datorită efectului Joule-Lenz dezvoltat la trecerea curentului prin rezistența interioară a acestora. În tabela 9-1 sînt prezentate valorile orientative ale consumului propriu de energie pentru tipurile cele mai uzuale de instrumente electrice de măsurare.

Tabela 9-1

Consumul propriu de energie al instrumentelor electrice de măsurat

Tipul instrumentului	Consumul propriu, în W	
	Ampermetre pentru 5 A	Voltmetre pentru 100 V
Magnetoelectric	0,2...0,4	0,1...1
Electromagnetic	2...8	2...5
Electrodinamic	3,5...10	3...6
Cu inducție	1...4	2...5

Simbolurile instrumentelor electrice de măsurare sînt semnele ce se imprimă pe partea frontală a acestora cu scopul de a recunoaște tipul de instrument, unele date caracteristice și condițiuni de folosire etc. În tabela 9-2 sînt prezentate cîteva din aceste simboluri.

Tabela 9-2

Simboluri ale instrumentelor electrice de măsurare

Semnificația	Simbol	Semnificația	Simbol
Instrumente magnetoelectrice		Instrumente de curent continuu	—
Instrumente magnetoelectrice cu redresor		Instrumente de curent alternativ monofazat	∼
Instrumente electromagnetice		Instrumente de curent continuu și alternativ	
Instrumente electrodinamice		Instrumente de măsurat în curent alternativ trifazat	

Tabelul 9.2 (continuare)

Semnificația	Simbol	Semnificația	Simbol
Instrumente electrodinamice ecranate magnetic (ferodinamice)		Instrumente cu cadran orizontal	
Instrumente de inducție		Instrumente cu cadran vertical	
Instrumente cu rezonanță		Instrumente cu cadran înclinat față de orizontală	
		Tensiunea de încercare a izolației (de exemplu 2 kV)	2

9.2. CONSTRUCȚIA ȘI FUNCȚIONAREA INSTRUMENTELOR ELECTRICE DE MĂSURARE

9.2.1. INSTRUMENTE MAGNETOELECTRICE

Sistemul fix al instrumentelor de măsurare magnetoelectrice este format dintr-un magnet permanent, iar sistemul mobil dintr-o bobină așezată pe un miez de fier cilindric, situat între polii magnetului permanent (fig. 9-5).

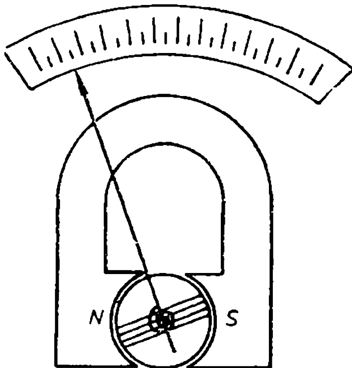


Fig. 9-5. Schița instrumentului magnetoelectric.

Cuplul activ ce rotește sistemul mobil împreună cu acul indicator este determinat de interacțiunea dintre cîmpul magnetic al sistemului fix și curentul din spirele bobinei sistemului mobil. Ținînd seama că liniile cîmpului magnetic sînt perpendiculare pe miezul de fier cilindric al bobinei mobile, iar inducția magnetică în întrefier este constantă, se poate dovedi ușor proporționalitatea dintre acest cuplu și curentul din bobină, adică :

$$C = k_a I. \qquad (9\text{-}15)$$

Cuplul rezistent este determinat de două resoarte spirale așezate la cele două capete ale

axului sistemului mobil. Valoarea acestui cuplu este proporţională cu deformaţia elastică a resoartelor, adică cu unghiul de deviaţie al acului indicator:

$$C_r = k_r \alpha. \tag{9-16}$$

Acul indicator al instrumentului se opreşte în dreptul diviziunii pentru care valoarea cuplului activ este egală cu valoarea cuplului rezistent, adică:

$$C = C_r, \text{ sau } \alpha = kI, \tag{9-17}$$

unde $k = \frac{k_a}{k_r}$ este o constantă de proporţionalitate.

Relaţia (9-17) arată că derivaţia α a acului indicator al instrumentelor magnetoelectrice este proporţională cu curentul I din bobina sistemului mobil. Prin urmare, scala instrumentelor magnetoelectrice este uniformă.

Instrumentele magnetoelectrice pot fi construite pentru a fi folosite ca ampermetre şi ca voltmetre, deoarece curentul din bobina mobilă poate fi făcut proporţional cu curentul de măsurat sau cu tensiunea. În cazul ampermetrului, în paralel cu bobina mobilă se leagă un şunt, iar în cazul voltmetrului, în serie cu bobina se leagă o rezistenţă adiţională.

Odată cu schimbarea sensului curentului I, se schimbă şi sensul cuplului activ, ceea ce înseamnă că instrumentele magnetoelectrice sînt destinate numai pentru măsurări în curent continuu, bornele lor fiind marcate cu semnele „+“ şi „—“. Pentru a putea fi utilizate şi la măsurări în curent alternativ, sînt prevăzute cu un redresor pentru redresarea ambelor alternanţe. În această situaţie, cuplul activ este variabil în cursul unei perioade, avînd valoarea instantanee:

$$c = k_a i_r, \tag{9-18}$$

unde i_r este curentul redresat. Datorită inerţiei, sistemul mobil se roteşte sub acţiunea valorii medii a cuplului activ:

$$C = \frac{1}{T} \int_0^T c\mathrm{d}t = \frac{k_a}{T} \int_0^T i_r \mathrm{d}t = k_a I_{med}. \tag{9-19}$$

Prin urmare, valoarea măsurată de instrument este valoarea medie a mărimii cu variaţie periodică în timp.

Deoarece tensiunea, respectiv curentul alternativ, au în mod obişnuit o variaţie sinusoidală, *scala gradată a instrumentelor magnetoelectrice* nu *este etalonată* pentru valorile medii ale curentului, sau tensiunii, ci *pentru valorile efective*, ţinînd seama că în regim sinusoidal raportul dintre valoarea efectivă şi valoarea medie, cunoscut sub denumirea de *factorul de formă*, este 1,11. În regim nesinusoidal, această etalonare nu mai corespunde valorii efective a mărimii măsurate, deoarece factorul de formă este diferit de 1,11.

Funcţionarea instrumentelor magnetoelectrice ca ampermetre de c.a. se poate realiza şi prin folosirea unor termocupluri a căror tensiune termoelectromotoare determină curentul din bobina sistemului mobil. Încălzirea termocuplului, respectiv tensiunea termoelectromotoare, este proporţională cu patratul valorii efective a curentului alternativ. Deci, în acest caz, deviaţia instrumentului depinde de patratul valorii efective a curentului alternativ atît în regim sinusoidal, cît şi în regim nesinusoidal, la frecvenţe oricît de mari.

Curentul admisibil prin bobina sistemului mobil a instrumentelor magnetoelectrice are valoare relativ mică, maxim 5...30 mA, conducerea curentului la bobină făcîndu-se prin intermediul resoartelor spirale. La suprasolicitări, se poate întîmpla ca, datorită încălzirii, resoartele spirale să-și modifice proprietățile elastice și instrumentul să dea indicații eronate sau, ceea ce este mai grav, se poate întîmpla ca bobina sistemului mobil să se ardă.

Instrumentele magnetoelectrice sînt sensibile și precise. Practic vorbind, ele nu sînt influențate de cîmpurile magnetice exterioare deoarece cîmpul determinat de magnetul permanent este destul de puternic.

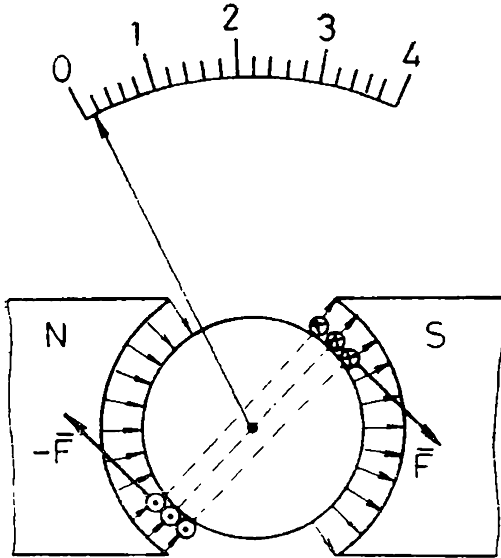


Fig. 9-6. Cuplul activ la instrumentul magnetoelectric.

Aplicația 9-3. Să se stabilească expresia de calcul a cuplului activ la instrumentul magnetoelectric.

Rezolvare. Liniile inducției magnetice $\overline{B}$ sînt perpendiculare în întrefier pe suprafața polilor magnetului permanent și a miezului bobinei mobile (fig. 9-6). Se notează cu D și l diametrul și lungimea bobinei mobile, iar cu N numărul de spire al acestei bobine.

Forța ce acționează asupra lungimii $d\overline{l}$ din latura unei spire, parcursă de curentul i, se calculează cu formula lui Laplace: $d\overline{F}= =i\,[d\overline{l}\times\overline{B}]$, de unde rezultă pentru o spiră $F_1=Bli$ și pentru N spire $F=NF_1=NBli$.

Cuplul activ determinat de forțele $\overline{F}$ și $-\overline{F}$ este: $c=FD=NBlDi=NBSi$, unde $S=Dl$ este aria bobinei.

Introducînd constanta $k_a=NBS$, rezultă:

$$c=k_a i.$$

În curent continuu $i=I$ și $c=C$ (constant).

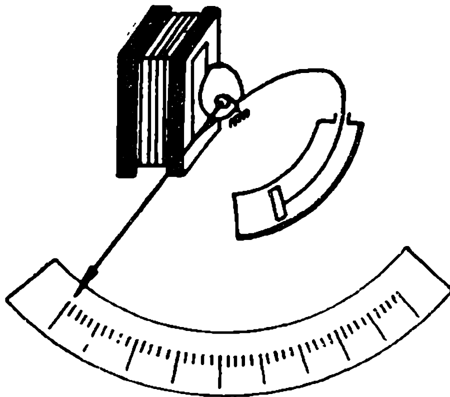


Fig. 9-7. Schița instrumentului electromagnetic.

9.2.2. INSTRUMENTE ELECTROMAGNETICE

Funcționarea instumentelor electromagnetice se bazează pe atracția exercitată de o bobină, prin care trece curentul de măsurat, asupra unui miez feromagnetic.

Sistemul fix al instrumentelor electromagnetice constă dintr-o bobină, iar sistemul mobil dintr-o armătură fixată excentric (fig. 9-7). Cînd prin bobină trece curent, armătura este atrasă și, odată cu ea, se deplasează acul indicator de-a lungul scalei gradate. Avînd în vedere expresia forței portante la un electromagnet, rezultă pentru valoarea momentană a cuplului activ al instrumentelor electromagnetice următoarea expresie:

$$c=k_a i^2 f(d), \qquad (9\text{-}20)$$

unde i este valoarea momentană a curentului din bobină, $f(d)$ este o funcție de distanța dintre armătură și bobină, iar k_a este o constantă de proporționalitate.

Deoarece, conform relației (9-20), cuplul activ depinde de patratul curentului, înseamnă că instrumentele electromagnetice pot fi folosite atît în c.c. cît și în c.a. În c.a. valoarea momentană a cuplului activ are o variație pulsatorie în timp. Datorită inerției sistemului mobil, acul indicator se stabilește în dreptul diviziunii de pe scală corespunzătoare valorii medii a cuplului activ, calculată în raport cu o perioadă T, care este :

$$C=\frac{1}{T}\int_0^T c\,dt=k_a f(d)\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt=k_a f(d)\,I^2, \qquad (9\text{-}21)$$

unde I^2 este patratul valorii efective a curentului alternativ. Deci, *în curent alternativ instrumentele electromagnetice măsoară valoarea efectivă a curentului.*

Cuplul rezistent este proporțional cu deformația elastică a resortului spiral : $C_r=k_r\alpha$. La echilibru, valorile cuplului activ și a cuplului rezistent sînt egale, adică :

$$k_r\alpha=k_a f(d)\,I^2. \qquad (9\text{-}22)$$

Această relație neliniară între deviația α a acului indicator și curentul I ce se măsoară arată că scala instrumentelor electromagnetice este neuniformă.

Trebuie arătat că, în general, etalonarea instrumentelor electromagnetice realizată în curent continuu nu corespunde și în curent alternativ. De aceea, această etalonare se face separat, pentru curent continuu și pentru curent alternativ.

Instrumentele electromagnetice pot fi folosite nu numai ca ampermetre, ci și ca voltmetre deoarece curentul I din bobină este proporțional cu tensiunea U aplicată bobinei.

Instrumentele electromagnetice sînt robuste și ieftine, dar de precizie mai mică decît cele magnetoelectrice. Se folosesc mai ales ca instrumente de tablou.

9.2.3. INSTRUMENTE ELECTRODINAMICE

Funcționarea instrumentelor electrodinamice se bazează pe forța (electrodinamică) de interacțiune dintre două bobine parcurse de curent. Una din bobine este fixă, formată din două jumătăți, iar cealaltă este mobilă și solidară cu acul indicator (fig. 9-8 și fig. 9-9).

Ţinînd seama de expresia forței electrodinamice dintre două conductoare paralele parcurse de curent și considerînd cîmpul magnetic din interiorul bobinei fixe omogen (fig. 9-8), se obține următoarea expresie pentru valoarea momentană a cuplului activ :

$$c=k_a i_1 i_2 \sin\alpha, \qquad (9\text{-}23)$$

în care i_1 și i_2 sînt curenții din bobina fixă, respectiv din bobina mobilă, α este unghiul dintre axele celor două bobine iar k_a, o constantă de proporționalitate.

Dacă liniile cîmpului magnetic din interiorul bobinei fixe sînt perpendiculare pe cercul descris de laturile bobinei mobile, ceea ce se obține la anumite dimensiuni ale bobinelor (fig. 9-9), atunci valoarea momentană a cuplului activ este :

$$c=k_a i_1 i_2. \qquad (9\text{-}24)$$

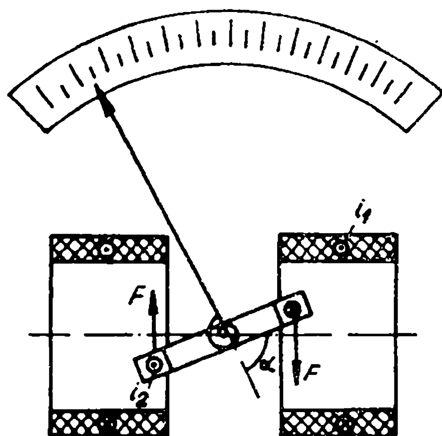


Fig. 9-8. Schița instrumentului electrodinamic cu cîmp magnetic uniform.

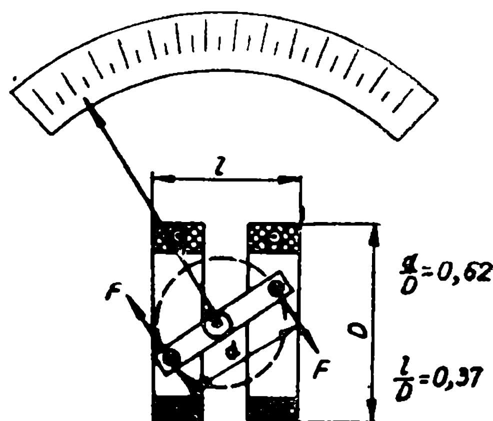


Fig. 9-9. Schița instrumentului electrodinamic cu cîmp magnetic neuniform.

În general, cuplul activ al instrumentelor electrodinamice este slab și ușor influențat de cîmpurile magnetice exterioare.

Instrumentele electrodinamice pot fi folosite ca ampermetre, voltmetre sau wattmetre, pentru măsurări în c.c. și în c.a. În c.c. avem $i=I$ (constant), iar cuplul activ $c=C$. În schimb, în c.a. cuplul activ c are variație pulsatorie în timp și este necesar să se calculeze o valoare medie a acestui cuplu.

Cuplul rezistent este determinat de resoarte spirale, fiind proporțional cu deformația elastică a acestora. Resoartele spirale îndeplinesc în același timp și rolul de a conduce curentul la bobina mobilă.

În timpul măsurării, acul indicator se oprește în dreptul diviziunii pentru care este îndeplinită egalitatea dintre valoarea medie a cuplului activ și cea a cuplului rezistent.

În cazul folosirii instrumentului electrodinamic ca ampermetru, cele două bobine, fixă și mobilă, sînt legate între ele astfel încît curenții i_1 și i_2 sînt fiecare proporționali cu curentul i de măsurat, iar în cazul folosirii ca voltmetru sînt proporționali cu tensiunea u aplicată la bornele instrumentului. La folosirea ca wattmetru, bobina fixă este de curent și se leagă în serie cu circuitul, iar cea mobilă este de tensiune și se leagă în paralel cu circuitul.

În curent alternativ, valoarea medie în raport cu o perioadă a cuplului activ este proporțională cu patratul valorii efective a curentului în cazul ampermetrului și cu patratul valorii efective a tensiunii în cazul voltmetrului. Deci, cu instrumente de acest tip se măsoară valorile efective ale curentului, respectiv tensiunii alternative. În schimb, dacă instrumentul electrodinamic este folosit ca wattmetru, valoarea medie a cuplului activ depinde și de defazajul dintre tensiune și curent (v. măsurarea puterii active).

În general instrumentele electrodinamice sînt instrumente de precizie dar, în același timp, sensibile la suprasolicitări și scumpe. Se folosesc ca instrumente de laborator și de tablou.

Dacă bobinele instrumentelor electrodinamice sînt prevăzute cu miezuri de fier, ele se numesc *instrumente ferodinamice.*

Aplicația 9-4. Să se stabilească expresia cuplului activ ce acționează asupra sistemului mobil al unui instrument electrodinamic.

Rezolvare. Referindu-ne la fig. 9-8, se notează cu :

N_1, N_2 — numărul de spire al bobinei fixe, respectiv mobile ;

S_2 — aria bobinei mobile ;

l_1 — lungimea bobinei fixe.

Conform relației (9-4) :

$$c=\left(\frac{\partial W_m}{\partial \alpha}\right)_{i=\text{const.}}$$

unde W_m este energia magnetică totală a sistemului fix, cuplat magnetic cu sistemul mobil. Exprimînd această energie în funcție de inductanțele proprii L_1, L_2 a bobinei fixe, respectiv mobile, și de inductanța mutuală $L_{12}=L_{21}$ dintre cele două bobine, se obține :

$$W_m=\frac{1}{2}L_1i_1^2+\frac{1}{2}L_2i_2^2+L_{12}i_1i_2.$$

Avînd în vedere că doar inductanța mutuală L_{12} depinde de unghiul α, adică de poziția relativă a bobinelor fixă și mobilă, rezultă :

$$c=i_1i_2\frac{\partial L_{12}}{\partial \alpha}. \qquad (9\text{-}25)$$

Cîmpul din interiorul bobinei fixe fiind considerat omogen, avem :

$$L_{12}=\frac{\psi_{12}}{i_1}=\frac{\Phi_{12}N_2}{i_1}=\frac{N_2}{i_1}\int_{S_2}\bar{B}_{12}\,d\bar{s}=\frac{N_2}{i_1}B_{12}S_2\cos(180-\alpha)=$$

$$=-\frac{N_2}{i_1}\mu_0H_{12}S_2\cos\alpha=-\frac{N_2}{i_1}\mu_0\frac{N_1i_1}{l_1}S_2\cos\alpha=-\mu_0\frac{N_1N_2}{l_1}S_2\cos\alpha,$$

de unde rezultă :

$$\frac{\partial L_{12}}{\partial \alpha}=\mu_0\frac{N_1N_2}{l_1}S_2\sin\alpha.$$

Deci

$$c=\mu_0\frac{N_1N_2}{l_1}S_2i_1i_2\sin\alpha=k_ai_1i_2\sin\alpha,$$

unde $k_a=\mu_0\frac{N_1N_2}{l_1}S_2$ este o constantă.

9.2.4. INSTRUMENTE DE INDUCȚIE

Funcționarea instrumentelor de inducție are la bază fenomenul inducției electromagnetice, de unde provine și denumirea lor. Evident că aceste instrumente funcționează numai în curent alternativ.

În general, instrumentele de inducție pot fi ampermetre, voltmetre sau wattmetre. În practică însă, instrumentul de inducție cel mai frecvent întîlnit este contorul pentru măsurarea energiei electrice (instrument integrator). De aceea, în cele ce urmează se prezintă principiul de funcționare al contorului monofazat.

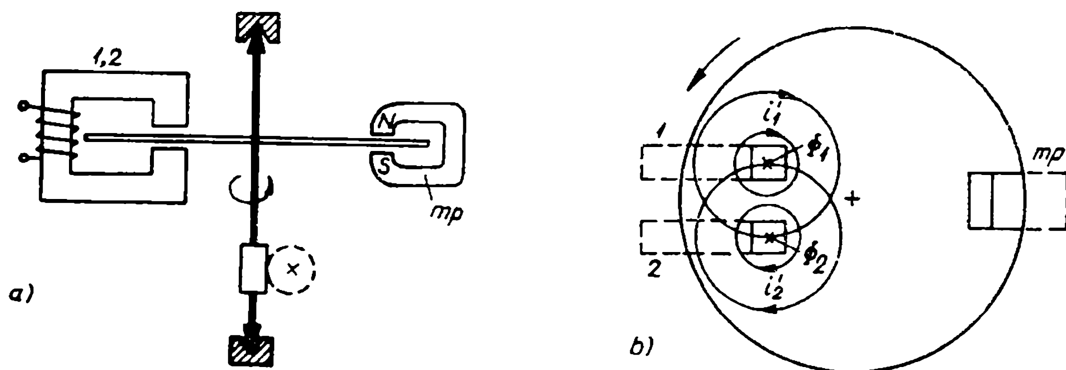


Fig. 9-10. Schița instrumentului de inducție (contorul electric) :
a — vedere laterală; b — vedere frontală.

În fig. 9-10, *a* și *b* este arătată, în principiu, construcția contorului monofazat. Sistemul mobil al instrumentului constă dintr-un disc de aluminiu fixat pe un ax. Prin rotirea discului se pune în mișcare sistemul de înregistrare numerică a contorului. Sistemul fix constă din doi electromagneți, *1* și *2*, al căror circuit magnetic este prevăzut fiecare cu un întrefier prin care se mișcă discul. De asemenea, discul se mișcă și printre polii unui magnet permanent *mp*.

Unul din cei doi electromagneți, spre exemplu electromagnetul *1*, are bobina de curent legată în serie cu circuitul, iar electromagnetul *2* are bobina de tensiune legată paralel cu circuitul. Se notează cu i_1 și i_2 valorile momentane respectiv cu I_1 și I_2 valorile efective ale curenților din cele două bobine. Neglijînd rezistența ohmică a bobinei de tensiune în raport cu reactanța sa inductivă, curentul I_2 din această bobină este defazat în urmă cu 90° față de tensiunea aplicată bobinei (fig. 9-11). Curentul I_1 este defazat față de tensiune cu unghiul φ determinat de caracterul circuitului monofazat la care se măsoară energia cu contorul respectiv.

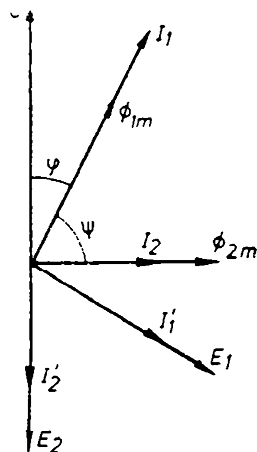


Fig. 9-11. Diagrama fazorială pentru instrumentul de inducție.

În întrefierurile celor doi electromagneți iau naștere fluxurile variabile în timp Φ_1 și Φ_2, produse de curenții i_1, respectiv i_2 și în fază cu acești curenți. Valorile maxime ale acestor fluxuri se notează cu Φ_{1m} și Φ_{2m}.

Conform legii inducției electromagnetice, în disc se induc tensiunile electromotoare e_1 și e_2 decalate în urmă cu 90° față de fluxul Φ_1, respectiv Φ_2 (fig. 9-11). Fiecare din aceste tensiuni electromotoare dă naștere în metalul discului la cîte un curent i_1', respectiv i_2', care sînt în fază cu tensiunile electromotoare ce îi produc, deoarece discul prezintă numai rezistență ohmică.

Ținînd seama de defazajele din fig. 9-11, se pot scrie următoarele relații:

$$i_1 = \sqrt{2} I_1 \sin \omega t, \quad i_2 = \sqrt{2}\, I_2 \sin (\omega t - \psi),$$

$$\Phi_1 = \Phi_{1m} \sin \omega t, \quad \Phi_2 = \Phi_{1m} \sin (\omega t - \psi),$$

$$e_1 = \sqrt{2} E_1 \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \quad e_2 = \sqrt{2} E_2 \sin \left(\omega t - \psi - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$i_1'=\sqrt{2}I_1'\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right),\quad i_2'=\sqrt{2}I_2'\sin\left(\omega t-\psi-\frac{\pi}{2}\right),$$

în care ψ este unghiul dintre Φ_{1m} și Φ_{2m}.

Cuplul activ, care pune în mișcare de rotație discul, este determinat de interacțiunea dintre cîmpurile magnetice Φ_1 și Φ_2 și curenții i_1' și i_2' din disc. Valoarea instantanee a cuplului activ are patru componente :

$$c=c_1+c_2+c_3+c_4. \tag{9-26}$$

Fiecare din aceste componente este proporțională cu produsul dintre valoarea momentană a unui flux și valoarea momentană a unui curent :

$$c_1=k_{a1}\Phi_1 i_2',\qquad c_2=k_{a2}\Phi_2 i_1', \tag{9-27}$$
$$c_3=k_{a3}\Phi_1 i_1',\qquad c_4=k_{a4}\Phi_2 i_2'.$$

Calculînd valorile medii în raport cu o perioadă ale acestor cupluri, rezultă :

$$C_1=\frac{1}{T}\int_0^T c_1\,dt=-k_{a1}\,\Phi_{1m}\,\sqrt{2}I_2'\sin\psi,$$
$$C_2=\frac{1}{T}\int_0^T c_2\,dt=k_{a2}\,\Phi_{2m}\,\sqrt{2}I_1'\sin\psi, \tag{9-28}$$
$$C_3=\frac{1}{T}\int_0^T c_3\,dt=0,\quad C_4=\frac{1}{T}\int_0^T c_4\,dt=0,$$

de unde, avînd în vedere că în cazul miezurilor de fier nesaturate există proporționalitățile : $I_1'\sim E_1\sim\Phi_{1m}$, $I_2'\sim E_2\sim\Phi_{2m}$, se obține :

$$C_1=-k_1\Phi_{1m}\Phi_{2m}\sin\psi,\quad C_2=k_2\Phi_{1m}\Phi_{2m}\sin\psi, \tag{9-29}$$

în care k_1 și k_2 sînt constante. Aceste două cupluri determină valoarea medie a cuplului activ rezultant, care este :

$$C=C_1+C_2=(k_2-k_1)\,\Phi_{1m}\Phi_{2m}\sin\psi$$

sau,

$$C=k\Phi_{1m}\Phi_{2m}\sin\psi, \tag{9-30}$$

unde $k=k_2-k_1$.

Prin urmare, *cuplul activ la instrumentele de inducție este proporțional cu produsul dintre fluxurile magnetice care străbat discul și sinusul unghiului de defazaj dintre aceste fluxuri.*

Cuplul rezistent este determinat de curenții turbionari ce iau naștere în disc datorită mișcării lui printre polii magnetului permanent și este proporțional cu turația :

$$C_r=k_r n. \tag{9-31}$$

Spira în scurtcircuit intervine în cazul folosirii instrumentului de inducție ca ampermetru sau ca voltmetru, cînd sistemul fix este prevăzut cu o singură bobină, situată pe un singur miez feromagnetic cu întrefier. Funcționarea instrumentului pretinde însă existența a două fluxuri magnetice Φ_1 și Φ_2 defazate între ele cu unghiul ψ, așa cum s-a explicat mai sus. Pentru realizarea celor două fluxuri

magnetice defazate, se procedează astfel : un pol al electromagnetului se împarte în două jumătăți printr-o crestătură. Pe una din aceste jumătăți se așază o spiră în scurtcircuit (fig. 9-12). Această spiră are rolul de a defaza fluxurile Φ_1 și Φ_2 din cele două jumătăți ale miezului.

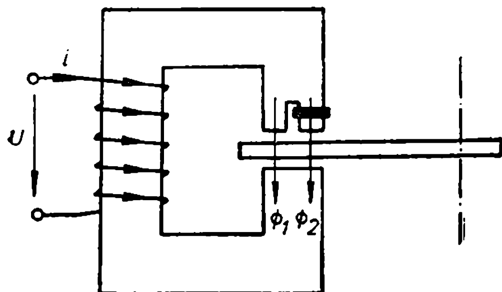


Fig. 9-12. Electromagnetul prevăzut cu spiră în scurtcircuit.

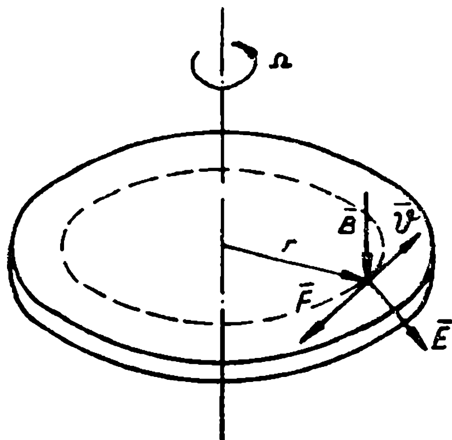


Fig. 9-13. Forța determinată de magnetul permanent.

Aplicația 9-5. Să se stabilească expresia cuplului rezistent ce acționează asupra discului unui contor electric.

Rezolvare. Cuplul rezistent este determinat de mișcarea discului printre polii magnetului permanent (fig. 9-10). Conform legii inducției electromagnetice, intensitatea cîmpului electric indus în disc datorită mișcării acestuia într-un cîmp magnetic este (fig. 9-13) :

$$\bar{E}=\bar{v}\times\bar{B},$$

de unde, ținînd seama că unghiul dintre $\bar{v}$ și $\bar{B}$ este 90°, rezultă :

$$E=vB=\omega rB=\frac{2\pi n}{60}\,rB,$$

în care n este turația discului în rot/min și r este raza măsurată pînă la punctul în care se calculează E.

Conform legii lui Ohm (forma locală), se obține următoarea expresie a densității de curent din disc :

$$J_d=\sigma E=\sigma\frac{2\pi n}{60}\,rB.$$

Prin secțiunea transversală S_d a discului, situată între polii magnetului permanent, există curentul :

$$i_d=S_d\cdot J_d=S_d\sigma\frac{2\pi n}{60}\,rB.$$

Forța ce acționează asupra discului în zona străbătută de curentul i_d și determinată de cîmpul magnetului permanent, se calculează cu formula lui Laplace :

$$\bar{F}=\int_{l_d} i_d\,[d\bar{l}\times\bar{B}],$$

unde l_d este porţiunea din disc, măsurata în lungul razei, situată între polii magnetului. Valoarea acestei forţe este:

$$F=i_d l_d B=S_d \sigma \frac{2\pi n}{60} r B l_d B.$$

Cuplul rezistent determinat de forţa F se calculează cu relaţia:

$$C_r=Fr=S_d l_d \sigma \frac{2\pi}{60} B^2 r^2 n$$

sau

$$C_r=k_r n,$$

unde

$$k_r=S_d l_d \sigma \frac{2\pi}{60} B^2 r^2$$

este o constantă deoarece B=const. şi $r \simeq$ const. pentru toată zona din disc de volum $S_d l_d$, situată între polii magnetului permanent.

9.2.5. GALVANOMETRE

Măsurarea curenţilor şi a tensiunilor foarte mici, de ordinul μA, respectiv μV, nu se poate realiza cu instrumentele obişnuite descrise mai sus din cauza cuplului de frecare care poate fi mai mare decît cuplul activ. În acest scop, sînt necesare instrumente mult mai sensibile, denumite galvanometre.

Galvanometrele sînt instrumente de tip magnetoelectric la care sistemul mobil este suspendat printr-un fir metalic de torsiune (fig. 9-14) care are, în acelaşi timp, şi rolul de a produce cuplul rezistent şi, în unele cazuri, de a conduce curentul la bobina mobilă. Acul indicator al instrumentului poate fi înlocuit

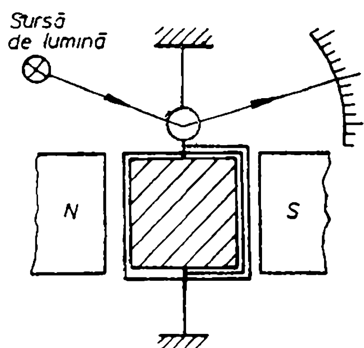


Fig. 9-14. Schiţa galvanometrului magnetoelectric.

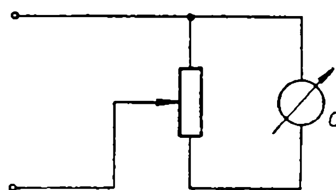


Fig. 9-15. Şuntarea galvanometrului.

printr-un spot luminos reflectat de o oglindă ce se roteşte solidar cu sistemul mobil. Deci, există galvanometre cu ac indicator şi cu spot luminos.

Este foarte important de reţinut că un galvanometru nu se introduce direct în circuit, ci împreună cu un şunt, cu ajutorul căruia se poate modifica sensibilitatea galvanometrului (fig. 9-15).

Galvanometrele se folosesc pentru măsurări în c.c. şi c.a. În unele situaţii, pentru măsurări în c.a., la sistemul mobil se ataşează un termocuplu.

Galvanometrele balistice au sistemul mobil cu inerție mare, încît perioada oscilațiilor proprii este mult mai mare decît durata impulsului de curent ce trece prin bobina sa. Practic, sistemul mobil nici nu începe să se rotească pînă cînd impulsul primit deja nu mai există. Cu galvanometrul balistic se măsoară, de exemplu, sarcina electrică transportată de curentul sub formă de impuls ce trece prin sistemul mobil. Se poate demonstra că sarcina electrică este proporțională cu amplitudinea primei oscilații a galvanometrului (calibrarea galvanometrului balistic va fi prezentată la aplicația 10-1).

Există și *galvanometre de rezonanță*, folosite în c.a., la care frecvența proprie de oscilație a sistemului mobil este egală cu frecvența mărimii de măsurat. În acest caz, pe scala gradată apare o linie luminoasă de lungime proporțională cu de două ori amplitudinea mărimii măsurate.

9.2.6. LOGOMETRE

Logometrele sînt instrumente de măsurare la care sistemul mobil este prevăzut cu două elemente de producere a cuplului : unul pentru cuplul activ și al doilea pentru cuplul antagonist. Tipul instrumentului poate fi : magnetoelectric, electromagnetic sau electrodinamic.

Sistemul mobil al logometrelor de tip magnetoelectric și electrodinamic este prevăzut cu două bobine, situate de regulă la 90° una față de alta, care produc cuplul activ și cuplul antagonist (fig. 9-16).

Logometrele nu sînt prevăzute cu resoarte spirale pentru producerea cuplului rezistent. Ca urmare, în stare de nefuncționare, acul indicator se poate situa în dreptul oricărei diviziuni de pe scala gradată. Conducerea curentului la bobinele sistemului mobil se face prin benzi maleabile din aur, care nu dezvoltă un cuplu de torsiune.

Folosirea logometrelor pentru măsurarea unor mărimi va fi prezentată la paragrafele următoare.

Aplicația 9-6. Să se stabilească expresia de calcul a cuplurilor ce acționează asupra sistemului mobil al unui logometru, considerînd cîmpul magnetic creat de sistemul fix ca fiind omogen.

Rezolvare. Se notează cu i_1 și i_2 curenții din cele două bobine ale sistemului mobil, așezate la 90° una față de alta (fig. 9-17), cu l_1, l_2 lungimea și cu d_1, d_2 lățimea bobinelor. Forțele $\bar{F_1}$

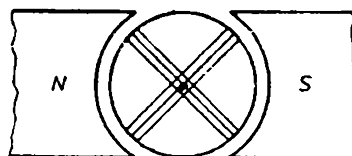


Fig. 9-16. Schița logometrului magnetoelectric.

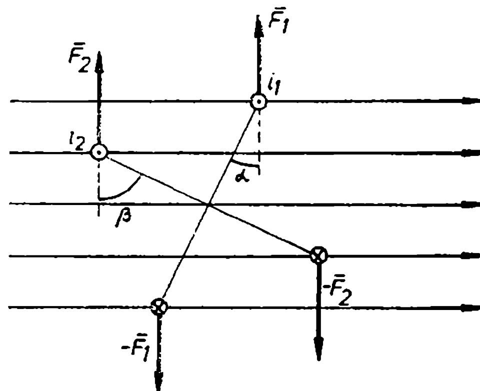


Fig. 9-17. Cuplurile ce acționează asupra sistemului mobil al logometrului magnetoelectric.

și $\overline{F}_2$ ce acționează asupra laturilor celor două bobine se calculează cu formula lui Laplace: $d\overline{F}=i\,[d\overline{l}\times\overline{B}]$, obținîndu-se:

$$F_1=N_1i_1l_1B, \qquad F_2=N_2i_2l_2B.$$

Cuplurile determinate de perechile de forțe $\overline{F}_1$, $-\overline{F}_1$ și $\overline{F}_2$, $-\overline{F}_2$ sînt:

$$c_1=F_1d_1\sin\alpha=N_1i_1l_1Bd_1\sin\alpha=N_1S_1Bi_1\sin\alpha, \tag{9-32}$$

$$c_2=F_2d_2\cos\alpha=N_2i_2l_2Bd_2\cos\alpha=N_2S_2Bi_2\cos\alpha,$$

unde $S_1=l_1d_1$ și $S_2=l_2d_2$ sînt ariile celor două bobine, iar N_1 și N_2 numărul de spire al fiecăreia.

Cuplul rezultant este: $c=c_1-c_2$.

9.2.7. PUNȚI DE MĂSURARE

Punțile de măsurare sînt de diverse tipuri și folosite în scopuri multiple. Astfel, există punți de curent continuu, folosite pentru măsurarea rezistențelor (mari și mici) și punți de curent alternativ, folosite pentru măsurarea inductanțelor, capacităților, frecvenței etc.

În principiu, schema electrică a unei punți este reprezentată în fig. 9-18. Între punctele diagonale $a-b$ se aplică o tensiune (de la o sursă de alimentare) iar între punctele diagonale $c-d$ se leagă un instrument (galvanometru), prin care se sesizează starea de echilibru a punții. Cele patru brațe ale punții sînt constituite din rezistențe sau impedanțe.

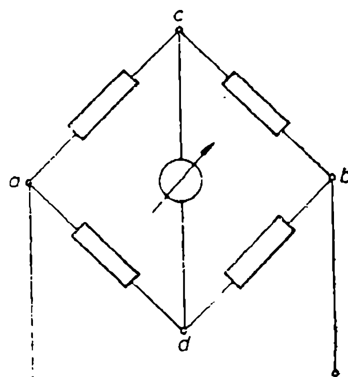


Fig. 9-18. Schema punții de măsură.

Cu majoritatea punților măsurarea se efectuează prin stabilirea stării de echilibru, caracterizată prin diferență de potențial nulă între punctele $c-b$. Există însă și punți cu care se măsoară prin dezechilibrare.

9.3. MĂSURAREA CURENTULUI ELECTRIC

9.3.1. AMPERMETRE

Instrumentul cu ajutorul căruia se măsoară curentul electric se numește ampermetru. Cuplul activ ce acționează asupra sistemului mobil al ampermetrului, oricare ar fi tipul său constructiv, este o funcție de curentul de măsurat.

Ampermetrul se leagă în serie cu circuitul parcurs de curentul a cărui valoare se măsoară (fig. 9-19). De aceea, ampermetrul trebuie să aibă o rezistență interioară R_A mică pentru ca, prin intercalarea sa în circuit, să nu se modifice curentul și consumul propriu al instrumentului să fie minim. Legarea ampermetrului în paralel cu circuitul înseamnă practic un scurtcircuit prin intermediul instrumentului, care conduce la deteriorarea lui.

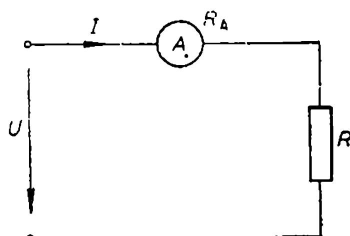


Fig. 9-19. Legarea în circuit a ampermetrului.

Măsurarea curentului continuu se poate face cu ampermetre de tip magnetoelectric, electromagnetic sau electrodinamic. Se folosesc, cu preferință, instrumentele magnetoelectrice.

Măsurarea curentului alternativ poate fi făcută cu ampermetre magnetoelectrice prevăzute cu redresor sau cu termoelemente. În primul caz valoarea medie a cuplului activ este proporțională cu valoarea medie a curentului redresat, iar în al doilea caz cuplul activ este proporțional cu patratul valorii efective a curentului. De asemenea, pentru măsurarea curentului alternativ, se pot folosi ampermetre electromagnetice, electrodinamice sau de inducție.

9.3.2. EXTINDEREA DOMENIULUI DE MĂSURARE AL AMPERMETRELOR

Extinderea domeniului de măsurare al unui ampermetru poate fi realizată cu ajutorul șunturilor sau al transformatoarelor de măsurare de curent.

Șunturile sînt rezistoare cu rezistență de valoare foarte redusă, legate în paralel cu instrumentul (fig. 9-20). Rezistența R_s a șuntului se determină în funcție de rezistența interioară R_A a instrumentului și de raportul k_I de multiplicitate al șuntului :

$$k_I = \frac{I}{I_A} > 1, \tag{9-33}$$

unde I_A este curentul prin instrument și I este curentul de măsurat. Ținînd seama de schema reprezentată în fig. 9-20, se pot scrie relațiile :

$$I = I_s + I_A, \quad R_A I_A = R_s I_s, \quad R_s = \frac{I_A}{I_s}, \quad R_A = \frac{I_A}{I - I_A} R_A,$$

adică

$$R_s = \frac{1}{k_I - 1} R_A. \tag{9-34}$$

Rezistența șuntului fiind mult mai mică decît rezistența interioară a ampermetrului, prin șunt trece cea mai mare parte a curentului de măsurat.

Șunturile se construiesc din manganină (84% Cu, 12% Mn, 4% Ni), care are proprietăți electrice și fizice relativ constante, rezistivitatea de circa $0{,}42\ \Omega mm^2/m$, coeficientul de temperatură redus, de $0{,}00003/°C$. Șunturile se realizează sub formă de bobine, bare rotunde, platbande etc.

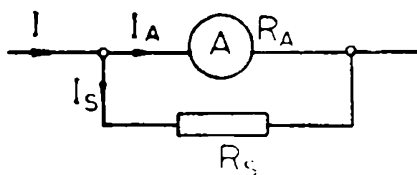


Fig. 9-20. Schema ampermetrului cu șunt.

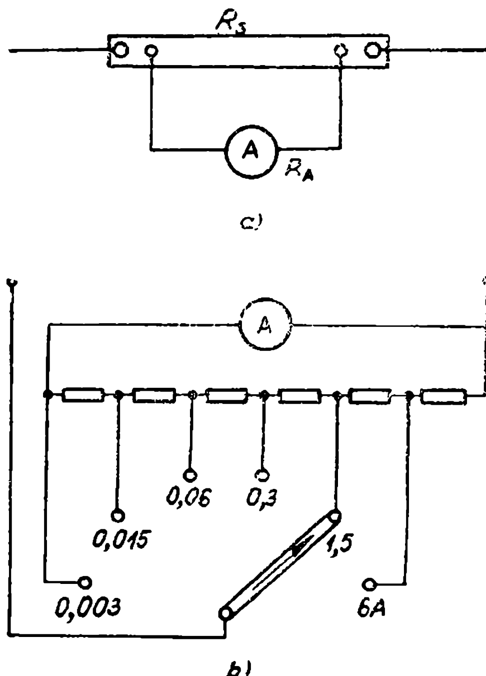


Fig. 9-21. Schema ampermetrului cu mai multe domenii de măsurare (cu șunturi interioare).

La unele tipuri constructive de ampermetre, șunturile se montează în exterior, prin legarea lor la cele două borne ale instrumentului. Unele șunturi exterioare, de precizie mai ridicată, sînt prevăzute cu patru borne : două borne principale — de curent — și două borne auxiliare — la care se leagă instrumentul de măsurare, așa cum este arătat în fig. 9-21, *a*.

La ampermetrele cu mai multe domenii de măsurare, șunturile sînt multiple și se montează în interiorul cutiei instrumentului, schimbarea lor făcîndu-se cu ajutorul unui comutator. În fig. 9-21, *b* este arătată schema unui ampermetru cu șunturi interioare.

Șunturile exterioare au marcate pe ele curentul care poate fi măsurat de instrumentul prevăzut cu șuntul respectiv și căderea de tensiune pe șunt corespunzătoare curentului nominal, exprimată în mV, care trebuie să fie egală cu căderea de tensiune nominală pe rezistența interioară a instrumentului. Valorile standardizate pentru căderea nominală de tensiune sînt : 60, 75, 100 sau 150 mV.

Constanta unui ampermetru prevăzut cu șunt este :

$$K = \frac{\text{valoarea curentului înscrisă pe șunt}}{\text{numărul total de diviziuni de pe scală}} \left[\frac{\text{A}}{\text{div.}}\right]$$

Această constantă se calculează în acest fel numai dacă șuntul și instrumentul căruia i se atașează au aceeași cădere nominală de tensiune. În caz contrar, constanta se calculează ținîndu-se seama și de neegalitatea căderilor de tensiune.

Aplicația 9-7. Șuntul normal al unui ampermetru are domeniul $I_N = 7{,}5$ A și căderea de tensiune $U_N = 60$ mV. Să se calculeze curentul maxim ce poate fi măsurat cu ampermetrul, dacă i se atașează alt șunt, cu datele $I_{N1} = 15$ A, $U_{N1} = 100$ mV.

Rezolvare. Folosind schema din fig. 9-20, se pot scrie pentru ampermetrul prevăzut cu șuntul normal următoarele relații :

$$U_N = I_{AN} R_A = I_{sN} R_s, \quad I_{sN} = I_N - I_{AN} \cong I_N \quad (I_{AN} \ll I_N)$$

de unde rezultă :

$$R_s = \frac{U_N}{I_{sN}} \cong \frac{U_N}{I_N}, \quad R_A = \frac{U_N}{I_{AN}}.$$

Pentru al doilea șunt se obțin :

$$U_{N1} = I_{sN1} R_{s1} \cong I_{N1} R_{s1}, \quad R_{s1} = \frac{U_{N1}}{I_{N1}}.$$

Condiția ca prin instrument curentul să nu se modifice prin montarea celui de-al doilea șunt este :

$$I_{AN} R_A = I'_N R_{s1},$$

unde I'_N este curentul maxim ce se poate măsura de instrumentul cu al doilea șunt.

Din relațiile scrise se obține :

$$I'_N = \frac{R_A}{R_{s1}} I_{AN} = \frac{U_N}{U_{N1}} \frac{I_{N1}}{I_{AN}} I_{AN} = \frac{60}{100} 15 = 9 \text{ A}.$$

9.3.3. FOLOSIREA TRANSFORMATOARELOR DE CURENT

Pentru măsurarea curentului alternativ de valoare mare, ampermetrul se leagă în circuit prin intermediul unui transformator de măsurare de curent (reductor de curent). Înfășurarea primară a transformatorului de curent, realizată cu un număr de spire N_1 mic, se leagă în serie cu circuitul străbătut de

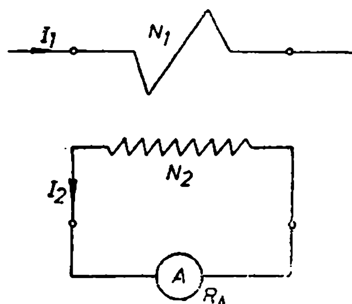


Fig. 9-22. Legarea ampermetrului prin transformatorul (reductorul) de curent.

curentul de valoare mare, care se măsoară, iar la bornele înfășurării secundare, realizată cu un număr de spire N_2 mai mare, se leagă ampermetrul (fig. 9-22).

Raportul curenților I_1 și I_2 din primar și din secundar, în condițiile în care se neglijează curentul de magnetizare, este :

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}, \qquad (9\text{-}35)$$

adică în circuitul secundar se măsoară un curent de $\frac{N_2}{N_1}$ ori mai mic decît curentul din primar. Curentul nominal din circuitul secundar este, de obicei, 5 A.

Rezistența interioară a ampermetrului legat în circuitul secundar este foarte mică, din care cauză transformatorul de curent funcționează practic în regim de scurtcircuit. Cînd ampermetrul lipsește din circuit, este necesar ca înfășurarea secundară să fie legată în scurtcircuit deoarece funcționarea în gol nu este admisă la acest tip de transformator.

Ampermetrul legat în circuitul secundar poate fi etalonat direct în valorile corespunzătoare curentului din primar, avînd în vedere relația (9-35). O astfel de situație se întîlnește la ampermetrele montate pe tablourile de distribuție ale instalațiilor electrice de putere mare.

În măsurările de laborator, sau de verificare în exploatare, se folosesc transformatoare de curent portative, la care există și posibilitatea de a se schimba raportul de reducere (transformare) al curentului prin schimbarea numărului de spire din primar. În acest scop, înfășurarea primară este prevăzută cu prize. În figura 9-23 este schițat un astfel de transformator de curent, avînd miezul toroidal și înfășurările primară și secundară închise într-o cutie din material plastic. În unele cazuri bobinajul primar al transformatorului de curent este realizat chiar cu conductorul circuitului principal care se trece odată sau de mai multe ori prin fereastra miezului de fier al transformatorului, realizîndu-se în felul acesta numărul de spire necesar.

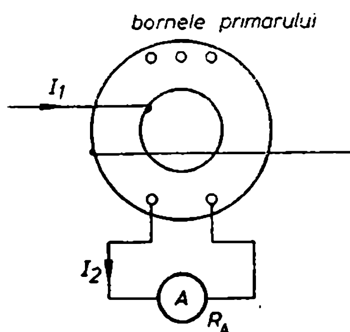


Fig. 9-23. Schița transformatorului de curent cu bobina primară realizată exterior.

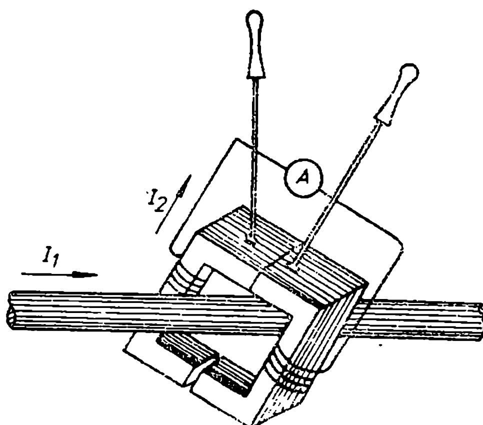


Fig. 9-24. Ampermetrul cleşte.

Dacă circuitul principal nu poate fi întrerupt pentru introducerea transformatorului de măsurare, atunci se folosesc transformatoare de măsurare care au miezul de fier în formă de cleşte (fig. 9-24), dar a căror precizie este mai redusă.

Una din bornele secundare ale transformatorului de curent se leagă obişnuit la masă, mai ales atunci cînd circuitul primar aparţine unei linii de tensiune ridicată. Aceasta cu scopul de a se evita pericolul de electrocutare al operatorului care face manevre în circuitul secundar atunci cînd, dintr-un motiv oarecare, izolaţia dintre primar şi secundar se deteriorează.

Întrucît transformatoarele de curent sînt folosite frecvent în tehnica măsurărilor electrice, sînt utile unele precizări privind construcţia lor şi erorile pe care le introduc, la care ne referim, pe scurt, în cele ce urmează.

Construcţia transformatoarelor de curent. Miezul acestor transformatoare se realizează din tole din oţel aliat cu siliciu sau din oţel aliat cu nichel. Pentru a micşora cît mai mult curentul magnetizant, rosturile trebuie să fie cît mai mici. În acest scop la unele tipuri constructive miezul este realizat din bandă feromagnetică înfăşurată în formă de tor. Inducţia magnetică în miez are valori mici (max. 0,3 T), deci transformatorul de curent funcţionează nesaturat. Bobina primară trebuie să aibă izolaţia corespunzătoare tensiunii circuitului în care se intercalează.

Dependent de tensiune, de locul de folosire şi de unele elemente constructive, se disting următoarele tipuri de transformatoare de curent :

— transformatoare de curent de laborator (portative), executate pentru tensiuni pînă la 1 kV ;

— transformatoare de curent pentru alimentarea instrumentelor de măsurare şi releelor de pe tablourile de comandă, pentru tensiuni joase (1 kV), cu izolaţia uscată sau din răşină ;

— transformatoare de curent de medie tensiune (10...15 kV), cu izolaţia dintre înfăşurări din porţelan (transformatoare de trecere, de interior) ;

— transformatoare de curent de înaltă tensiune (peste 35 kV), cu ulei, folosite în staţiile de transformatoare etc.

Eroarea transformatoarelor de curent constă din : *eroarea de curent* şi *eroarea de unghi* (*sau de fază*). Pentru a defini aceste două categorii de erori, se scriu ecuaţiile transformatorului (v. relaţia 5-73) :

$$\underline{U}_1=\underline{Z}_1\underline{I}_1+\underline{Z}_M\underline{I}_2,\quad \underline{U}_2=\underline{Z}_2\underline{I}_2+\underline{Z}_M\underline{I}_1, \tag{9-36}$$

unde $\underline{Z}_1$ este impedanţa circuitului primar, $\underline{Z}_2$ — impedanţa circuitului secundar şi $\underline{Z}_M=\mathrm{j}\omega M$ este impedanţa de cuplaj magnetic dintre bobina primară şi cea secundară. Pe de altă parte, amperspirele ce produc magnetizarea miezului sînt :

$$\underline{I}_1N_1+\underline{I}_2N_2=\underline{I}_0N_1, \tag{9-37}$$

unde $\underline{I}_0$ este curentul de magnetizare (raportat la bobina primară N_1).

Avînd în vedere că transformatorul de curent funcţionează teoretic în scurtcircuit ($U_2=0$) şi că curentul de magnetizare se consideră neglijabil ($I_0=0$), din (9-36) şi (9-37) rezultă, în aceste condiţii ideale :

$$\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}=-\frac{\underline{Z}_M}{\underline{Z}_2}=-\frac{N_1}{N_2}\,. \tag{9-38}$$

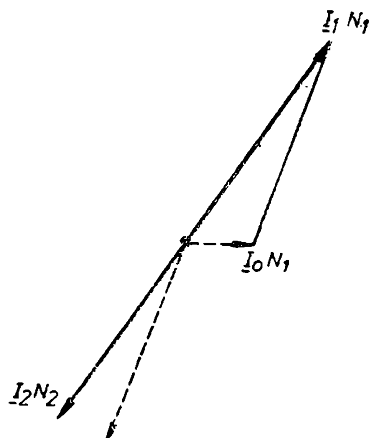


Fig. 9-25. Diagrama curenților (amperspirelor) la transformatorul de curent.

De aici reiese prima condiție, ca $\frac{I_2}{I_1} = \left|\frac{\underline{Z}_M}{\underline{Z}_2}\right| = \frac{N_1}{N_2}$ care, dacă nu este îndeplinită, introduce o eroare de curent. A doua condiție ce rezultă este ca $\arg\left\{\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}\right\} = \arg\left\{-\frac{\underline{Z}_M}{\underline{Z}_2}\right\} = -\pi$, adică $\underline{I}_1$ și $\underline{I}_2$ să fie în opoziție de fază (fig. 9-25), care, dacă nu este îndeplinită, introduce o eroare de unghi (sau de fază).

Eroarea relativă de curent se poate exprima prin relația :

$$\varepsilon_c = \frac{I_2' - I_2}{I_2} = \frac{I_2' \frac{N_2}{N_1} - I_1}{I_1}, \tag{9-39}$$

unde I_1 este curentul (nominal) din primar, I_2' – curentul măsurat în secundar și I_2 — curentul din secundar, în lipsa erorii (corespunzător relației teoretice 9-35).

Eroarea admisibilă de curent și de tensiune introdusă de transformatoarele de curent se exprimă prin clasa de precizie a acestor aparate.

9.4. MĂSURAREA TENSIUNII ELECTRICE

9.4.1. VOLTMETRE

Pentru măsurarea tensiunii electrice se folosesc instrumentele denumite voltmetre, care se leagă în paralel cu circuitul (fig. 9-26).

Cuplul activ al voltmetrelor, oricare ar fi tipul lor, este funcție de tensiunea de măsurat deoarece curentul care intervine în expresia acestui cuplu se exprimă prin raportul dintre tensiune și rezistența interioară a instrumentului. Voltmetrele sînt de fapt miliampermetre prevăzute cu o rezistență interioară foarte mare, de exemplu 1 000 Ω/V. Cu cît un voltmetru are rezistență interioară mai mare, cu atît se pot executa cu el măsurări de precizie mai bună și cu atît consumul propriu al instrumentului este mai mic.

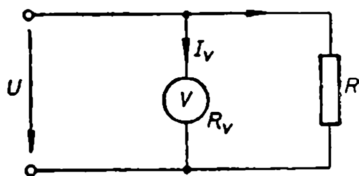


Fig. 9-26. Legarea în circuit a voltmetrului.

Pentru măsurarea tensiunilor continue se folosesc voltmetre de tip magnetoelectric, electromagnetic sau electrodinamic. Măsurarea tensiunilor alternative se face cu voltmetre magnetoelectrice prevăzute cu redresor, electromagnetice, electrodinamice etc. Tensiunile foarte mici se măsoară cu galvanometre sau cu voltmetre electronice.

9.4.2. EXTINDEREA DOMENIULUI DE MĂSURARE AL VOLTMETRELOR

Pentru extinderea domeniului de măsurare a unui voltmetru se utilizează rezistențe adiționale care se leagă în serie cu instrumentul (fig. 9-27). Valoarea rezistenței adiționale R_a se calculează în funcție de rezistența interioară R_i a voltmetrului și de raportul de extindere a domeniului de la valoarea U la valoarea U_1 : $k_V = \frac{U_1}{U}$.

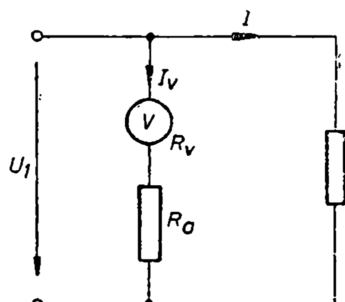


Fig. 9-27. Voltmetrul prevăzut cu rezistență adițională.

Curentul I_V prin voltmetru fiind același cînd nu există rezistență adițională și cînd aceasta există, se poate scrie :

$$I_V = \frac{U}{R_V} = \frac{U_1}{R_V + R_a}$$

și, înlocuind $U_1 = k_V U$, rezultă :

$$R_a = (k_V - 1)\, R_V. \qquad (9\text{-}40)$$

Rezistențele adiționale se confecționează din manganină, care are coeficientul de temperatură practic neglijabil. Pe rezistențele adiționale exterioare se indică valoarea lor în ohmi, deoarece extinderea domeniului de măsurare depinde de valoarea acestor rezistențe, comparativ cu valoarea rezistenței interioare a voltmetrului. La instrumentele multiple, rezistențele adiționale sînt montate în interiorul cutiei, schimbarea lor făcîndu-se cu un comutator.

Constanta voltmetrului prevăzut cu rezistență adițională se calculează împărțind domeniul de măsurare extins la numărul total de diviziuni de pe scală.

9.4.3. FOLOSIREA TRANSFORMATOARELOR DE TENSIUNE

Cînd tensiunea alternativă de măsurat depășește 750 V, pentru măsurarea ei se folosesc transformatoare de măsurare de tensiune (reductoare de tensiune), cu ajutorul cărora, la tensiunea ridicată aplicată în primar, se obține în secundar o tensiune de maxim 100 V. Voltmetrul se leagă la bornele secundare ale transformatorului (fig. 9-28) și poate fi etalonat direct în valori ale tensiunii din primar, avînd în vedere că :

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}, \quad \text{adică} \quad U_2 = \frac{N_2}{N_1} U_1. \qquad (9\text{-}41)$$

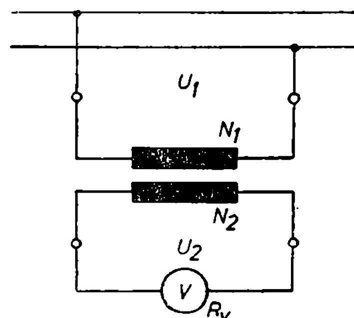


Fig. 9-28. Schema de legare a voltmetrului prin transformatorul (reductorul) de tensiune.

Rezistența interioară a voltmetrului este foarte mare, deci curentul din secundarul transformatorului de tensiune este foarte mic. Practic, se poate considera că transformatorul de măsurare de tensiune este construit pentru a funcționa normal în regim de mers în gol.

Una din bornele secundare ale transformatorului de tensiune se leagă obișnuit la masă, pentru

a se evita pericolul de electrocutare al operatorului ce face manevre în circuitul secundar în cazul cînd izolația dintre primar și secundar se deteriorează.

Transformatoarele de tensiune se realizează pentru tensiuni nominale în primar începînd de la 1 kV, pînă la cele mai înalte tensiuni folosite în sistemele electroenergetice, cu puteri cuprinse între 25. . . 600 VA. Există transformatoare de măsurare de tensiune monofazate și trifazate.

Eroarea transformatorului de tensiune are valoarea admisibilă redată prin clasa sa de precizie și constă din *eroarea de tensiune* și *eroarea de unghi* (*sau de fază*). Pentru definirea și interpretarea acestor erori se folosesc ecuațiile transformatorului scrise în forma (9-36), din care, avînd în vedere că transformatorul de tensiune funcționează teoretic în gol ($I_2=0$), rezultă :

$$\underline{I}_1=\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1},\quad \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}=\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_M}=\frac{N_1}{N_2}, \tag{9-42}$$

unde s-a ținut seama și de relația (9-41). Deci, un transformator ideal de tensiune satisface simultan condițiile : $\frac{U_1}{U_2}=\left|\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_M}\right|=\frac{N_1}{N_2}$ și $\arg\left\{\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\right\}=\arg\left\{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_M}\right\}=0$. Dacă prima din aceste condiții nu este satisfăcută, apare eroarea de tensiune, iar dacă a doua condiție nu este satisfăcută, apare eroarea de unghi (fază).

Eroarea relativă de tensiune se poate exprima prin relația

$$\varepsilon_t=\frac{U_2'-U_2}{U_2}=\frac{U_2\frac{N_1}{N_2}-U_1}{U_1}, \tag{9-43}$$

unde U_1 este tensiunea (nominală) din primar, U_2' — tensiunea măsurată în secundar și U_2 — tensiunea din secundar în lipsa erorii. De exemplu, la un transformator de tensiune din clasa 0,1, eroarea de tensiune nu trebuie să fie mai mare decît $\pm 0,1\%$ și eroarea de unghi să fie mai mică decît 5′.

Unele condiții privind folosirea transformatoarelor de măsurare sînt următoarele :

— una din bornele secundare se leagă la masă din motive de protecție a muncii, așa cum s-a precizat mai sus ;

— nu este permis ca transformatorul de curent să funcționeze în gol și cel de tensiune în scurtcircuit ; funcționarea în gol a transformatorului de curent conduce la supraîncălzirea acestuia datorită fluxului magnetic din miez care crește foarte mult ($I_2=0$ și $I_0=I_1$) ;

— la conectarea transformatoarelor de măsurat trebuie respectate indicațiile de la borne (intrare, ieșire, masă) ;

— consumul instrumentelor de măsurare legate în secundar nu trebuie să depășească puterea nominală a transformatorului, în caz contrar, clasa de precizie nu se păstrează ;

— transformatorul de tensiune trebuie să aibă elemente de protecție (siguranțe fuzibile) atît în primar, cît și în secundar. În schimb, transformatorul de curent nu trebuie să aibă astfel de elemente.

9.4.4. MĂSURAREA TENSIUNILOR ELECTROMOTOARE

Tensiunea electromotoare U_e a unei surse de c.c. este mai mare decît tensiunea la borne U cu căderea de tensiune pe rezistența interioară R_i a sursei (fig. 9-29) :

$$U_e=U+R_iI. \tag{9-44}$$

Cu un voltmetru conectat la bornele sursei se măsoară deci, nu t.e.m., ci tensiunea la borne. Numai dacă $I=0$, adică sursa este în gol, atunci tensiunea măsurată la borne este egală cu t.e.m., cu condiția ca curentul prin voltmetru să fie neglijabil.

Dacă R_V este rezistența interioară a voltmetrului legat la bornele sursei (fig. 9-29), rezultă

$$U=U_e-R_iI=R_VI, \qquad (9\text{-}45)$$

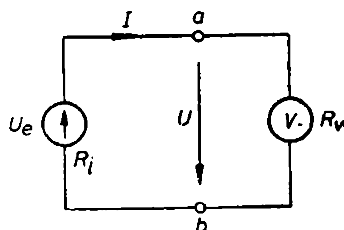


Fig. 9-29. Sursă de t.e.m.

de unde se obțin :

$$I=\frac{U_e}{R_i+R_V}, \quad U_e=\frac{U}{1-\frac{R_i}{R_i+R_V}}. \qquad (9\text{-}46)$$

Se observă că, dacă $R_i \ll R_V$, eroarea comisă prin considerarea $U=U_e$ este neglijabilă. Ca urmare, dacă voltmetrul folosit are o rezistență interioară foarte mare și dacă sursa este în gol, cu ajutorul voltmetrului legat la bornele sursei se măsoară practic t.e.m. a acesteia.

Măsurarea cu precizie a t.e.m. se face cu ajutorul compensatoarelor (v. paragraful 13.2).

9.5. MĂSURAREA CURENȚILOR ȘI TENSIUNILOR DE VALORI MICI CU GALVANOMETRE

Măsurarea curenților și a tensiunilor mici, de ordinul μA, μV și mai mici, nu se poate realiza cu instrumentele de măsurare obișnuite, ale căror domenii de măsurare nu cuprind astfel de valori. În acest scop se folosesc instrumentele de tip galvanometric, de mare sensibilitate, precum și instrumentele electronice. Instrumentele electronice sînt prezentate la capitolul 11. Aici ne vom referi la unele aspecte esențiale ale măsurărilor cu ajutorul unor tipuri de galvanometre care au fost enumerate la paragraful 9.2.5.

Măsurarea curentului continuu cu galvanometrul cu oglindă și riglă gradată, de tip magnetoelectric (cu magnet permanent fix și bobină mobilă). Oglinda se rotește solidar cu bobina mobilă parcursă de curentul de măsurat. În fig. 9-30, *a*, *b*, *c* și *d* sînt reprezentate schematic elemente componente și funcționale ale galvanometrului.

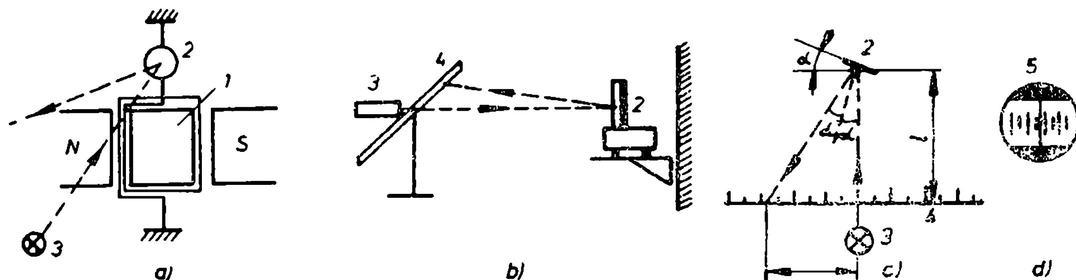


Fig. 9-30. Galvanometrul cu oglindă și riglă gradată :
a — sistemul mobil (*1*) și oglinda (*2*); *b* — așezarea sursei de lumină (*3*) și a riglei gradate (*4*); *c* — unghiul de deviație al spotului luminos; *d* — imaginea de citire de pe rigla gradată.

Se notează cu I_g valoarea curentului prin bobina mobilă *1* a galvanometrului. Conform celor explicate la aplicația 9-3, cuplul activ ce acționează asupra sistemului mobil este proporțional cu acest curent, $C=k_a I_g$. Astfel, ecuația mișcării (9-10) obține forma

$$J\frac{d^2\alpha}{dt}+k_A\frac{d\alpha}{dt}+k_r\alpha=k_a I_g. \tag{9-47}$$

Integrînd această ecuație se obține modul de variație în timp a unghiului de deviație a sistemului mobil (împreună cu oglinda *2*), $\alpha=f(t)$, care depinde de valorile coeficienților din ecuație. Introducînd mărimea

$$\beta=\frac{k_A}{2\sqrt{Jk_r}}, \tag{9-48}$$

denumită *grad de amortizare*, se disting următoarele situații :

Cazul I : $\beta>1$, mișcarea este aperiodică (curba *I* din fig. 9-31) ;

Cazul II : $\beta=1$, mișcarea este aperiodică critică (curba *II*) ;

Cazul III : $\beta<1$, mișcarea este oscilatorie amortizată (curba *III*).

În toate aceste cazuri, după un anumit timp de la apariția curentului I_g, sistemul mobil al galvanometrului se stabilește în poziția de echilibru corespunzătoare acestui curent, avînd deviația

$$\alpha_g=\frac{k_a}{k_r}I_g. \tag{9-49}$$

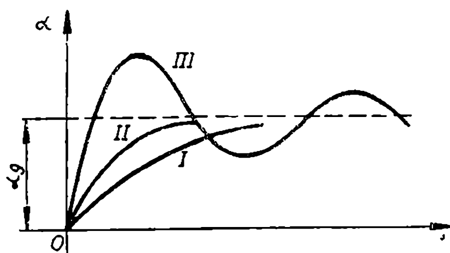


Fig. 9-31. Curbe de variație în timp a unghiului de deviație al galvanometrului.

Se urmărește ca galvanometrul să funcționeze în regim aperiodic critic, ceea ce se realizează prin adaptarea corespunzătoare a unei rezistențe exterioare (rezistența critică).

Sistemul de citire al galvanometrului este prevăzut cu o sursă de lumină (*3*) cu fantă și fir reticular, fixat pe suportul riglei gradate (*4*). Raza de lumină este reflectată de oglinda (*2*) pe rigla gradată, unde se vede o pată luminoasă avînd la mijloc o dungă fină întunecată (imaginea firului reticular, fig. 9-30, *d*), în dreptul căreia se citește diviziunea de pe riglă. Cu notațiile din fig. 9-30, *c* se obține :

$$\alpha_g=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{d}{l}\cong\frac{1}{2}\frac{d}{l}, \tag{9-50}$$

unde s-a considerat $a\ll l$ (obișnuit $l=1$ m).

Introducînd (9-49) în (9-50) se obține :

$$\frac{k_a}{k_r}I_g=\frac{d}{2l} \quad \text{sau} \quad I_g=\frac{k_r}{k_a 2l}d=K_I d, \tag{9-51}$$

în care $K_I=k_r/k_a 2l$ [A/mm] este constanta de curent a galvanometrului, dependentă de distanța l.

Sensibilitatea galvanometrului, egală cu valoarea inversă a constantei K_I (v. relația 9-14), devine mai mare dacă distanța $l>1$ m.

Constanta și sensibilitatea galvanometrului, precum și regimul de oscilație se modifică dacă galvanometrul este prevăzut cu șunt, folosit la măsurarea curenților de valori ce depășesc curentul admisibil al galvanometrului.

Măsurarea tensiunilor continue mici cu ajutorul galvanometrului se realizează, în principiu, în același mod ca măsurarea curenților continui mici, cu deosebirea că, în serie cu galvanometrul, se leagă o rezistență exterioară.

Măsurarea curenților și tensiunilor periodice de valori mici cu ajutorul galvanometrului. În acest caz, sistemul mobil al galvanometrului are o mișcare oscilatorie neamortizată în jurul poziției de zero. Se urmărește ca frecvența oscilațiilor forțate $f=\frac{\omega}{2\pi}$ (frecvența curentului sau tensiunii de măsurat) să coincidă cu frecvența oscilațiilor proprii (libere) ale sistemului mobil $f_0=\frac{\omega_0}{2\pi}=$ $=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_r}{J}}$, cînd amplitudinea oscilațiilor devine maximă (condiția de rezonanță).

La galvanometrele obișnuite, f_0 este de ordinul unităților și dacă $f \geqslant 50$ Hz, rezultă că aceste galvanometre nu pot fi folosite pentru măsurarea curenților și tensiunilor periodice. Este necesar să se folosească galvanometre vibratoare cu momente de inerție J a sistemului mobil foarte mici (v. paragraful 11.3.2).

9.6. MĂSURAREA REZISTENȚELOR ELECTRICE

Problema măsurării rezistențelor electrice are o deosebită importanță în practică. Spre exemplu, foarte frecvent se cere să se măsoare rezistențe electrice ale rezistoarelor, bobinelor, rezistențe ale prizelor de pămînt, rezistențe de izolație etc.

Măsurarea rezistențelor electrice poate fi realizată prin mai multe metode, respectiv folosind diferite instrumente de măsurare. Se deosebesc : metode industriale și metode de laborator, metode de măsurare a rezistențelor foarte mici și mici, a rezistențelor mari (între 1 Ω și 1 MΩ) și a rezistențelor foarte mari (>1 MΩ).

În continuare se prezintă cîteva din metodele și instrumentele uzuale de măsurare a rezistențelor electrice.

9.6.1. METODA VOLT-AMPERMETRICĂ

Dacă se cunoaște tensiunea U_x de la bornele unui rezistor ideal și curentul I_x prin rezistor, valoarea rezistenței rezistorului rezultă din legea lui Ohm :

$$R_x=\frac{U_x}{I_x}. \qquad (9\text{-}52)$$

Se vede că măsurarea rezistenței prin metoda volt-ampermetrică se face indirect, adică se măsoară tensiunea și curentul și din valorile obținute se calculează rezistența.

În schema de măsurare, voltmetrul poate fi legat înainte sau după ampermetru, rezultînd două montaje de măsurare a rezistențelor prin această metodă.

Montajul amonte, reprezentat în fig. 9-32, are voltmetrul legat înaintea ampermetrului. Deci, voltmetrul măsoară tensiunea U egală cu suma dintre căderea de tensiune pe rezistența R_x și căderea de tensiune pe rezistența interioară R_A a ampermetrului. În această situație, rezistența R_x se calculează în modul următor:

$$R_x+R_A=\frac{U}{I_x}, \text{ sau } R_x=\frac{U}{I_x}-R_A. \qquad (9\text{-}53)$$

Dacă rezistența interioară a ampermetrului poate fi neglijată față de rezistența de măsurat ($R_A \ll R_x$), atunci:

$$R'_x \cong \frac{U}{I_x}. \qquad (9\text{-}54)$$

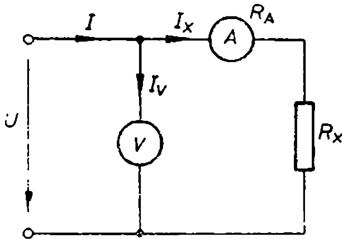


Fig. 9-32. Montajul amonte.

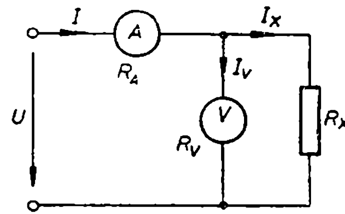


Fig. 9-33. Montajul aval.

Eroarea sistematică (de metodă) care se introduce prin folosirea relației aproximative (9-54) este:

$$\Delta R=R'_x-R_x=R_A, \quad \Delta_r\%=\frac{\Delta R}{R_x}100=\frac{R_A}{R_x}100. \qquad (9\text{-}55)$$

Această eroare este cu atît mai mică, cu cît R_A este de valoare mai mică față de R_x. De aceea, montajul amonte este indicat a fi folosit pentru măsurarea rezistențelor de valoare mare, față de care rezistența interioară a ampermetrului este neglijabilă.

Montajul aval, reprezentat în fig. 9-33, are voltmetrul legat în urma ampermetrului, ceea ce înseamnă că ampermetrul măsoară curentul $I=I_x+I_V$, unde I_V este curentul prin voltmetru.

Valoarea rezistenței măsurate se calculează din relația evidentă:

$$R_x=\frac{U_x}{I_x}=\frac{U_x}{I-I_V}, \quad \text{sau} \quad R_x=\frac{\frac{U_x}{I}}{1-\frac{I_V}{I}}. \qquad (9\text{-}56)$$

Eroarea care se comite calculînd pe R_x cu relația aproximativă

$$R'_x \cong \frac{U_x}{I}=\frac{R_xR_V}{R_x+R_V} \qquad (9\text{-}57)$$

este :

$$\Delta R = R'_x - R_x = \frac{R_x R_V}{R_x + R_V} - R_x = -\frac{R_x^2}{R_x + R_V},$$

$$\Delta_r\% = \frac{\Delta R}{R_x} 100 = -\frac{R_x}{R_x + R_V} 100 = -\frac{1}{1 + \frac{R_V}{R_x}} 100 \qquad (9\text{-}58)$$

Această eroare este cu atît mai mică cu cît curentul I_V este mai mic față de curentul I, adică cu cît rezistența interioară R_V a voltmetrului este mai mare în comparație cu rezistența R_x ce se măsoară. De aceea, montajul amonte este indicat să se folosească pentru măsurarea rezistențelor mici.

De fapt, dacă se cunosc rezistențele interioare ale instrumentelor R_A și R_V, poate fi folosit atît montajul amonte, cît și montajul aval pentru măsurarea rezistențelor mari sau mici deoarece, în această situație, este posibil să se elimine erorile despre care s-a vorbit mai sus. În practică însă, nu întotdeauna se cunosc rezistențele interioare ale instrumentelor de măsurare și, ca urmare, se va folosi montajul amonte pentru măsurarea rezistențelor mari și montajul aval pentru măsurarea rezistențelor mici. Aprecierea inițială asupra valorii mari sau mici a rezistenței este oarecum relativă.

Aplicația 10-8. Pentru măsurarea unei rezistențe R se folosește metoda volt-ampermetrică. Instrumentele de măsurare folosite fiind de clasă de precizie 0,2, să se determine expresia de calcul a erorii totale de măsurare pentru montajul amonte și pentru montajul aval.

Rezolvare. Eroarea relativă de metodă este :

$$\Delta_r = \frac{R_A}{R} \quad \text{— pentru montajul amonte,}$$

$$\Delta_r = -\frac{R}{R_V + R} \quad \text{— pentru montajul aval,}$$

unde R_A și R_V sînt rezistențele proprii ale ampermetrului și voltmetrului. La aceste erori se adaugă și erorile instrumentelor, care sînt $\pm 0{,}2\%$, adică

$$\Delta_U = \frac{\Delta U}{U} = \pm 0{,}002 : \ \Delta_I = \frac{\Delta I}{I} = \pm 0{,}002.$$

Deci, eroarea relativă totală este :

— pentru montajul amonte :

$$\Delta_{rt} = \Delta_r + \Delta_U + \Delta_I = \frac{R_A}{R} \pm 0{,}002 \pm 0{,}002 ;$$

— pentru montajul aval :

$$\Delta_{rt} = \Delta_r + \Delta_U + \Delta_I = -\frac{R}{R_V + R} \pm 0{,}002 \pm 0{,}002.$$

Aceste relații de însumare a erorilor se pot justifica pe cale analitică.

9.6.2. METODA PUNȚII INDUSTRIALE (WHEATSTONE)

Puntea industrială, cunoscută și sub denumirea de punte Wheatstone, este folosită pentru măsurarea rezistențelor electrice cuprinse între circa 1 Ω și 10 000 Ω. Schema acestei punți este reprezentată în fig. 9-34.

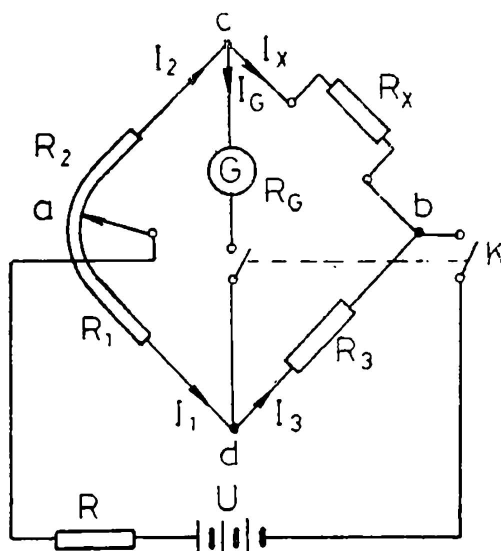


Fig. 9-34. Schema punții industriale (Wheatstone).

Raportul $\frac{R_2}{R_1}$ poate fi modificat de la circa 4, la 60, iar rezistența variabilă R_3 poate primi valorile : 0,1 ; 1 ; 10 ; 100 ; 1 000 Ω. Sursa de curent continuu legată în diagonala $a-b$ a punții constă, de obicei, dintr-o baterie cu tensiunea $U = 4{,}5$ V montată în cutia punții. Rezistența R legată în serie cu sursa are rolul de a limita curentul prin brațele punții.

Pentru măsurarea rezistenței R_x, puntea se aduce la echilibru prin modificarea raportului $\frac{R_2}{R_1}$ și a rezistenței R_3. În această situație, apăsînd pe butonul K, galvanometrul G indică valoarea zero, adică curentul prin diagonală $c-d$ este nul, $I_G=0$. Aceasta înseamnă că se pot scrie relațiile :

$$I_1R_1=I_2R_2,\ I_3R_3=I_xR_x\ ;$$

$$I_1=I_3,\ I_2=I_x.$$

Din aceste relații se obține valoarea rezistenței ce se măsoară :

$$R_x=\frac{R_2}{R_1}R_3. \qquad (9\text{-}59)$$

Eroarea cu care se măsoară rezistențele cu ajutorul punții industriale (simple) este de circa 0,5%. Această eroare depinde, pe de o parte, de sensibilitatea punții și, pe de altă parte, de precizia cu care sînt cunoscute rezistențele R_1, R_2 și R_3 din brațele punții.

Sensibilitatea punții se referă la posibilitatea pe care o oferă galvanometrul său de a sesiza exact condiția $I_G=0$. Galvanometrul are un prag de sensibilitate ΔI_{Gmin}, adică el nu indică curenți cu valorile $I_G<\Delta I_{Gmin}$. Aceasta înseamnă că relația (9-59) nu este îndeplinită cu exactitate, ceea ce constituie o sursă de erori. Cu alte cuvinte, puntea nu sesizează variații ale rezistenței R_x mai mici decît ΔR_{xmin}, corespunzătoare lui ΔI_{Gmin}, eroarea relativă de sensibilitate fiind $\delta=\Delta R_{xmin}/R_x$. Evitarea acestei surse de erori se poate realiza prin alegerea unui galvanometru foarte sensibil (mai pretențios în manipulare) sau prin majorarea tensiunii sursei de alimentare.

Aplicația 9-9. Să se exprime legătura dintre sensibilitatea S a punții industriale și sensibilitatea S_G a galvanometrului său, respectiv parametrii celorlalte elemente din schemă.

Rezolvare. Sensibilitatea punții este dată de relația :

$$S=\frac{d\alpha}{dR_x}=\frac{1}{K_G}\frac{dI_G}{dR_x}=S_G\frac{dI_G}{dR_x},$$

unde α este derivaţia galvanometrului, K_G este constanta şi $S_G = \frac{1}{K_G}$ este sensibilitatea galvanometrului.

Curentul I_G prin latura punţii ce conţine galvanometrul se determină în funcţie de parametrii elementelor din schemă folosind una din metodele cunoscute de calcul a reţelelor de c.c. (de exemplu, metoda teoremelor lui Kirchhoff). Se obţine:

$$I_G = \frac{U\,[R_1R_x - R_2R_3]}{R_G\,(R_1+R_3)\,(R_2+R_x)+R_1R_3\,(R_2+R_x)+R_2R_x\,(R_1+R_3)},$$

din care se calculează $\frac{dI_G}{dR_x}$ şi se înlocuieşte în expresia de mai sus a sensibilităţii punţii. Rezultă:

$$S = S_G U \frac{R_x}{R_G\,(R_1+R_3)\,(R_2+R_x)+R_1R_3\,(R_2+R_x)+R_2R_x\,(R_1+R_3)},$$

de unde se observă că sensibilitatea punţii este direct proporţională cu sensibilitatea galvanometrului, cu tensiunea sursei şi depinde atît de valoarea rezistenţei de măsurat, cît şi de rezistenţele cunoscute, introduse în laturile punţii.

Ca urmare, pentru a obţine o sensibilitate maximă a punţii, trebuie făcută o alegere corespunzătoare a rezistenţelor R_1, R_2 şi R_3, în funcţie de valoarea apreciată anticipat a rezistenţei de măsurat R_x.

9.6.3. MĂSURAREA REZISTENŢELOR MICI CU PUNTEA DUBLĂ (THOMSON)

Domeniul de măsurare a punţii simple (Wheatstone) nu poate fi coborît sub 1 Ω din cauza rezistenţelor parazite (de contact) din braţele punţii, care nu mai pot fi neglijate faţă de rezistenţa de măsurat. Măsurarea rezistenţelor mici se face cu puntea (Thomson) a cărei schemă este reprezentată în fig. 9-35.

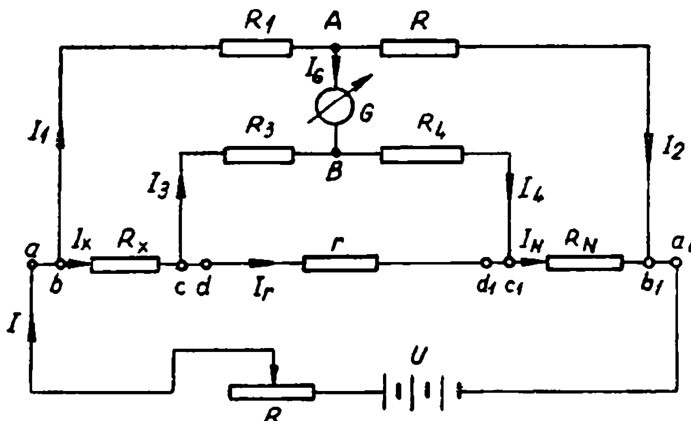


Fig. 9-35. Schema punţii duble (Thomson).

Rezistenţa de măsurat este R_x, iar R_N este rezistenţa etalon. Rezistenţele R_1, R_2, R_3, R_4 şi R sînt reglabile, iar r este o rezistenţă foarte mică, realizată dintr-o bară de cupru. Bornele a, d, a_1, d_1 sînt de curent, iar bornele b, c, b_1, c_1 sînt de tensiune.

Rezistenţele parazite introduse de contactele de la bornele de tensiune se adaugă la rezistenţele R_1, R_2, R_3 şi respectiv R_4, în raport cu care sînt negli-

jabile. Rezistențele parazite de la contactele a, a_1 se exclud fiind în exteriorul punții, iar cele de la contactele d, d_1 se neglijează.

În starea de echilibru a punții se obțin: $I_G=0$, $I_1=I_2$, $I_3=I_4$, $I_N=I_x$, $I_r=I_x-I_3$. Aplicînd, în această stare de echilibru, teorema a II-a a lui Kirchhoff, rezultă ecuațiile:

$$I_1R_1=I_xR_x+I_3R_3,\quad I_3R_3=I_3R_4+I_xR_N,\quad I_3(R_3+R_4)=(I_x-I_3)\,r,$$

din care se obține:

$$R_x=\frac{R_1}{R_2}R_N+\frac{R_4r}{R_3+R_4+r}\left(\frac{R_1}{R_2}-\frac{R_3}{R_4}\right). \qquad (9\text{-}60)$$

Ultimul termen din relația (9-60) se numește corecție și se notează cu

$$C=\frac{R_4r}{R_3+R_4+r}\left(\frac{R_1}{R_2}-\frac{R_3}{R_4}\right). \qquad (9\text{-}61)$$

Deci

$$R_x=\frac{R_1}{R_2}R_N+C, \qquad (9\text{-}62)$$

de unde se vede că, dacă $C=0$, relația de calcul a rezistenței R_x este aceeași ca la puntea simplă.

Corecția C este neglijabilă dacă $r=0$ sau dacă $\frac{R_1}{R_2}=\frac{R_3}{R_4}$. Cum ultima condiție este mai greu de îndeplinit, se impune ca rezistența r să fie foarte mică, ceea ce s-a precizat mai sus.

Schema punții duble reprezentată în fig. 9-35 poate fi redusă la schema punții simple dacă triunghiul cBc_1 se transfigurează în stea.

9.6.4. MĂSURAREA REZISTENȚELOR CU AJUTORUL OHMMETRELOR

Ohmmetrul este instrumentul cu ajutorul căruia se măsoară direct valoarea rezistenței electrice, cu o precizie care nu depășește 1%. Există diferite tipuri de ohmmetre și anume: ohmmetre serie, derivație, în punte, logometrice etc.

Ohmmetrul serie, cu baterie, are schema reprezentată în fig. 9-36. Sursa de curent continuu folosită este, de obicei, o baterie de buzunar de 4,5 V, așezată în cutia aparatului. Se poate folosi și o sursă exterioară. Măsurarea se face cu ajutorul unui instrument magnetoelectric a cărui scală se etalonează direct în ohmi, cuprinzînd intervalul de la $R_x=0$ pînă la $R_x=\infty$. De fapt, instrumentul acestui tip de ohmmetru funcționează ca miliampermetru care măsoară curentul din circuit și a cărui valoare depinde de rezistența R_x.

Cînd $R_x=0$, curentul prin instrumentul de măsurare este maxim admisibil

$$I_{max}=\frac{U_e}{R_p+R_A+R_i}, \qquad (9\text{-}63)$$

respectiv deviația acului indicator este maximă (notată cu zero pe scala gradată în ohmi).

Cînd $R_x=\infty$, acul indicator al instrumentului rămîne nedeviat ($I=0$).

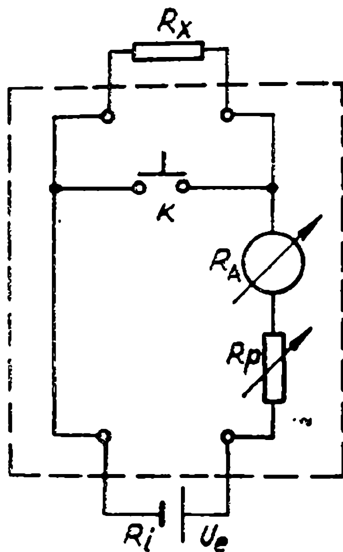


Fig. 9-36. Ohmmetrul serie.

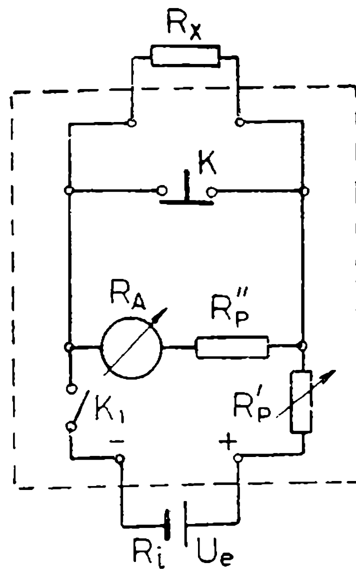


Fig. 9-37. Ohmmetrul derivaţie.

Se observă că gradarea scalei este inversată. Pentru $0<R_x<\infty$, acul indicator ocupă toate poziţiile în lungul scalei.

Indicaţia acestui tip de ohmmetru depinde de tensiunea sursei folosite. Pentru măsurarea rezistenţelor electrice cu o eroare cît mai mică, este necesar ca tensiunea sursei să rămînă riguros constantă. În anumite limite de variaţie a acestei tensiuni, corectarea poate fi făcută modificînd rezistenţa variabilă R_p. Se închide butonul de control K şi se modifică R_p pînă cînd acul indicator ajunge în dreptul diviziunii zero (curent maxim).

Ohmmetrul derivaţie, cu baterie, are schema reprezentată în fig. 3-37. Scala instrumentului de măsurare este gradată în sensul normal.

Cînd $R_x=0$, curentul prin instrument este nul (butonul de control K închis).

Cînd $R_x=\infty$ (K — deschis), curentul prin instrument este maxim admisibil :

$$I_{max}=\frac{U_e}{R'_p+R''_p+R_A+R_i}, \qquad (9\text{-}64)$$

respectiv acul indicator trebuie să ajungă în dreptul diviziunii marcată pe scală cu roşu. Modificînd R'_p se corectează această poziţie.

Măsurarea rezistenţei $0<R_x<\infty$ se face cu butonul de control K deschis. Raportul între curentul prin rezistenţa de măsurat R_x şi prin instrumentul de măsurare este invers cu raportul rezistenţelor R_x şi $R_A+R''_p$ legate în paralel.

Întreruptorul K_1 are rolul de a deconecta sursa atunci cînd nu se efectuează măsurări, cu scopul de a evita descărcarea ei.

La unele tipuri de ohmmetre (serie şi paralel) corectarea modificării tensiunii de alimentare se face cu şunturi magnetice, prevăzute în construcţia instrumentului de măsurare.

Ohmmetrul logometric prezintă avantajul că indicația sa este independentă de tensiune. La un logometru de tip magnetoelectric, sistemul mobil constă din două bobine fixate pe același ax și decalate una față de alta cu 90°. Echipamentul mobil se mișcă între polii unui magnet permanent (fig. 9-38, *a*). Rezistența necunoscută R_x se leagă în serie cu bobina *2*, iar în serie cu bobina *1* se leagă o rezistență R_a de valoare mare.

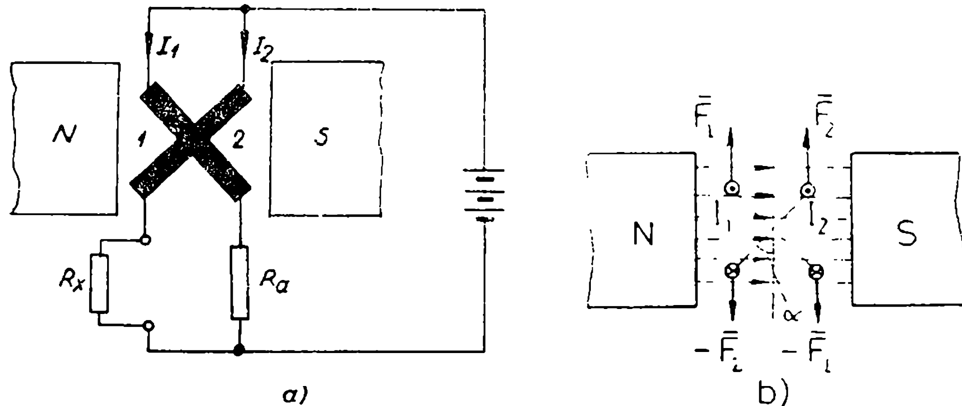


Fig. 9-38. Schema ohmmetrului logometric :
a — conectarea bobinelor; *b* — cuplurile.

Notînd cu R_1 și R_2 rezistențele celor două bobine, rezultă curenții prin bobine :

$$I_1 = \frac{U}{R_1 + R_a} = kU, \quad I_2 = \frac{U}{R_2 + R_x} \cong \frac{U}{R_x}, \tag{9-65}$$

unde $k = \frac{1}{R_1 + R_a}$ este o constantă, iar R_2 s-a considerat neglijabil față de R_x. Sub acțiunea cîmpului magnetic, cele două bobine, parcurse de curenții I_1 și I_2, sînt supuse fiecare cîte unui cuplu pentru care, pe baza fig. 9-38, *b* și conform celor explicate la aplicația 9-6, se stabilesc relațiile :

$$C_1 = k_1 I_1 \cos\alpha, \quad C_2 = k_2 I_2 \sin\alpha, \tag{9-66}$$

unde α este unghiul dintre verticală și normala la suprafața spirelor bobinei *1*.

Introducînd (9-65) în (9-66), rezultă :

$$C_1 = k_1 k U \cos\alpha, \quad C_2 = k_2 \frac{U}{R_x} \sin\alpha. \tag{9-67}$$

Cuplurile C_1 și C_2 acționează în sensuri opuse, instrumentele logometrice neavînd cuplu rezistent. Deviația acului indicator se va stabili la valoarea pentru care $C_1 = C_2$, adică

$$k_1 k U \cos\alpha = k_2 \frac{U}{R_x} \sin\alpha,$$

de unde se deduce :

$$R_x = \frac{k_2}{k_1 k} \operatorname{tg}\alpha \tag{9-68}$$

Deci, unghiul de deviaţie α este independent de tensiunea U a sursei, fiind funcţie numai de rezistenţa R_x:

$$\alpha = f(R_x). \qquad (9\text{-}69)$$

Prin urmare, scala instrumentului poate fi etalonată direct în ohmi, cu precizarea că este neuniformă.

Faptul că la instrumentele logometrice nu se pretinde o tensiune de alimentare riguros constantă, permite folosirea ca sursă a unui generator de curent continuu (magnetou) montat în cutia aparatului şi prevăzut cu manivelă pentru a fi pus manual în mişcare de rotaţie. În timpul măsurării, manivela se roteşte cu aproximativ 2 rotaţii pe secundă.

9.6.5. REZISTENŢELE DE IZOLAŢIE ŞI MĂSURAREA LOR

Materialele izolante au o conductivitate electrică practic neglijabilă (de ordin inferior lui $10^{-8}\ \Omega^{-1}m^{-1}$), fiind întrebuinţate pentru a realiza izolaţia electrică a maşinilor, aparatelor şi instalaţiilor electrice. Afară de această funcţiune, materialele izolante mai pot îndeplini şi funcţiuni secundare ca: evacuarea căldurii, protecţia contra umidităţii şi agenţilor chimici, protecţia contra deteriorărilor mecanice, preluarea de sarcini mecanice etc.

Alegerea materialului izolant corespunzător unor condiţii de utilizare date se face pe baza caracteristicilor sale:

— electrice: conductivitate, pierderi dielectrice, ridigitate dielectrică şi permitivitate;

— termice: conductibilitate termică, căldura specifică, coeficientul de dilataţie, punctul de inflamabilitate, rezistenţa la îngheţ etc.;

— mecanice: rezistenţa la solicitări mecanice, duritatea, fragilitatea etc.;

— fizice: higroscopicitate, porozitate, densitate etc.;

— chimice: toxicitate, solubilitate, rezistenţa la coroziuni chimice etc.

Problema izolaţiei electrice în construcţia de maşini şi în instalaţii este deosebit de importantă pentru asigurarea funcţionării în condiţiuni normale a acestora. O izolaţie necorespunzătoare poate să conducă la scurtcircuite, la accidente grave de muncă etc.

Rezistenţa de izolaţie este influenţată de anumiţi factori ca: temperatura, umiditatea, tensiunea etc. În timp, rezistenţa de izolaţie scade, mai ales atunci cînd nu se respectă condiţiile normale de întreţinere şi exploatare.

Controlul rezistenţelor de izolaţie constă în măsurarea valorilor acestor rezistenţe, care trebuie să se încadreze în normele existente în acest sens. De exemplu, rezistenţa de izolaţie a unei instalaţii electrice, măsurată în ohmi, trebuie să fie mai mare decît $10^3\ U$, U fiind tensiunea de lucru, în volţi.

Întrucît rezistenţa electrică de izolaţie depinde de foarte mulţi factori, măsurarea ei nu poate fi făcută cu exactitate. Din acest motiv, trebuie precizate întotdeauna condiţiile în care s-a efectuat o astfel de măsurare.

Există mai multe metode de măsurare a rezistenţelor de izolaţie, dintre care unele se prezintă în cele ce urmează.

Măsurarea directă. Deoarece rezistenţele de izolaţie au valori ce depăşesc $10^6\ \Omega$, instrumentul folosit pentru măsurarea lor directă este etalonat în megohmi ($M\Omega$) şi se numeşte *megohmmetru*. Există mai multe tipuri de megohmmetre, dintre care cel mai frecvent utilizat este cel logometric, avînd ca

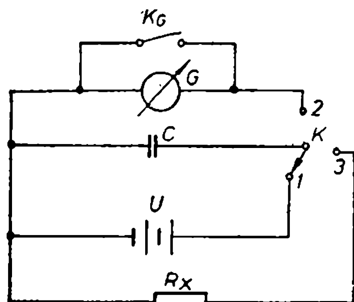


Fig. 9-39. Schema de măsurarea rezistenței de izolație cu galvanometrul.

sursă de curent un magnetou. Tensiunea furnizată de magnetou poate fi 500, 1 000 sau chiar 2 500 V, corespunzător cu valoarea rezistenței de izolație ce se măsoară. Cu ajutorul megohmmetrului nu se poate măsura rezistența de izolație a instalațiilor aflate sub tensiune.

Metoda pierderilor de sarcină. Este folosită pentru măsurarea rezistențelor mari (de izolație) și se bazează pe descărcarea sarcinilor unui condensator pe această rezistență. În fig. 9-39 este arătată schema de principiu a metodei. Condensatorul cu capacitatea C se încarcă de la sursa cu tensiunea U și se descarcă pe galvanometrul balistic G, respectiv pe rezistența de măsurat R_x.

Din relațiile

$$i=-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=-C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t},\quad i=\frac{u_c}{R_x}$$

se obțin:

$$\mathrm{d}t=-R_xC\frac{\mathrm{d}u_c}{u_c},\quad t_1=\int_0^{t_1}\mathrm{d}t=R_xC\ln\frac{u_{c0}}{u_{c1}}.$$

$$R_x=\frac{t_1}{C\ln\frac{u_{c0}}{u_{c1}}},\tag{9-70}$$

unde s-a ținut seama că la $t=0$, $u_c=u_{c0}$ și la t_1, $u_c=u_{c1}$.

Măsurarea practică se efectuează astfel: se pune comutatorul K în poziția *1* și condensatorul se încarcă la tensiunea $u_{c0}=U$; apoi comutatorul K se trece pe poziția *2* și condensatorul se descarcă pe galvanometru, unde se citește deviația α_0; se încarcă din nou condensatorul de la sursa cu tensiunea U și, punînd K pe poziția *3*, se descarcă un timp scurt, t_1, pe rezistența R_x după care, trecînd repede K din poziția *3* în poziția *2*, condensatorul, cu tensiunea devenită u_{c1}, se descarcă pe galvanometru, la care se citește deviația α_1. Considerînd că deviațiile α_0 și α_1 ale galvanometrului sînt proporționale cu tensiunile u_{c0} și u_{c1}, din (9-70) se obține:

$$R_x=\frac{t_1}{C\ln\frac{\alpha_0}{\alpha_1}}.\tag{9-71}$$

Măsurarea rezistențelor de izolație la liniile sub tensiune. Controlul calitativ al izolației față de pămînt a conductoarelor unei linii de transport poate fi făcut și fără a scoate linia respectivă de sub tensiune. Astfel, în curent continuu sau în curent alternativ monofazat, controlul izolației față de pămînt a celor două conductoare ale liniei aflate sub tensiune se face cu ajutorul a două voltmetre, legate așa cum este arătat în fig. 9-40, *a*. Dacă izolația față de pămînt este în stare bună, avînd aceeași valoare pentru ambele conductoare, voltmetrele V_1 și V_2 indică aceeași tensiune, egală cu jumătate de tensiunea liniei. Cînd rezistența de izolație a unuia din conductoarele liniei scade, odată cu ea scade și tensiunea indicată de voltmetrul respectiv, în timp ce tensiunea indicată de celălalt voltmetru crește.

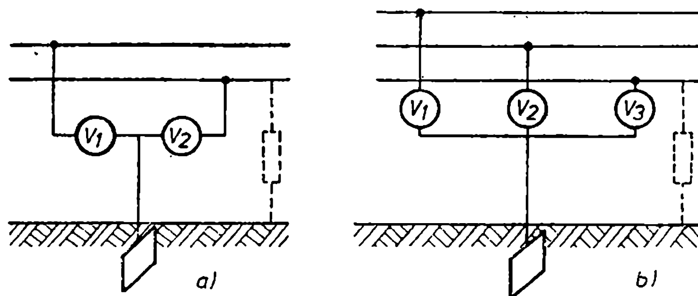


Fig. 9-40. Controlul rezistenței de izolație la linii sub tensiune cu voltmetre :
a — linie de c.c.; *b* — linie trifazată.

În cazul unei linii trifazate, voltmetrele pentru controlul izolației conductoarelor liniei față de pămînt se leagă ca în fig. 9-40, *b*. Dacă izolația celor trei conductoare este perfectă, tensiunile măsurate de cele trei voltmetre sînt egale. Cînd izolația unui conductor se micșorează, voltmetrul corespunzător indică o tensiune mai mică, în timp ce la celelalte două crește tensiunea măsurată.

Trebuie reținut că voltmetrele folosite în aceste scopuri trebuie să aibă aceeași rezistență interioară.

La liniile de curent alternativ de înaltă tensiune, voltmetrele pentru controlul izolației se leagă la linie prin intermediul transformatoarelor de tensiune.

Aplicația 9-10. Folosind un voltmetru cu domeniul de 250 V și rezistența interioară de 1 000 Ω/V, s-au măsurat la o linie de curent continuu următoarele :

— tensiunea între cele două conductoare, $U=218$ V ;

— tensiunea între conductorul „+" și pămînt, $U_p=188$ V ;

— tensiunea între conductorul „—" și pămînt, $U_n=10$ V.

Să se calculeze rezistența de izolație dintre fiecare conductor și pămînt.

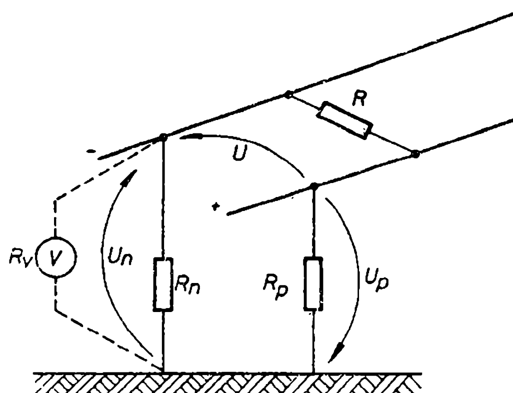


Fig. 9-41. Rezistențele de izolație la linia de c.c.

Rezolvare. În fig. 9-41 sînt reprezentate cele 3 rezistențe de izolație. Cînd voltmetrul este legat între „—" și pămînt, avem :

$$U_n=I_V R_V=I\frac{R_n R_V}{R_n+R_V}, \quad U=IR_p+I\frac{R_n R_V}{R_n+R_V},$$

unde I_V este curentul prin voltmetru, iar I este curentul total de scurgere prin izolație. Din aceste relații se obține :

$$\frac{U_n}{R_V}=\frac{UR_n}{R_V(R_p+R_n)+R_pR_n}.$$

În mod analog, dacă voltmetrul este legat între conductorul „+" și pămînt, rezultă :

$$\frac{U_p}{R_V}=\frac{UR_p}{R_V(R_p+R_n)+R_pR_n}.$$

Din aceste ultime două relații se obțin:

$$R_n = \frac{U - U_p - U_n}{U_p} R_V = 26\,600\ \Omega,$$

$$R_p = \frac{U - U_p - U_n}{U_n} R_V = 500\,000\ \Omega,$$

unde s-a introdus $R_V = 250 \cdot 10^3\ \Omega$.

9.6.6. PRIZELE DE PĂMÎNT

Priza de pămînt este un dispozitiv prin intermediul căruia se realizează o legătură electrică conductoare directă cu pămîntul a carcaselor metalice ale mașinilor și aparatelor electrice, a grilajelor și cutiilor metalice de protecție, a unor puncte (noduri) ale rețelelor și circuitelor electrice etc., cu scopul de a se evita pericolul electrocutării personalului care lucrează cu aceste mașini și instalații.

Legătura la pămînt a unor puncte din rețelele sau circuitele electrice se face cu scopul de a se realiza o anumită circulație a curenților. De exemplu, în anumite situații, punctul de nul al transformatoarelor trifazate se leagă la pămînt. De asemenea, prizele de pămînt sînt folosite și în instalațiile de protecție împotriva supratensiunilor atmosferice cum sînt: paratrăsnetele (folosite la depozite, magazii, clădiri înalte etc.), conductoarele de protecție ale liniilor electrice de înaltă tensiune etc.

O priză de pămînt se realizează, în general, dintr-unul sau mai multe corpuri conductoare așezate în sol și legate electric prin conductoare de mică rezistență cu instalația ce trebuie pusă la pămînt. În acest scop, se întrebuințează țevi din oțel, zincate, plumbuite sau arămite, cu diametrul de 25... 50 mm și lungimea de 3 m, îngropate în pămînt la o adîncime de aproximativ 2 m. De asemenea, se întrebuințează tablă din oțel zincată sau plumbuită, respectiv tablă din cupru, avînd minimum 0,5 mp suprafață și 3 mm grosime, îngropată în pămînt în poziție verticală. Uneori sînt folosite ca prize de pămînt conductele instalațiilor de apă sau gaz. Îmbinările se realizează prin lipire sau nituire cu scopul de a se obține un contact electric cît mai bun.

Pentru realizarea punerii la pămînt în ateliere, săli de mașini etc., trebuie neapărat consultate și respectate normele existente în acest sens.

Rezistența prizei de pămînt, prin care se înțelege rezistența electrică de trecere de la priză la pămînt, trebuie să aibă o valoare cît mai mică, astfel încît căderea de tensiune pe această rezistență să fie sub limita periculoasă pentru electrocutare. Rezistența electrică a prizei depinde atît de elementele sale constructive, cît și de conductibilitatea electrică a solului, adică de umiditate, de sărurile existente în sol, de temperatură etc. Ca urmare, rezistența prizelor de pămînt se modifică în timp, ceea ce necesită executarea unor măsurări periodice de control.

Pentru a se înțelege mai bine rolul prizelor de pămînt în cadrul atelierelor, laboratoarelor etc., ne referim la o instalație prevăzută cu un motor electric (fig. 9-42). Dacă carcasa metalică a motorului nu ar fi legată la pămînt și, prin deteriorarea izolației ar ajunge în contact metalic direct cu bobinajul aflat la potențialul U față de pămînt, atunci și carcasa obține același potențial față de pămînt. În această situație, dacă un muncitor, așezat cu picioa-

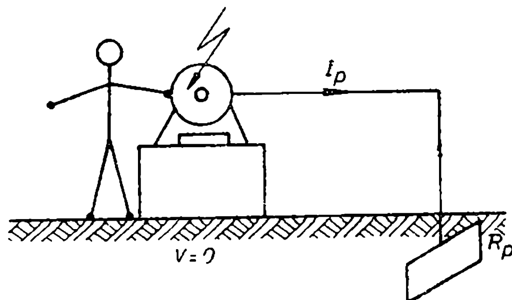


Fig. 9-42. Schiță explicativă asupra rolului prizei de pămînt.

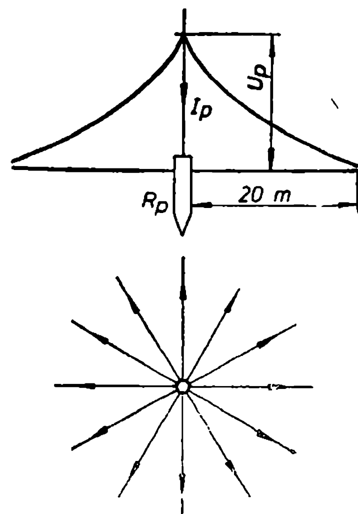


Fig. 9-43. Potențialul electric și dispersia curentului în pămînt, în jurul prizei de pămînt.

rele direct pe pămînt, atinge cu mîna, sau cu altă parte a corpului, carcasa metalică, va fi supus unei diferențe de potențial egală cu U, care poate fi periculoasă. În schimb, dacă carcasa metalică este legată la pămînt, potențialul pe care îl are față de pămînt se micșorează, obținînd valoarea:

$$U_p = R_p I_p, \tag{9-72}$$

unde I_p este curentul de scurgere la pămînt prin rezistența R_p a prizei. Acest curent, în unele cazuri, produce deconectarea motorului de la rețea prin topirea siguranței fuzibile sau prin deschiderea întreruptorului automat.

Este evident că, cu cît rezistența R_p a prizei este mai mică, cu atît tensiunea U_p este mai mică. Se impune prin norme ca: $R_p < 4\ \Omega$, $U_p < 65$ V.

În fig. 9-43 este arătată variația potențialului pămîntului din jurul prizei de pămînt, precum și liniile curentului electric de scurgere în pămînt prin priză. Dacă, în dreptul prizei, pămîntul are potențialul U_p, același cu potențialul carcasei metalice aflate sub tensiune, la o distanță de aproximativ 20 m de priză devine practic egal cu zero (potențialul convențional al pămîntului), datorită faptului că la această distanță densitatea curentului dispersat în pămînt este neglijabilă.

Avînd în vedere variația potențialului pămîntului în jurul prizei, este evident că pericolul de electrocutare este maxim dacă muncitorul atinge cu mîna un corp metalic aflat sub tensiune și situat la o distanță mai mare de 20 m de priză. Aceasta pentru că picioarele muncitorului se găsesc într-un loc de potențial zero (al pămîntului), iar mîna pe corpul metalic cu potențialul U_p. Obișnuit, prizele de pămînt sînt îngropate de distanțe mai mari decît 20 m față de corpurile metalice pe care le protejează.

În jurul stîlpilor metalici ai liniilor de înaltă și foarte înaltă tensiune, potențialul pămîntului are aceeași variație cu cea reprezentată în fig. 9-43. Aici

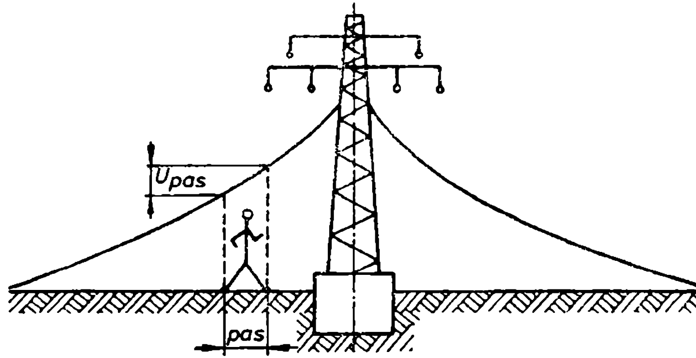


Fig. 9-44. Variația potențialului electric al pămîntului în jurul unui stîlp de înaltă tensiune.

poate deveni periculoasă și așa-numita tensiune de pas, U_{pas} (fig. 9-44). Pentru evitarea pericolului tensiunii de pas, apropierea de stîlp trebuie făcută pe un drum în formă de spirală.

Pericolul de moarte prin electrocutare depinde de următorii factori :

— intensitatea și traseul de trecere a curentului electric prin corpul omenesc ;

— frecvența curentului și durata trecerii sale prin corp ;

— rezistența electrică a corpului.

Corpul omului are o rezistență electrică cuprinsă între 500 Ω și 5 000 Ω, fiind datorată în principal pielii. Pielea umedă prezintă o rezistență electrică mult mai mică decît cea uscată.

S-a stabilit că nu este periculoasă o intensitate a curentului electric mai mică decît 25 mA în c.a. și mai mică decît 50 mA în c.c. Frecvența cea mai periculoasă este cuprinsă între 40—60 Hz.

9.6.7. MĂSURAREA REZISTENȚEI ELECTRICE A PRIZELOR DE PĂMÎNT

Există mai multe metode, folosite în practică, pentru măsurarea rezistențelor electrice a prizelor de pămînt.

Metoda volt-ampermetrică (fig. 9.45). Se bazează pe schema din fig. 9-40 la care, în afara prizei de pămînt P_x, este necesară o priză auxiliară P_a și o sondă P_s. Ca sursă se folosește curentul alternativ din secundarul unui transformator. Nu se folosește curentul continuu pentru a evita influența asupra măsurărilor a tensiunilor electromotoare de natură chimică ce apar la suprafața de contact dintre priză și pămînt, priza avînd rol de electrod, iar pămîntul cu sărurile din el, rol de electrolit. Cu ampermetrul A se măsoară curentul I_p, iar cu voltmetrul V, care are rezistență interioară mare și cu-

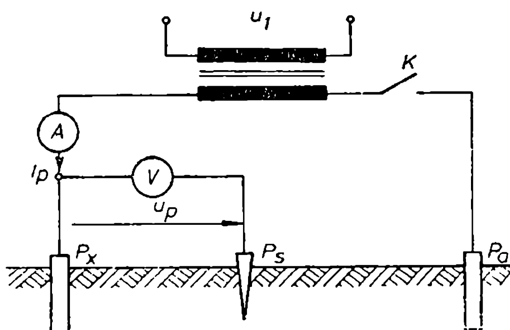


Fig. 9-45. Schema de măsurare a rezistenței prizei de pămînt cu voltmetru și ampermetru.

rentul neglijabil, se măsoară tensiunea U_p. Rezistența prizei P_x este:

$$R_{px} = \frac{U_p}{I_p}. \quad (9\text{-}73)$$

Metoda punții de curent alternativ (fig. 9-46). Două din laturile punții sînt formate dintr-un fir calibrat, de rezistență totală constantă, de-a lungul căruia se deplasează un cursor ce împarte rezistența firului calibrat în R_1 și R_2, astfel că:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\rho \frac{l_1}{S}}{\rho \frac{l_2}{S}} = \frac{l_1}{l_2}. \quad (9\text{-}74)$$

Ca instrument de nul, la care se urmărește echilibrarea punții, se folosește un instrument electrodinamic de precizie sau o cască telefonică (puntea este în echilibru atunci cînd tonul din cască este minim).

Pentru determinarea valorii rezistenței R_{px} a prizei se execută trei măsurări, așa cum se arată în fig. 9-46 *a*, *b* și *c*. Rezultă pentru cele trei măsurări:

$$R_a = R_{px} + R_{pa}, \quad R_b = R_{px} + R_{ps},$$
$$R_c = R_{ps} + R_{pa},$$

de unde:

$$R_{px} = \frac{R_a + R_b - R_c}{2}. \quad (9\text{-}75)$$

Această metodă este greoaie și destul de imprecisă (rezistența se determină prin diferența unor rezistențe de valori apropiate).

Metoda de măsurare prin compensare. Aparatele pentru măsurat rezistențele prizelor de pămînt prin compensare au o largă răspîndire. Schema de principiu a unui astfel de aparat este reprezentată în fig. 9-47. Priza de măsurat P_x și priza auxiliară P_a sînt legate în

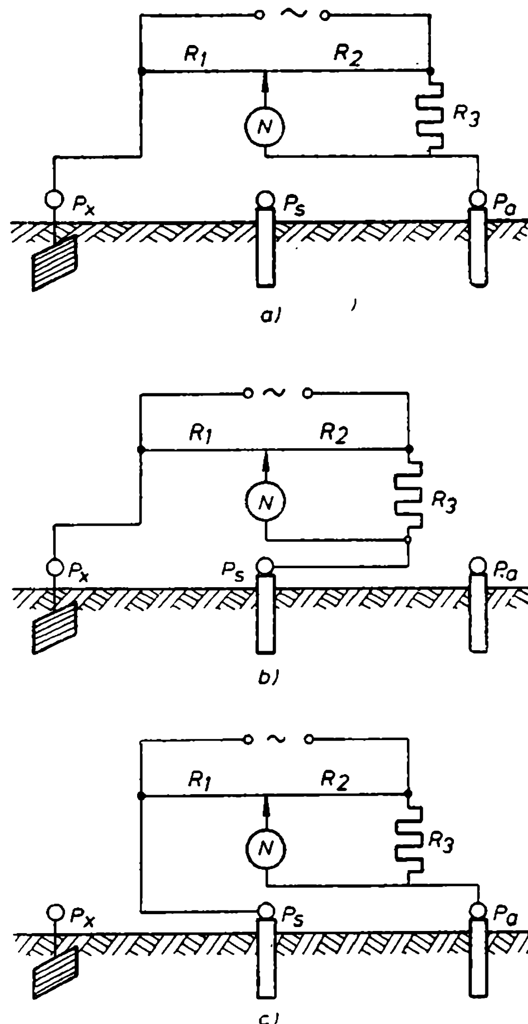


Fig. 9-46. Schemele de măsurare cu puntea de curent alternativ:
P_x — priza de pămînt; P_s — sonda; P_a — priza auxiliară.

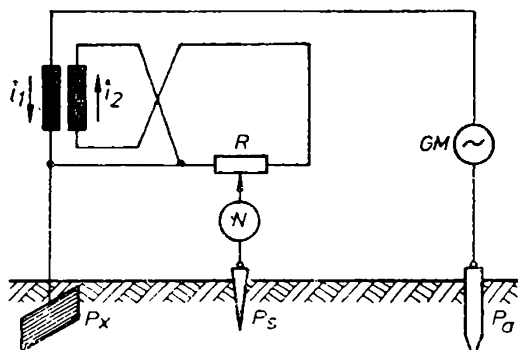


Fig. 9-47. Schema aparatului de măsurare prin compensare a rezistenței prizei de pămînt.

circuitul unei surse de curent alternativ, care poate fi un generator acționat prin manivelă. În circuit există și un transformator cu raportul de transformare 1 : 1 și cu un capăt al bobinei primare legat cu un capăt al bobinei secundare. În circuitul secundar al transformatorului se introduce o rezistență R, avînd cursor. Instrumentul de nul, cu care se urmărește starea de compensare, format dintr-o cască telefonică sau dintr-un instrument electric, este montat între priza cursorului și sondă.

Măsurarea rezistenței R_{px} se face în modul următor : după ce se realizează montajul din fig. 9-47, se deplasează cursorul în lungul rezistenței R, pînă cînd instrumentul de nul indică zero. În această situație :

$$I_1 R_{px} = I_2 R, \tag{9-76}$$

unde prin R trebuie înțeleasă valoarea rezistenței cuprinsă între cursor și punctul de legare în comun a primarului și secundarului transformatorului. Deoarece raportul de transformare al transformatorului este 1 : 1, înseamnă că $I_1 = I_2$, iar din relația (9-76) se obține :

$$R_{px} = R. \tag{9-77}$$

În starea de compensare, prin sonda P_s nu trece curent, iar rezistența prizei auxiliare P_a nu intră în calcul.

Unele precizări asupra *erorilor de măsurare a rezistențelor prizelor de pămînt*, în afară de cele determinate de clasa de precizie a instrumentelor folosite, se referă la influența unor factori externi. Astfel, s-a amintit mai sus faptul că folosind o sursă de c.c., măsurarea poate fi influențată de t.e.m., imprimate (chimice) ce apar la suprafața de contact între priză (sau sondă) și pămînt. Evitarea acestei erori se realizează folosind sursă de c.a., ceea ce face ca, pentru cele două sensuri ale c.a., influența t.e.m. imprimate să fie compensată.

Mai poate apare o eroare datorită existenței în pămînt (la locul de măsurare) a unor curenți de dispersie (vagabonzi) proveniți de la sistemele de tracțiune electrică (tramvai, trenuri electrice etc.), care pot fi continui sau periodici (50 Hz).

Curenții de dispersie cu frecvența de 50 Hz au influență asupra măsurării prizelor de pămînt în c.a. Eroarea datorită lor poate fi în bună măsură evitată folosind ca sursă de alimentare a aparatului de măsurare un generator cu frecvența diferită de 50 Hz, iar instrumentul de nul fiind prevăzut cu un dispozitiv de detectare numai a curentului de frecvență egală cu cea a generatorului de alimentare.

Aparatul portabil de fabricație indigenă, tip APP, destinat măsurării prizelor de pămînt, are schema de principiu similară cu cea reprezentată în fig. 9-47, fiind tranzistorizat, alimentat cu șase baterii uscate de 1,5 V. În componența sa este prevăzut un convertor static, care asigură o tensiune alternativă cu frecvența de 122 Hz, un detector sincron și un amplificator de c.a. Instrumentul de măsurare este de tip magnetoelectric, alimentat de la o punte de redresare.

9.7. DETERMINAREA LOCULUI DEFECTELOR ÎN CABLURI ȘI LINII AERIENE

Transportul și distribuția energiei electrice se realizează prin linii aeriene și cabluri subterane. În timpul exploatării pot apare defecte (întreruperi, scurtcircuite) care produc perturbații în alimentarea cu energie și care trebuie urgent depistate și remediate.

După cum se ştie, alimentarea cu energie electrică în oraşe este mai avantajoasă dacă se face prin cabluri subterane, în acest caz dispărînd o serie de deranjamente specifice liniilor aeriene. Ea are însă dezavantaje, printre care se numără şi depistarea locului defectelor şi înlăturarea acestora, operaţie mult mai complicată decît la liniile aeriene.

La liniile aeriene, locul defectului se găseşte prin controlul vizual pe traseul liniei. La cabluri, locul defectului se stabileşte prin măsurarea distanţei pînă la el, de la capetele cablului.

Înainte de măsurare, se stabileşte natura defectului deconectînd cablul de la ambele capete şi măsurînd cu instrumente (megohmmetre) obişnuite rezistenţele de izolaţie dintre conductoarele cablului, apoi dintre conductoare şi mantaua cablului. Cînd este necesar, se măsoară şi rezistenţele conductoarelor (cu ohmmetre sau punţi).

Astfel, cu ajutorul unor măsurări prealabile, se poate stabili natura deranjamentului. Deranjamentele ce pot apare în exploatarea cablurilor pot fi de mai multe categorii : punerea unor conductoare la pămînt, scurtcircuit între conductoare, întreruperea conductoarelor şi o serie întreagă de deranjamente mai complexe. De precizia cu care se stabileşte locul defectului, va depinde şi rapiditatea cu care se elimină, cu alte cuvinte, determinarea cît mai exactă a locului are o importanţă economică deosebită. De aceea, pentru fiecare defect se aplică metodele care dau cele mai bune rezultate.

După stabilirea naturii defectului are loc accentuarea lui, cu scopul majorării preciziei de localizare. De exemplu, la scurtcircuit se tinde la scăderea rezistenţei defectului prin arderea cu un curent electric suficient de mare prin cablu şi locul defect. Efectul Joule-Lenz este mai mare în locul unde rezistenţa este mai mare şi acolo temperatura va creşte treptat, accentuînd puternic defectul. Instalaţia de ardere este o sursă de curent continuu sau curent alternativ.

În cele ce urmează se prezintă cîteva metode de determinare a locului defectului la cabluri subterane, prin care se urmăreşte să se stabilească exact locul defecţiunii ce urmează a fi remediată, fără a dezgropa cablul pe o lungime prea mare.

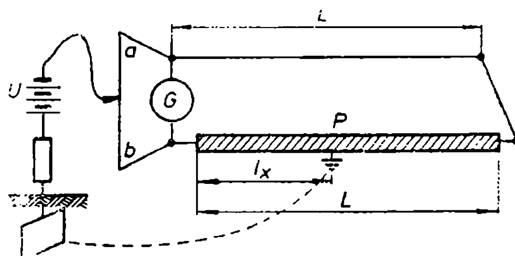


Fig. 9-48. Schema de măsurare pentru localizarea defectului în cablu folosind puntea cu fir calibrat şi un conductor auxiliar.

Metoda punţii cu fir calibrat şi un conductor auxiliar. Se consideră în fig. 9-48 un cablu de lungime L, care prezintă o punere la pămînt în punctul P, la distanţa l_x de unul din capete. Stabilirea distanţei l_x se face cu ajutorul unei punţi cu fir calibrat şi cu ajutorul unui conductor de lungime L_a — de exemplu un conductor de la o linie aeriană — care se leagă cu un capăt la capătul conductorului cu izolaţie defectă al cablului, iar cu celălalt capăt la punte, aşa cum este arătat în fig. 9-48. La echilibrul punţii sînt valabile relaţiile :

$$\frac{a}{b} = \frac{\rho \frac{L_a}{S_a} + \rho \frac{L - l_x}{S}}{\rho \frac{l_x}{S}}$$

sau

$$\frac{a+b}{b}=\frac{\frac{L_a}{S_a}+\frac{L}{S}}{\frac{l_x}{S}},$$

de unde

$$l_x=\frac{b}{a+b}\left(\frac{S}{S_a}L_a+L\right), \tag{9-78}$$

în care : a şi b sînt două lungimi ale firului calibrat ;
S_a — este secţiunea conductorului auxiliar ;
S — secţiunea conductorului cablului ;
ρ — rezistivitatea electrică considerată aceeaşi pentru conductorul auxiliar şi pentru conductorul cablului.

Metoda căderilor de tensiune. În cazul în care un conductor este bun, pentru determinarea locului defect se poate aplica şi metoda căderilor de tensiune, cunoscîndu-se că între căderea de tensiune între două puncte ale unui cablu omogen şi lungimea dintre cele două puncte există o proporţionalitate. Conductorul defect şi unul din conductoarele bune ale cablului se scurtcircuitează la unul din capete, iar la celelalte capete se alimentează cablul cu o tensiune continuă. În schemă se prevede un ampermetru şi o rezistenţă reglabilă ce permite reglarea curentului la valorile dorite (fig. 9-49).

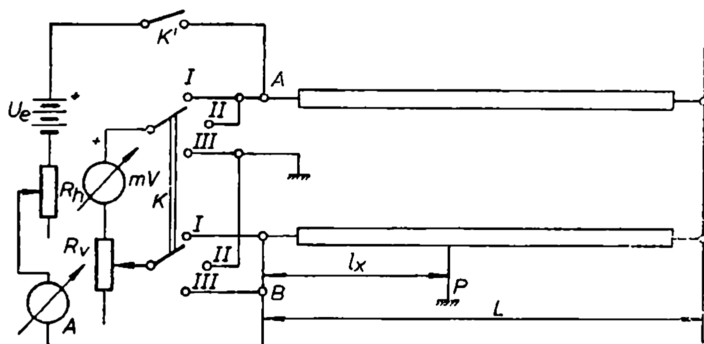


Fig. 9-49. Schema de măsurare a căderilor de tensiune pentru localizarea defectului la un cablu.

Măsurarea căderilor de tensiune se face cu ajutorul unui milivoltmetru, conectat la comutatorul K cu trei poziţii.

Dacă întreruptorul K este în poziţia I, atunci milivoltmetrul va măsura căderea de tensiune între punctele A şi B, corespunzătoare lungimii $2L$ a cablului. Cu alte cuvinte, indicaţia milivoltmetrului va fi proporţională cu $2L$, putîndu-se deci scrie :

$$\alpha_1=K_1\,2L.$$

În poziţia II, milivoltmetrul măsoară căderea de tensiune dintre punctele A şi P, corespunzătoare unei distanţe $2L-l_x$, putîndu-se scrie :

$$\alpha_2=K_2\,(2L-l_x).$$

Constantele K_1 şi K_2 sînt diferite pentru că, în serie cu milivoltmetrul, în cazul *II*, mai apare pe lîngă R_V şi rezistenţa de punere la pămînt.

Conectat în poziţia *III*, milivoltmetrul va indica căderea de tensiune dintre cele două puncte P şi B, proporţională cu distanţa pînă la locul defect

$$\alpha_3 = K_2\, l_x.$$

Din ultimele două relaţii se poate scrie :

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{l_x}{2L - l_x}, \quad \frac{\alpha_3}{\alpha_2 + \alpha_3} = \frac{l_x}{2L},$$

$$l_x = \frac{\alpha_3}{\alpha_2 + \alpha_3}\, 2L, \tag{9-79}$$

rezultînd astfel distanţa de la locul de unde se fac măsurările pînă la locul defectului.

Dacă rezistenţa de punere la pămînt este foarte mică, cu alte cuvinte defectul este puternic accentuat, se poate aproxima $K_1 = K_2$ şi atunci

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = \frac{K_2}{K_1}\, \frac{l_x}{2L}$$

deci :

$$l_x = 2L\, \frac{\alpha_3}{\alpha_1}. \tag{9-80}$$

Metoda t.e.m. induse. În scopul depistării locului defect, cablul se alimentează de la o sursă de curent alternativ. Curentul alternativ care parcurge cablul va produce în spaţiul din jurul conductorului un cîmp magnetic alternativ. Dacă în acest cîmp este plasată, în mod corespunzător, o bobină, în aceasta se va induce o t.e.m., care amplificată poate fi sesizată cu un instrument indicator. Deci, deplasînd bobina deasupra solului astfel ca indicatorul să indice în permanenţă existenţa cîmpului magnetic, se poate determina traseul necunoscut al cablului. În cazul în care există un defect, de exemplu scurtcircuit între conductoare, sau punerea unor conductoare la pămînt etc., cîmpul magnetic scade brusc, indicatorul va sesiza lipsa tensiunii induse şi se poate astfel determina locul defectului.

În realitate, apar dificultăţi în aplicarea acestei metode din mai multe motive. După cum se ştie, conductoarele cablului sînt răsucite, asigurînd astfel simetria fazelor cablului (inductivităţile şi capacităţile proprii ale fazelor devin astfel egale). Din acest motiv, configuraţia cîmpului magnetic exterior este complicată, putîndu-se întîmpla ca liniile de cîmp să nu intersecteze bobina, cu alte cuvinte s-ar putea trage concluzii greşite în ceea ce priveşte depistarea locului defectului. Deoarece cablul are o manta de Ol sau Pb în contact cu pămîntul, aceasta, manifestîndu-se pentru cablu ca un ecran, cîmpul magnetic în exteriorul cablului va fi micşorat.

Din aceste motive sînt necesare surse de putere mai mare. Cel mai des, ca sursă de alimentare a cablului, se foloseşte un generator de frecvenţă acustică, iar ca indicator se foloseşte o cască telefonică.

Metoda impulsurilor. Una din metodele cele mai utilizate în depistarea locului defectelor în cabluri este metoda impulsurilor. Se cunoaşte că dacă se trimite un impuls electric pe o linie (sau cablu) şi dacă, undeva pe linie, se schimbă

impedanţa de undă a liniei, atunci în acel punct o parte din undă se reflectă. Dacă sfîrşitul liniei este întrerupt, atunci de acolo va apare o altă reflexie a undei.

Cunoscînd viteza impulsului şi măsurînd timpul corespunzător parcurgerii distanţei pînă la defect, acesta poate fi o măsură a distanţei pînă la locul defect. Pentru aceasta se recurge la un osciloscop catodic, vizualizînd impulsul trimis pe linie şi cel reflectat. După cum se ştie, spotul se deplasează pe ecran cu o viteză constantă determinată de frecvenţa de baleiaj. Osciloscopul se leagă la capătul cablului. În locul în care este legat şi generatorul de impuls. Astfel, pe ecran (fig. 9-50) va apare şi impulsul iniţial, ce se trimite pe cablu. Pe ecran va apare şi impulsul *2*, reflectat de la locul defectului înspre sursa de alimentare. Mai poate apare şi impulsul *3*, corespunzător reflexiei de la capătul opus al cablului. Se poate afirma că distanţa d este o măsură pentru dublul distanţei pînă la locul defect.

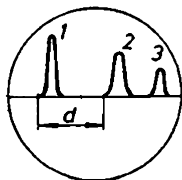


Fig. 9-50. Imaginea impulsurilor pe ecranul osciloscopului.

Pentru a putea etalona osciloscopul direct în unităţi de lungime, este necesar a cunoaşte raportul vitezei undei şi a vitezei spotului. Fie „t" timpul în care unda ajunge de la generator la locul defect şi de la defect din nou la osciloscop, reflectîndu-se. În acest interval de timp unda va parcurge un spaţiu corespunzător distanţei duble la locul defect, adică $2l_x$. Se poate scrie :

$$2l_x = tv,$$

unde v este viteza undei corespunzătoare mediului în care se deplasează (depinzînd de μ şi ε ai mediului).

În acelaşi timp, t, este parcursă şi distanţa d, de către spotul luminos al ecranului, însă cu viteza de baleiaj v_b :

$$d = t\,v_b.$$

Împărţind cele două relaţii de mai sus, se obţine :

$$l_x = d\frac{v}{v_b}. \tag{9-81}$$

Se observă că dacă raportul v/v_b se cunoaşte, d va putea fi etalonat direct în unităţi de lungime l_x.

Metoda se poate aplica indiferent de natura defectului, de asemenea se poate utiliza pentru determinarea locului defectului atît la linii aeriene, cît şi la cabluri. Precizia care se obţine este de ordinul a sute de metri pentru distanţe de 100...200 km (linii aeriene), fiind suficientă deoarece în acest interval trebuie controlate izolatoarele doar la 1—2 stîlpi de susţinere. La cabluri este necesară o precizie cît mai mare.

9.8. MĂSURAREA INDUCTANŢELOR ŞI CAPACITĂŢILOR ELECTRICE

9.8.1. MĂSURAREA INDUCTANŢELOR PROPRII ALE BOBINELOR ŞI CAPACITĂŢII CONDENSATOARELOR

Pentru măsurarea inductanţei unei bobine, respectiv a capacităţii unui condensator, există mai multe metode, dintre care se amintesc : metoda voltampermetrică, metoda voltmetrului, ampermetrului şi wattmetrului, metoda

punții de curent alternativ, metoda comparației etc. Dintre acestea se prezintă mai pe larg metoda punții de curent alternativ.

Puntea de curent alternativ (fig. 9-51) are laturile formate din patru impedanțe : $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$ și $\underline{Z}_4$; pe una din diagonale se găsește sursa de curent alternativ, iar pe cealaltă diagonală se găsește instrumentul de nul N cu ajutorul căruia se urmărește echilibrul punții.

Cînd puntea este în echilibru, sînt satisfăcute următoarele relații, scrise sub formă complexă :

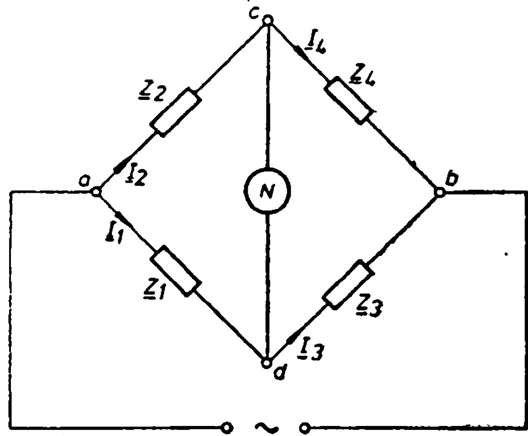


Fig. 9-51. Schema punții de c.a.

$$\underline{Z}_1\underline{I}_1=\underline{Z}_2\underline{I}_2,\quad \underline{Z}_3\underline{I}_3=\underline{Z}_4\underline{I}_4\,;$$

$$\underline{I}_1=\underline{I}_3,\quad \underline{I}_2=\underline{I}_4,\quad \underline{I}_5=0,$$

de unde rezultă :

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3}=\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_4}\quad \text{sau}\quad \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}=\frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4} \qquad (9\text{-}82)$$

Ținînd seama de exprimarea sub forma exponențială a impedanțelor complexe :

$$\underline{Z}_1=Z_1e^{j\alpha_1},\ \underline{Z}_2=Z_2e^{j\alpha_2},\ \underline{Z}_3=Z_3e^{j\alpha_3},\ \underline{Z}_4=Z_4e^{j\alpha_4},$$

relația (9-82) de echilibru a punții se transformă în următoarele relații între module și argumente, care trebuie să fie îndeplinite simultan :

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{Z_3}{Z_4},\qquad \varphi_1-\varphi_2=\varphi_3-\varphi_4. \qquad (9\text{-}83)$$

Măsurarea inductanței proprii a unei bobine se realizează punînd pe două laturi ale punții rezistențe electrice pure, de valoare cunoscută : $\underline{Z}_1=R_1$ și $\underline{Z}_2=R_2$ ($\varphi_1=\varphi_2=0$), a treia latură este formată dintr-o bobină etalon cu inductanța L_3 și rezistența proprie R_3, adică $\underline{Z}_3=R_3+j\omega L_3$, iar a patra latură constă din bobina cu inductanța L_x de măsurat și rezistența proprie R_x : $\underline{Z}_4=R_x+j\omega L_x$. Cu acestea, din condițiile de echilibru (9-83), rezultă :

$$\frac{R_1}{R_2}=\frac{\sqrt{R_3^2+(\omega L_3)^2}}{\sqrt{R_x^2+(\omega L_x)^2}},\quad \varphi_3=\varphi_4. \qquad (9\text{-}84)$$

Din egalitatea unghiurilor φ_3 și φ_4 se obține :

$$\operatorname{tg}\varphi_3=\operatorname{tg}\varphi_4,\quad \text{sau}\ \frac{R_3}{\omega L_3}=\frac{R_x}{\omega L_x},\quad \text{respectiv}\ \frac{R_3^2}{(\omega L_3)^2}=\frac{R_x^2}{(\omega L_x)^2}.$$

Prin folosirea unor reguli ale proporţiilor rezultă :

$$\frac{R_3^2+(\omega L_3)^2}{(\omega L_3)^2}=\frac{R_x^2+(\omega L_x)^2}{(\omega L_x)^2},\quad \frac{R_3^2}{R_3^2+(\omega L_3)^2}=\frac{R_x^2}{R_x^2+(\omega L_x)^2},$$

adică :

$$\frac{R_3^2+(\omega L_3)^2}{R_x^2+(\omega L_x)^2}=\frac{(\omega L_3)^2}{(\omega L_x)^2}=\frac{R_3^2}{R_x^2}. \tag{9-85}$$

Din relaţiile (9-84) şi (9-85) se obţin proporţionalităţile :

$$\frac{R_1}{R_2}=\frac{R_3}{R_x}=\frac{L_3}{L_x},$$

din care rezultă :

$$R_x=\frac{R_2}{R_1}R_3,\qquad L_x=\frac{R_2}{R_1}L_3. \tag{9-86}$$

Îndeplinirea simultană a acestor două condiţii aduc puntea de curent alternativ în stare de echilibru, respectiv se obţine valoarea inductanţei L_x a bobinei în funcţie de raportul R_2/R_1 şi de inductanţa etalon L_3. Se observă că condiţiile de echilibru sînt independente de frecvenţa tensiunii de alimentare. Sînt necesare totuşi unele precizări asupra stabilirii acestui echilibru al punţii şi anume :

— în braţul 3 trebuie să existe un element reglabil, fie R_3, fie L_3, cu scopul de a se putea realiza condiţia $\varphi_3=\varphi_4$ (unde $\varphi_4=\varphi_x$) ; deci, în serie cu bobina etalon se introduce şi o rezistenţă reglabilă ;

— în locul bobinei etalon se poate introduce o capacitate etalon, plasată în braţul opus faţă de cel care conţine bobina de măsurat, adică

$$\underline{Z}_1=\frac{R_1\left(-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C_1}\right)}{R_1-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C_1}}=\frac{R_1}{1+\mathrm{j}\omega R_1C_1},\ \underline{Z}_2=R_2,\ \underline{Z}_3=R_3,\ \underline{Z}_4=R_x+\mathrm{j}\omega L_x,$$

cu care condiţiile de echilibru (9-82) conduc la

$$R_x=\frac{R_2}{R_1}R_3,\qquad L_x=R_2R_3C_1, \tag{9-87}$$

unde R_1 este rezistenţa de pierderi a condensatorului etalon (în paralel cu C_1, ca în fig. 9-52, *a*).

Măsurarea capacităţii unui condensator ideal (fără pierderi) cu ajutorul punţii de curent alternativ se face în mod analog cu măsurarea inductanţei, introducînd în braţele punţii : $\underline{Z}_1=R_1$, $\underline{Z}_2=R_2$, $\underline{Z}_3=-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C_3}$, $\underline{Z}_4=-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C_x}$, şi, pe aceeaşi cale ca mai sus, se obţine :

$$C_x=\frac{R_1}{R_2}C_3, \tag{9-88}$$

unde C_3 este capacitatea condensatorului etalon (ideal).

Condensatoarele folosite în practică nu sînt ideale, astfel încît $\underline{Z}_3$ şi $\underline{Z}_4$ nu se reduc numai la reactanţele capacitive scrise mai sus, ci intervine şi rezistenţa

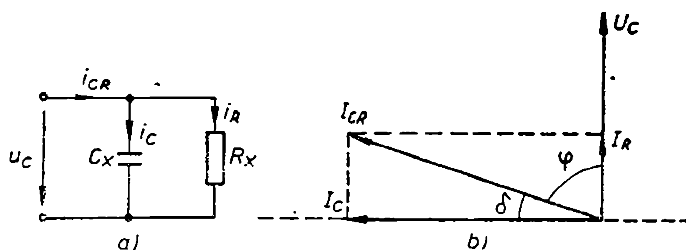


Fig. 9-52. Schema echivalentă a condensatorului cu pierderi (*a*) și diagrama fazorială (*b*).

electrică corespunzătoare dielectricului imperfect dintre armături. Schema electrică a unui astfel de condensator, denumit condensator cu pierderi, este reprezentată în fig. 9-52, *a*. În acest caz, unghiul de defazaj φ dintre tensiunea la bornele condensatorului și curentul prin condensator este mai mic decît 90° (fig. 9-52, *b*). Unghiul $\delta=90°-\varphi$ se numește unghi de pierderi :

$$\operatorname{tg}\delta=\frac{I_R}{I_C}=\frac{I}{\omega C_x R_x}. \qquad (9\text{-}89)$$

În această situație, schema punții de c.a. este cea reprezentată în fig. 9-53 (puntea Nernst), avînd în laturi impedanțele :

$$\underline{Z}_1=R_1,\ \underline{Z}_2=R_2,\ \underline{Z}_3=\frac{R_3}{1+j\omega R_3 C_3},\ Z_4=\frac{R_x}{1+j\omega R_x C_x}.$$

Cu aceste impedanțe, condițiile de echilibru (9-82) conduc la

$$R_x=\frac{R_2}{R_1}R_3,\ C_x=\frac{R_1}{R_2}C_3. \qquad (9\text{-}90)$$

Se observă independența de frecvența tensiunii de alimentare a acestor condiții de echilibru.

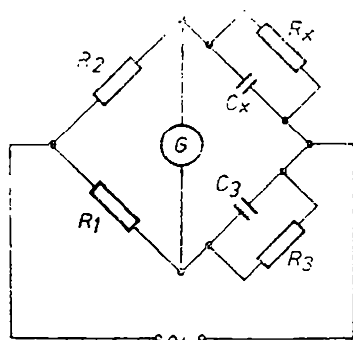


Fig. 9-53. Schema punții de c.a. pentru măsurarea capacității electrice.

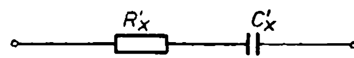


Fig. 9-54. Schema echivalentă în serie a condensatorului cu pierderi.

În locul schemei echivalente în paralel a condensatorului cu pierderi (fig. 9-52, *a*) se poate recurge la schema echivalentă în serie (fig. 9-54). Și în acest caz condițiile de echilibru ale punții au forma (9-90), dar este necesar ca și al doilea condensator, din cealaltă latură, să fie tot cu schemă echivalentă serie. În caz contrar, dacă schemele condensatoarelor sînt diferite, condițiile de echilibru depind și de frecvență.

Unghiul de pierderi pentru schema în serie este :

$$\operatorname{tg}\delta'=\omega C'_x R'_x. \qquad (9\text{-}91)$$

9.8.2. MĂSURAREA INDUCTANŢELOR MUTUALE

Cu ajutorul punţii de c.a., se poate măsura inductanţa mutuală M dintre două bobine cuplate magnetic (adiţional sau în opoziţie). În acest sens, există două posibilităţi de măsurare.

Măsurarea indirectă. Cele două bobine cuplate magnetic se leagă în serie adiţional (A) şi în opoziţie (B) şi se introduc în latura punţii de măsurare. În cele două situaţii, A şi B, se măsoară inductanţele :

$$L_A = L_1 + L_2 + 2M, \quad L_B = L_1 + L_2 - 2M,$$

de unde rezultă :

$$M = \frac{L_A - L_B}{4}. \tag{9-92}$$

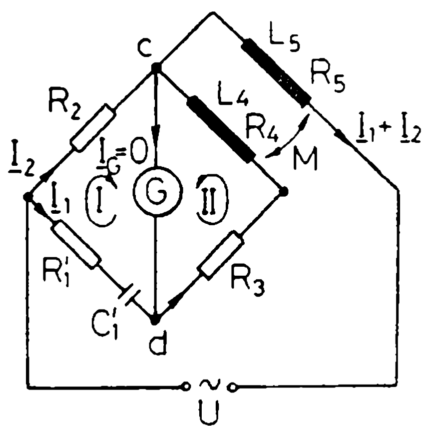


Fig. 9-55. Schema punţii de c.a. pentru măsurarea directă a inductanţei mutuale.

Din cauza calculului prin diferenţă, precizia măsurării este scăzută.

Măsurarea directă a inductanţei mutuale se realizează conform schemei din fig. 9-55. În cazul echilibrului, cînd $\underline{U}_{cd}=0$ ($\underline{I}_G=0$), se pot scrie următoarele relaţii pentru ochiurile I şi II (teorema a II-a a lui Kirchhoff) :

$$-\underline{I}_1\left(R_1' - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C_1'}\right) + \underline{I}_2 R_2 = 0,$$

$$\underline{I}_1(R_3 + R_4 + \mathrm{j}\omega L_4) \pm (\underline{I}_1 + \underline{I}_2)\mathrm{j}\omega M = 0$$

sau

$$\underline{I}_1\left(R_1' - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C_1'}\right) = \underline{I}_2 R_2,$$

$$\underline{I}_1[R_3 + R_4 + \mathrm{j}\omega(L_4 \pm M)] = \mp \underline{I}_2 \mathrm{j}\omega M.$$

Prin împărţirea acestor două relaţii, se obţine :

$$\frac{R_3 + R_4 + \mathrm{j}\omega(L_4 \pm M)}{R_1' - \mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C_1'}} = \mp \frac{\mathrm{j}\omega M}{R_2},$$

de unde, separînd termenii reali şi cei imaginari rezultă condiţiile de echilibru ale punţii

$$M = \pm R_2 C_1'(R_3 + R_4), \quad M = \pm \frac{R_2}{R_1' + R_2} L_4. \tag{9-93}$$

Semnul plus corespunde cuplajului adiţional şi semnul minus cuplajului în opoziţie.

Deoarece $\frac{R_2}{R_1' + R_2} < 1$, trebuie ca $M < L_4$ pentru ca puntea să se poată echilibra.

Capacitatea etalon C_1' şi rezistenţa R_1' trebuie să fie reglabile, cu scopul de a se putea aduce puntea în stare de echilibru.

9.8.3. PUNTEA SCHERING

Acest tip de punte se utilizează pentru măsurarea capacității și unghiului de pierderi la condensatoarele de înaltă tensiune, prin compararea cu o capacitate fără pierderi (C_1) de înaltă tensiune și cu rezistențe cunoscute. Schema punții este reprezentată în fig. 9-56, cu următoarele impedanțe pe laturi :

$$\underline{Z}_1 = -j\frac{1}{\omega C_1},\ \underline{Z}_2 = R_2,\ \underline{Z}_3 = \frac{R_3}{R_3 - j\frac{1}{\omega C_3}},\ \underline{Z}_4 = \underline{Z}_x = R'_x - j\frac{1}{\omega C'_x}.$$

Condițiile de echilibru (9-82) conduc la relațiile

$$R'_x = \frac{C_3}{C_1} R_2,\quad C'_x = \frac{R_3}{R_2} C_1. \qquad (9\text{-}94)$$

Aceste condiții se realizează modificînd rezistența R_3 și capacitatea C_3.

Unghiul de pierderi este dat de relația (9-91)

$$\operatorname{tg} \delta' = \omega C'_x R'_x.$$

Prin această metodă se măsoară, spre exemplu, capacitatea cablurilor de înaltă tensiune.

Sursa de alimentare a punții Schering poate fi cu frecvența de 50 Hz sau cu frecvență reglabilă (dacă se cere ca măsurarea să se facă la diferite frecvențe).

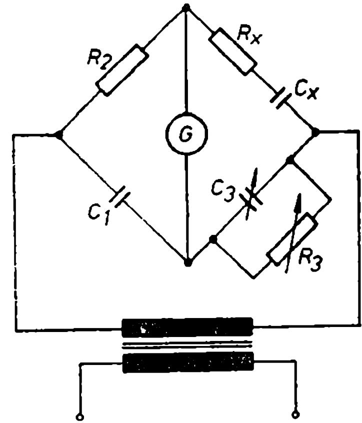


Fig. 9-56. Schema punții Schering.

9.8.4. FARADMETRUL

În afară de metodele în punte, capacitățile se pot măsura și cu alte metode. De multe ori capacitățile se măsoară cu ajutorul galvanometrelor balistice, această metodă fiind indirectă deoarece capacitatea rezultă în funcție de sarcina măsurată cu galvanometrul balistic și tensiunea aplicată condensatorului. Precizia de măsurare a capacității va depinde evident de precizia de etalonare a galvanometrului balistic și de precizia de măsurare a tensiunii aplicate condensatorului (tensiunea se măsoară cu un voltmetru).

Capacitățile se mai pot măsura cu ajutorul faradmetrelor, care sînt instrumente cu citire directă a capacităților, similare cu ohmmetrele, cu deosebirea că tensiunea de alimentare va fi alternativă. De aceea, la construcția faradmetrelor logometrice se exclude logometrul magnetoelectric care, după cum se știe, funcționează numai în curent continuu. Se pot utiliza logometre feromagnetice și electrodinamice.

Schema principială a logometrului feromagnetic este arătată în fig. 9-57. Prin relațiile (9-66) s-a arătat că cele două cupluri opuse ce

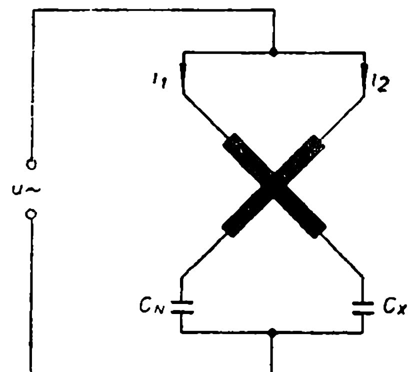


Fig. 9-57. Schema de principiu a faradmetrului logometric feromagnetic.

acționează asupra sistemului mobil sînt proporționale cu curenții I_1, respectiv I_2. La echilibru, cele două cupluri devin egale ($C_1=C_2$), adică

$$k_1 I_1 \cos\alpha = k_2 I_2 \sin\alpha, \qquad (9\text{-}95)$$

de unde rezultă

$$\alpha = f\left(\frac{I_1}{I_2}\right). \qquad (9\text{-}96)$$

Neglijînd impedanțele bobinelor în raport cu reactanțele condensatoarelor, se poate scrie :

$$I_1 = U\omega C_x, \quad I_2 = U\omega C_N,$$

unde C_x este capacitatea necunoscută, iar C_N este o capacitate cunoscută. Înlocuind I_1 și I_2 în expresia deviației, se obține :

$$\alpha = f\left(\frac{C_x}{C_N}\right) \qquad (9\text{-}97)$$

Dacă C_N este o capacitate fixă, instrumentul poate fi gradat direct în unități de măsură a capcității C_x. Făcînd C_N variabil în trepte, se realizează mai multe domenii pentru faradmetru.

Indicația instrumentului nu depinde de tensiunea de alimentare, însă aceasta este astfel prescrisă încît cuplul de frecare al instrumentului să fie neglijabil față de cuplurile produse de curenții I_1 și I_2.

9.9. MĂSURAREA PUTERII ELECTRICE

Instrumentul folosit pentru măsurarea directă a puterii se numește *wattmetru*. Cel mai frecvent utilizat este wattmetrul de tip electrodinamic, care are o bobină de curent ce se leagă în serie cu circuitul (bobina sistemului fix) și o bobină de tensiune ce se leagă în paralel cu circuitul (bobina sistemului mobil), așa cum este arătat în fig. 9-58.

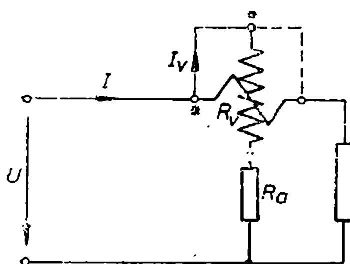


Fig. 9-58. Schema wattmetrului.

Pentru ca wattmetrul legat în circuit să indice în sensul direct, este necesar ca cele două borne marcate cu steluță, sau cu alt semn (o bornă a bobinei de curent și o bornă a bobinei de tensiune), să fie legate la același conductor al circuitului. Montajul wattmetrului poate fi amonte sau aval, după cum bobina de tensiune este legată înainte sau după bobina de curent. În fig. 9-58 este realizat montajul amonte, iar prin linia punctată este arătat cum se execută legătura pentru montajul aval.

Constanta wattmetrului se determină făcînd produsul dintre tensiunea nominală și curentul nominal al wattmetrului și împărțind la numărul total de diviziuni de pe scală, adică :

$$K = \frac{U_N I_N}{\alpha_{max}} \text{ [W/div.]} \qquad (9\text{-}98)$$

9.9.1. MĂSURAREA PUTERII ÎN CURENT CONTINUU

Pentru măsurarea puterii la circuite de curent continuu se folosesc diferite metode.

Metoda voltmetrului şi ampermetrului. Avînd în vedere că la un circuit de curent continuu puterea este dată de produsul dintre tensiune și curent: $P=UI$ [W], rezultă posibilitatea de a măsura în mod indirect puterea cu ajutorul unui voltmetru care măsoară tensiunea U şi a unui ampermetru care măsoară curentul I. Voltmetrul poate fi legat față de ampermetru în amonte sau în aval, ceea ce se stabileşte în funcţie de condiţiile concrete ale măsurării.

Măsurarea puterii cu ajutorul wattmetrului electrodinamic se realizează legînd wattmetrul în circuit conform schemei din fig. 9-58. Cuplul activ ce acționează asupra sistemului mobil al wattmetrului şi care determină deviația acului indicator este proporţional cu puterea. În adevăr, ţinînd seama de relația (9-24)

în care se pune $i_1=I$ și $i_2=I_v=\frac{U}{R_v+R_a}$, rezultă:

$$C=\frac{k_a}{R_v+R_a}UI=k_1P, \tag{9-99}$$

unde $k_1=\frac{k_a}{R_v+R_a}$ este o constantă de proporționalitate, R_v fiind rezistența electrică a bobinei de tensiune, iar R_a rezistența adițională legată în serie cu această bobină.

Cuplul rezistent este determinat de resoarte spirale, fiind proporţional cu deformaţia elastică a acestora, care este în același timp şi deviaţia acului indicator, adică:

$$C_r=k_r\alpha \tag{9-100}$$

Acul indicator al instrumentului se va opri în dreptul diviziunii pentru care este îndeplinită condiţia $C=C_r$, ceea ce înseamnă:

$$k_1P=k_r\alpha, \text{ sau } P=K\alpha \tag{9-101}$$

unde $K=\frac{k_r}{k_1}$ este constanta wattmetrului. Rezultă proporţionalitatea dintre deviaţia α a acului indicator şi puterea P.

9.9.2. MĂSURAREA PUTERII ACTIVE LA CIRCUITE MONOFAZATE

Puterea activă la circuitele monofazate de curent alternativ sinusoidal are expresia:

$$P=UI\cos\varphi, \tag{9-102}$$

unde U este valoarea efectivă a tensiunii, I — valoarea efectivă a curentului şi $\cos\varphi$ — factorul de putere.

Pentru măsurarea acestei puteri se folosește wattmetrul de tip electrodinamic, ferodinamic sau cu inducţie. În fig. 9-59, *a* este arătat modul de legare în circuit a unui wattmetru electrodinamic; bobina de curent se leagă în serie cu circuitul, iar bobina de tensiune, legată în serie cu o rezistență adițională, se

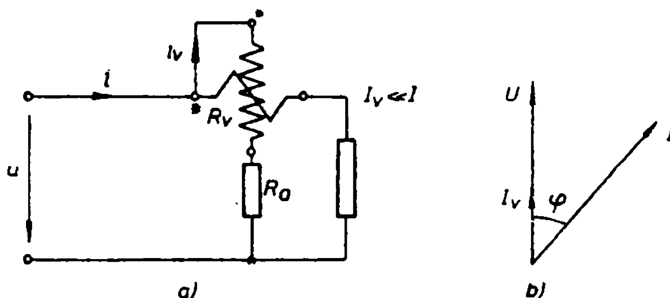


Fig. 9-59. Wattmetrul electrodinamic :
a — schema de legare în circuit; *b* — diagrama fazorială a tensiunii și curenților.

conectează în paralel cu circuitul. Wattmetrul măsoară puterea activă, dacă valoarea medie în raport cu o perioadă a cuplului activ este proporțională cu această putere. În adevăr, introducînd în relația (9-24) $i_1=i$ — curentul din bobina de curent și $i_2=i_v$ — curentul din bobina de tensiune, rezultă valoarea momentană a cuplului activ : $c=k_a i\, i_v$.

Avînd în vedere diagrama fazorială din fig. 9-59, *b*, în care curentul *i* este defazat cu unghiul φ față de tensiunea *u*, iar curentul i_v este în fază cu tensiunea, deoarece rezistența adițională R_a este mult mai mare decît reactanța inductivă a bobinei de tensiune, se pot scrie relațiile :

$$i=\sqrt{2}I\sin(\omega t-\varphi),\quad i_v=\sqrt{2}I_v\sin\omega t=\frac{\sqrt{2}U}{R_v+R_a}\sin\omega t,$$

în care I, I_v și U sînt valorile efective ale mărimilor sinusoidale, iar R_v este rezistența proprie a bobinei de tensiune. Aceste expresii ale curenților se introduc în relația scrisă mai sus pentru valoarea momentană a cuplului activ și, prin integrare, se obține valoarea medie în raport cu o perioadă a acestui cuplu :

$$C=\frac{1}{T}\int_0^T c\,dt=\frac{k_a}{R_v+R_a}\,UI\cos\varphi=k_1P, \qquad (9\text{-}103)$$

unde $k_1=\dfrac{k_a}{R_v+R_a}$.

Deci, valoarea medie a cuplului activ este proporțională cu puterea activă. În consecință, wattmetrul măsoară puterea activă din circuit.

9.9.3. MĂSURAREA PUTERII REACTIVE LA CIRCUITE MONOFAZATE

Puterea reactivă la circuite monofazate de curent alternativ sinusoidal are expresia :

$$Q=UI\sin\varphi. \qquad (9\text{-}104)$$

Pentru măsurarea acestei puteri se folosește instrumentul denumit *varmetru*. Un varmetru se deosebește de wattmetru prin aceea că, în serie cu bobina de tensiune are legată nu o rezistență adițională, ci o reactanță inductivă X_a, de valoare mare față de rezistența R_v. Astfel, curentul I_v este practic în cuadra-

tură cu tensiunea U. În aceste condiții, efectuînd calculul valorii medii a cuplului activ după același procedeu, ca și în cazul precedent al puterii active, rezultă :

$$C = \frac{k_a}{X_v + X_a} UI \sin \varphi = k_2 Q, \qquad (9\text{-}105)$$

în care $k_2 = \frac{k_a}{X_v + X_a}$, iar X_v este reactanța proprie a bobinei de tensiune.

Prin urmare, valoarea medie a cuplului activ este proporțională cu puterea reactivă din circuit, ceea ce înseamnă că varmetrul măsoară această putere.

Legarea varmetrelor în circuit se execută respectînd aceleași reguli privind polaritatea bornelor bobinelor de curent și de tensiune ca și la wattmetre. Indicația varmetrului în sensul direct al scalei gradate corespunde unui defazaj inductiv între curent și tensiune (putere reactivă consumată), iar în sens contrar, unui defazaj capacitiv (putere reactivă debitată de receptor).

9.9.4. MĂSURAREA PUTERII ACTIVE LA CIRCUITE TRIFAZATE

Măsurarea puterii active la circuite trifazate poate fi făcută prin mai multe metode, descrise în continuare.

Metoda cu trei wattmetre constă în măsurarea puterii active pe fiecare fază cu cîte un wattmetru. Legarea wattmetrelor în circuitul receptorului trifazat conectat în stea se realizează ca în fig. 9-60, cînd *punctul de nul este accesibil.*

Dacă există conductor neutru, cele trei bobine de tensiune ale wattmetrelor se leagă la acest conductor, în locul punctului de nul.

Cele trei wattmetre măsoară puterea pe fiecare fază în parte, iar puterea totală din circuit este :

$$P = U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + U_3 I_3 \cos \varphi_3, \qquad (9\text{-}106)$$

unde : U_1, U_2 și U_3 sînt valorile efective ale tensiunilor de fază ;
I_1, I_2 și I_3 — valorile efective ale curenților de fază (aceiași ca și curenții de linie) ;
φ_1, φ_2 și φ_3 — defazajele dintre curenții de fază și tensiunile de fază.

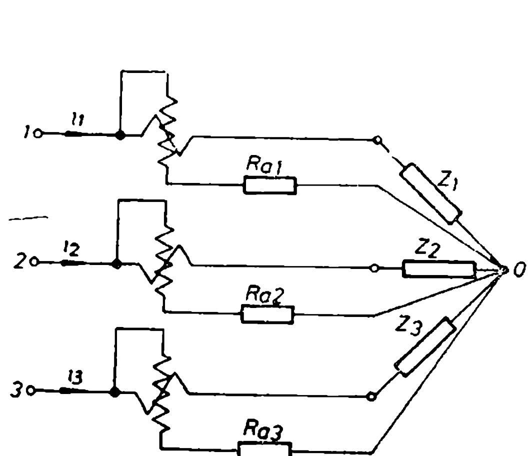


Fig. 9-60. Schema de măsurare a puterii active cu trei wattmetre, cînd punctul de nul este accesibil.

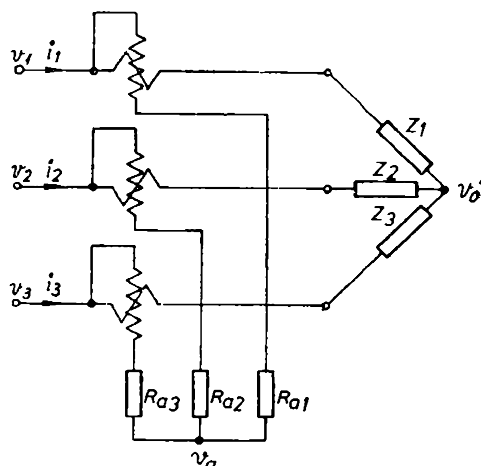


Fig. 9-61. Schema de măsurare a puterii active cu trei wattmetre, cu punct de nul artificial.

Dacă punctul de nul nu este accesibil şi conductorul de nul lipseşte, legarea celor trei wattmetre în circuit se face realizînd un *punct de nul artificial* (fig. 9-61), cu potenţialul v_a diferit de potenţialul $v_{0'}$ al punctului de nul. Rezistenţele R_{a1}, R_{a2} şi R_{a3} cu care se realizează punctul de nul artificial sînt în acelaşi timp şi rezistenţele adiţionale pentru bobinele de tensiune.

Prin legarea bobinelor de tensiune ale wattmetrelor la punctul de nul artificial, puterea măsurată de fiecare wattmetru în parte se modifică faţă de cazul legării la punctul de nul real. În schimb, puterea totală măsurată de cele trei wattmetre rămîne aceeaşi. Justificarea acestor afirmaţii constă în aceea că puterea electromagnetică :

$$p = u_1 i_1 + u_2 i_2 + u_3 i_3, \tag{9-107}$$

a cărei valoare mijlocie în raport cu o perioadă este puterea activă, este independentă de potenţialul punctului de nul. În adevăr, ţinînd seama că

$$u_1 = v_1 - v_{0'}, \quad u_2 = v_2 - v_{0'}, \quad u_3 = v_3 - v_{0'}.$$

relaţia (9-107) devine :

$$p = v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 i_3 + v_{0'} (i_1 + i_2 + i_3)$$

şi, întrucît conform teoremei I a lui Kirchhoff $i_1 + i_2 + i_3 = 0$, rezultă p independent de potenţialul $v_{0'}$ (v_1, v_2 şi v_3 sînt valorile momentane ale potenţialelor fazelor).

Dacă circuitul trifazat este cu conexiune în triunghi, legarea celor trei wattmetre se face tot prin realizarea unui punct de nul artificial.

Această metodă de măsurare a puterii active cu trei wattmetre, aplicabilă mai ales în cazul circuitelor trifazate nesimetrice şi neechilibrate, nu este economică deoarece sînt necesare trei instrumente de măsurare.

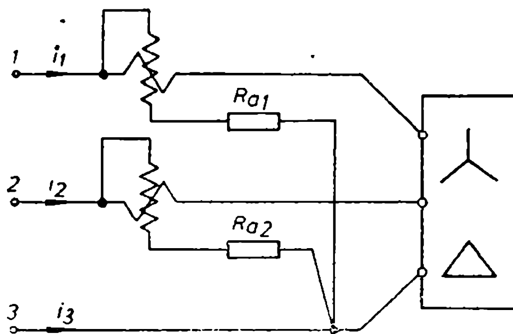


Fig. 9-62. Schema de măsurare a puterii active cu două wattmetre.

Metoda cu două wattmetre înlătură dezavantajul metodei precedente. Faptul că puterea activă dintr-un circuit trifazat poate fi măsurată numai cu două wattmetre se întemeiază pe concluzia care a fost prezentată mai sus şi anume că puterea totală măsurată de cele trei wattmetre este independentă de potenţialul punctului de nul artificial v_a. Dacă este aşa, se poate pune $v_a = v_3$, adică se poate face ca punctul de nul artificial să coincidă cu faza a treia şi, ca urmare, wattmetrul de pe faza trei poate fi exclus din circuit, deoarece tensiunea ce revine bobinei sale de tensiune este zero. Rezultă schema de legare a celor două wattmetre ca în fig. 9-62, aplicabilă atît pentru circuite trifazate cu conexiune în stea fără conductor de nul, cît şi în triunghi.

Puterea activă măsurată de cele două wattmetre este :

$$P = U_{13} I_1 \cos \varphi_{13,1} + U_{23} I_2 \cos \varphi_{23,2}, \tag{9-108}$$

unde U_{13}, U_{23}, I_1 şi I_2 sînt valorile efective ale tensiunilor de linie şi curenţilor de linie, iar $\varphi_{13,1}$ şi $\varphi_{23,2}$ sînt defazajele dintre tensiunea şi curentul corespunzător indicilor.

Dacă circuitul trifazat este simetric şi echilibrat, atunci $U_{12}=U_{23}=U_{31}=$ $=U$ şi $I_1=I_2=I_3=I$, iar defazajele $\varphi_{13,1}$ şi $\varphi_{23,2}$ rezultă din diagrama reprezentată în fig. 9-63 :

$$\varphi_{13,1}=30°-\varphi, \quad \varphi_{23,2}=30°+\varphi, \tag{9-109}$$

unde $\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=\varphi$ este defazajul dintre tensiunea de fază şi curentul de fază. În această situaţie, relaţia (9-108) devine :

$$P=UI\cos(30°-\varphi)+UI\cos(30°+\varphi), \tag{9-110}$$

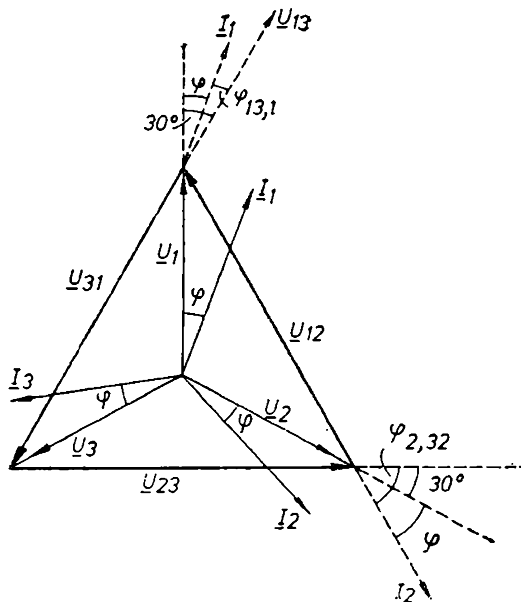


Fig. 9-63. Diagramă explicativă pentru tensiuni şi curenţi.

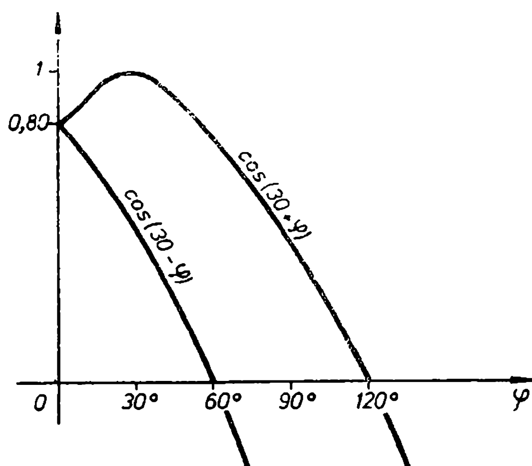


Fig. 9-64. Modificarea în funcţie de defazaj a indicaţiilor celor două wattmetre.

adică, după dezvoltare :

$$P=\sqrt{3}\,UI\cos\varphi. \tag{9-111}$$

Din relaţia (9-110) se vede că, odată cu schimbarea unghiului de defazaj φ, dependent de caracterul consumatorului, se modifică şi indicaţia celor două wattmetre conform curbelor din fig. 9-64. Cînd $\varphi>60°$, indicaţia wattmetrului doi îşi schimbă semnul, adică acul indicator al instrumentului va bate invers. Pentru ca instrumentul să indice din nou în sensul direct, se schimbă între ele legăturile la bornele de curent (sau la cele de tensiune), iar indicaţia instrumentului se cotează cu semn negativ, adică :

$$P=P_{w1}-P_{w2}. \tag{9-112}$$

Metoda celor două wattmetre este folosită pe scară largă în practică pentru măsurarea puterii active la circuite trifazate. Se obişnuieşte ca cele două wattmetre să fie înglobate într-un singur aparat, cu un singur ac indicator.

Metoda cu un singur wattmetru se aplică pentru măsurarea puterii active la circuite trifazate simetrice şi echilibrate. Pentru circuite trifazate cu conexiune

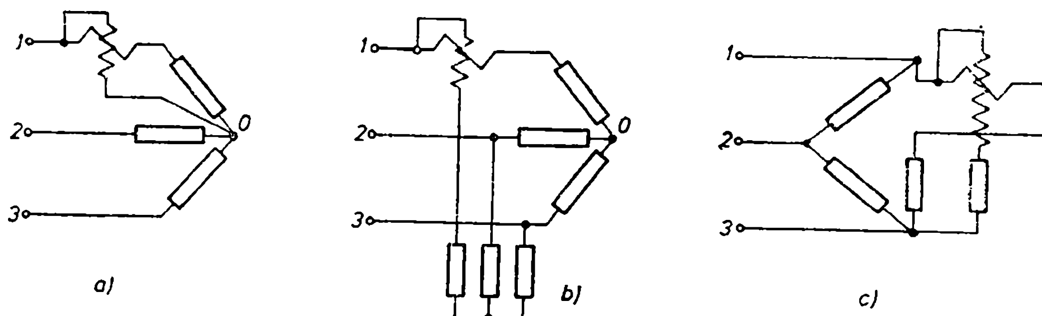


Fig. 9-65. Schema de măsurare a puterii cu un singur wattmetru :
a — legare la punctul de nul; *b* — cu punct de nul artificial; *c* — cazul conexiunii în triunghi.

în stea și cu punctul de nul accesibil, legarea wattmetrului în circuit se face conform schemei din fig. 9-65, *a*. Dacă punctul de nul nu este accesibil, se creează un punct de nul artificial, așa cum este arătat în schema din fig. 9-65, *b*.

Pentru circuite trifazate cu conexiune în triunghi, legarea wattmetrului se face conform schemei din fig. 9-65, *c*, sau se poate recurge și la schema cu punct de nul artificial (fig. 9-65, *b*).

În toate aceste cazuri, puterea totală din circuitul trifazat este egală cu de trei ori puterea măsurată de wattmetru :

$$P=3\,P_w. \qquad (9\text{-}113)$$

9.9.5. MĂSURAREA PUTERII REACTIVE LA CIRCUITE TRIFAZATE

Măsurarea puterii reactive la circuite trifazate se poate face cu ajutorul varmetrelor sau cu ajutorul wattmetrelor.

Măsurarea puterii reactive cu varmetrele se realizează executînd scheme de montaj identice cu cele folosite pentru măsurarea puterii active cu ajutorul wattmetrelor.

Măsurarea puterii reactive cu ajutorul wattmetrelor. Pentru a justifica posibilitatea măsurării puterii reactive la circuitele trifazate cu ajutorul wattmetrelor, se consideră cazul unui circuit trifazat simetric și echilibrat și un wattmetru montat conform schemei din fig. 9-66, *a*.

Avînd în vedere cele prezentate la paragraful 9.9.2 referitor la calculul valorii medii a cuplului activ ce pune în mișcare sistemul mobil al instrumentului, pentru cazul de față rezultă :

$$C=k_1 U_{23} I_1 \cos \varphi_{23,1}, \qquad (9\text{-}114)$$

unde : U_{23} este valoarea efectivă a tensiunii de linie ;
I_1 — valoarea efectivă a curentului de linie ;
$\varphi_{23,1}$ — unghiul de defazaj dintre tensiune și curent, corespunzător indicilor.

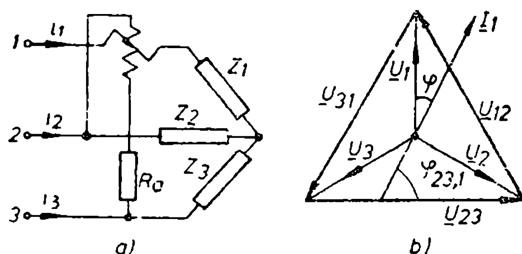


Fig. 9-66. Schema de măsurare a puterii reactive cu un wattmetru *(a)* și diagrama tensiunilor și curenților *(b)*.

Din diagrama prezentată în fig. 9-66, *b*, rezultă $\varphi_{23,1}=90-\varphi$, unde φ este defazajul dintre tensiunea de fază și curentul de fază. Înlocuind în relația (9-114), se obține :

$$C=k_1 U_{23} I_1 \sin\varphi, \tag{9-115}$$

de unde se vede că valoarea medie a cuplului activ este proporțională cu puterea reactivă, adică wattmetrul, legat conform schemei din fig. 9-66, *a*, măsoară puterea reactivă.

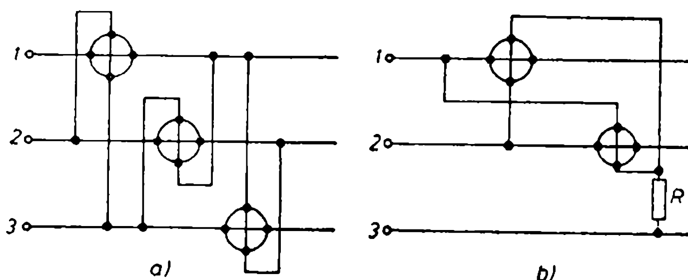


Fig. 9-67. Scheme de legare a wattmetrelor pentru măsurarea puterii reactive la circuite trifazate nesimetrice: *a* — cu trei wattmetre; *b* — cu două wattmetre.

În fig. 9-67, *a* este reprezentată o schemă pentru măsurarea puterii reactive la circuite trifazate cu trei wattmetre, iar în fig. 9-67, *b* este reprezentată o schemă de măsurare a aceleiași puteri cu două wattmetre.

9.9.6. MĂSURAREA PUTERII LA CIRCUITE DE CURENT ALTERNATIV FOLOSIND TRANSFORMATOARELE DE MĂSURARE

Legarea directă în circuit a unui wattmetru sau varmetru nu poate fi făcută decît dacă curentul și tensiunea din circuitul respectiv nu depășesc anumite limite, admise de instrument.

La circuitele de curent continuu, unde curentul și tensiunea depășesc anumite limite, legarea în circuit a wattmetrului se face conectînd în paralel cu bobina de curent un șunt portivit și în serie cu bobina de tensiune, o rezistență adițională corespunzătoare.

La circuitele de curent alternativ, unde curenții și tensiunile depășesc anumite limite, cum sînt, spre exemplu, circuitele secundare ale transformatoarelor de sudură sau la liniile de transport de energie electrică de tensiune ridicată, legarea în circuit a wattmetrelor și varmetrelor se face prin intermediul transformatoarelor de măsurare, de curent și de tensiune. În fig. 9-68 este arătată schema de legare prin intermediul transformatoarelor de măsu-

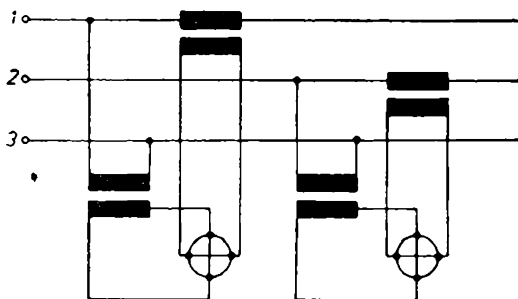


Fig. 9-68. Schema de conectare a celor două wattmetre prin intermediul transformatoarelor de măsurare.

rare a celor două wattmetre pentru măsurarea puterii active la un circuit trifazat. În mod analog se folosesc transformatoarele de măsurare şi pentru alte scheme de măsurare a puterii active sau reactive, la circuite monofazate sau trifazate.

Aplicaţia 9-11. Un wattmetru monofazat este conectat în circuitul unui receptor trifazat simetric şi echilibrat conform schemei din fig. 9-69, *a*. Să se determine puterea măsurată de wattmetru şi să se arate cît este raportul dintre puterea măsurată şi puterea activă din circuitul trifazat (R_a este rezistenţa adiţională de valoare foarte mare).

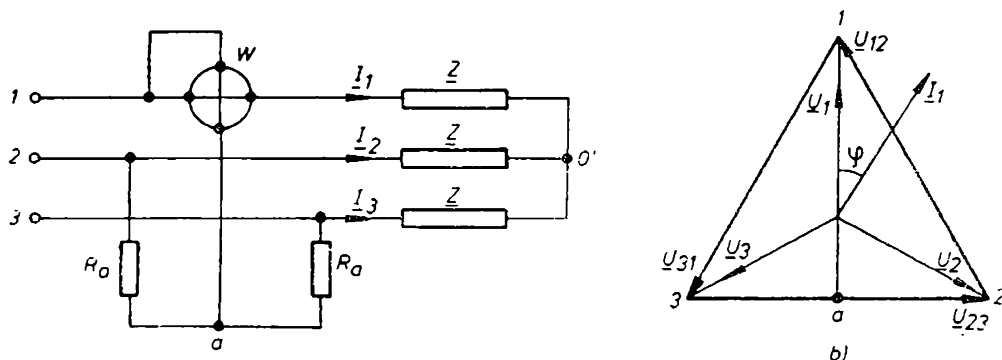


Fig. 9-69. Schemă explicativă referitoare la modul de legare a wattmetrului (a) şi diagrama pentru tensiunea U_{1a} şi curentul I_1.

Rezolvare. Prin bobina de curent a wattmetrului trece curentul I_1, iar la bobina de tensiune este aplicată tensiunea $U_{1a}=V_1-V_a=\frac{3}{2}U_1$ (fig. 9-69, *b*). Unghiul de defazaj dintre U_{1a} şi I_1 este $\varphi_{1a}=\varphi$.

Deci, puterea măsurată de wattmetru este : $P_w=U_{1a}I_1\cos\varphi_{1a}=\frac{3}{2}U_1I_1\cos\varphi$.

Puterea activă din circuitul trifazat este : $P=3\,U_1I_1\cos\varphi$, cu care rezultă raportul $\frac{P_w}{P}=\frac{1}{2}$.

9.10. MĂSURAREA ENERGIEI ELECTRICE

Măsurarea energiei electrice este o operaţie deosebit de importantă în exploatare deoarece, pe baza ei, se achită obligaţiile dintre furnizori şi consumatori din punct de vedere al livrării şi consumului de energie electrică. Unitatea folosită în practică pentru măsurarea energiei electrice este kilowattora: 1 kWh$=3{,}6\cdot10^6$ J. Instrumentele cu care se măsoară (înregistrează) energia electrică se numesc *contoare de energie electrică.* Avînd în vedere că energia electrică este egală cu integrala în raport cu timpul a puterii, contorul trebuie să aibă un dispozitiv de măsurat la care cuplul activ este proporţional cu puterea şi un dispozitiv de însumare a puterii într-un interval de timp dat.

9.10.1. MĂSURAREA ENERGIEI ELECTRICE ÎN CURENT CONTINUU

Pentru măsurarea energiei electrice în curent continuu se folosește, aproape în exclusivitate, contorul de tip electrodinamic, a cărui schemă este reprezentată în fig. 9-70. Pe axul sistemului mobil al contorului se găsește un motor mic de curent continuu, discul de aluminiu care se rotește între polii unui magnet permanent și șurubul melcat prin care se transmite mișcarea la sistemul de înregistrare numerică a turației.

Bobina de curent a contorului, care se leagă în serie cu circuitul, este formată din înfășurările E_1 și E_2 de excitație ale motorului, iar bobina de tensiune, care se leagă în paralel cu circuitul, este formată din niște spire ce constituie rotorul motorului. Înfășurarea de excitație suplimentară E_s are rolul de a compensa pierderile prin frecare.

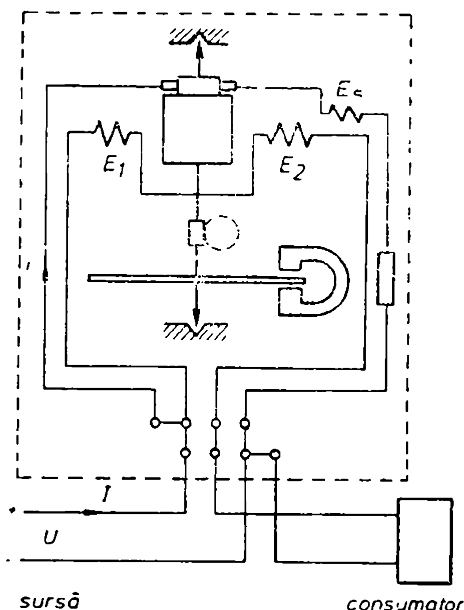


Fig. 9-70. Schema contorului electrodinamic de măsurare a energiei electrice în c.c.

Cuplul activ C, dezvoltat de motorul de c.c., este proporțional, prin intermediul unei constante k_c, cu fluxul de excitație Φ și cu curentul i din spirele rotorice, adică :

$$C=k_c\Phi i. \tag{9-116}$$

Pe de altă parte, fluxul Φ este proporțional cu curentul I din circuitul principal, iar curentul i, cu tensiunea U din circuit. Deci, relația (9-116) devine :

$$C=k_a UI=k_a P. \tag{9-117}$$

Prin urmare, cuplul activ care pune în mişcare de rotație sistemul mobil al contorului este proporțional cu puterea P din circuitul de c.c.

Cuplul rezistent este determinat de interacțiunea dintre cîmpul magnetic al magnetului permanent și curenții turbionari induși în discul de aluminiu prin mișcarea acestuia în cîmpul magnetului, fiind proporțional cu turația n a discului :

$$C_r=k_r n. \tag{9-118}$$

Discul contorului se rotește cu turație constantă cînd cele două cupluri, activ și rezistent, sînt egale, $k_aP=k_rn$, de unde, prin înmulțire cu timpul elementar dt, se obține $k_aP\,\mathrm{d}t=k_rn\,\mathrm{d}t$, iar prin integrare rezultă :

$$k_a\int_{t_1}^{t_2}P\,\mathrm{d}t=k_r\int_{t_1}^{t_2}n\,\mathrm{d}t,$$

adică :

$$KW=N, \tag{9-119}$$

unde :

W este energia, măsurată în kWh ;

$N=\int_{t_1}^{t_2} n\,dt$ — numărul de rotații efectuat de contor în intervalul de timp t_2-t_1 ;

$K=\frac{k_a}{k_r}$ — constanta contorului, exprimată în rot/kWh.

Din relația (9-119) se vede că numărul de rotații N efectuate de contor în intervalul de timp t_2-t_1 este proporțional cu energia W. Mecanismul de înregistrare a numărului de rotații este astfel realizat, încît cifra citită pe cadranul contorului reprezintă tocmai valoarea energiei consumate, sau debitate, în kWh.

9.10.2. MĂSURAREA ENERGIEI ACTIVE LA CIRCUITE MONOFAZATE

Măsurarea energiei active în curent alternativ monofazat se face aproape exclusiv cu contoare de inducție. Contorul monofazat are o bobină de curent care se leagă în serie cu circuitul și bobina de tensiune care se leagă în paralel cu circuitul (fig. 9-71). Se remarcă faptul că schema electrică a unui contor monofazat este identică cu schema electrică a unui wattmetru.

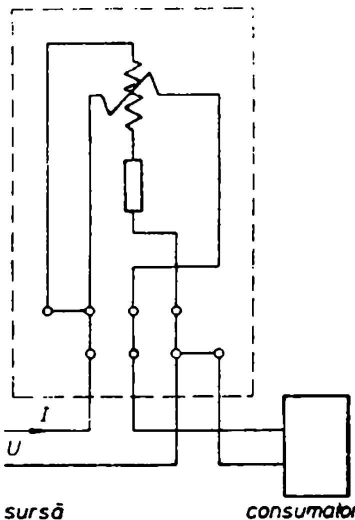


Fig. 6-71. Schema de legare a bobinelor contorului monofazat de energie activă.

Cuplul activ la contorul monofazat se determină cu ajutorul relației (9-30), în care se ține seama că fluxul Φ_{1m} este proporțional cu valoarea efectivă I a curentului din circuit, respectiv din bobina de curent a contorului, fluxul Φ_{2m} este proporțional cu valoarea afectivă U a tensiunii aplicată bobinei de tensiune, iar $\psi=90°-\varphi$. Deci :

$$C=k_a UI\cos\varphi=k_a P, \qquad (9\text{-}120)$$

adică, valoarea medie în raport cu o perioadă a cuplului activ este proporțională cu puterea activă.

Printr-un raționament analog celui aplicat la contorul electrodinamic de la paragraful precedent, rezultă că numărul de rotații N al contorului de inducție este proporțional cu energia activă W (relația 9-119).

9.10.3. MĂSURAREA ENERGIEI REACTIVE LA CIRCUITE MONOFAZATE

Măsurarea energiei reactive la circuite monofazate se face cu ajutorul contoarelor de energie reactivă (varoră-metre). Un contor de energie reactivă este construit în așa fel, încît cuplul său activ este proporțional cu puterea reactivă. Astfel de contoare se folosesc destul de rar deoarece, în general, consumatorii monofazați, formați în majoritate din receptoare casnice, consumă numai energie activă.

9.10.4. MĂSURAREA ENERGIEI ACTIVE ŞI A ENERGIEI REACTIVE LA CIRCUITE TRIFAZATE

Măsurarea energiei active şi reactive la circuite trifazate se face principial la fel ca măsurarea puterii active, respectiv reactive. În practică se folosesc în acest scop contoare trifazate de energie activă (kilowattoră-metre) şi, respectiv, de energie reactivă (kilovaroră-metre).

Un contor trifazat se compune din trei, sau din două contoare monofazate avînd ax comun, respectiv mecanism comun de înregistrare. La construcţiile noi, în loc de trei sau două discuri de aluminiu, există un singur disc.

În fig. 9-72 este arătată schema de conexiuni a unui contor trifazat de energie activă, prevăzut cu trei dispozitive. În fig. 9-73 este arătată schema de conexiuni a unui contor trifazat de energie activă, prevăzut cu două dispozitive, pentru un circuit trifazat fără conductor de nul.

La circuitele monofazate sau trifazate cu tensiuni sau curenţi mari, legarea contoarelor în circuit se realizează prin intermediul transformatoarelor de măsurare, de tensiune şi de curent. În fig. 9-74 este

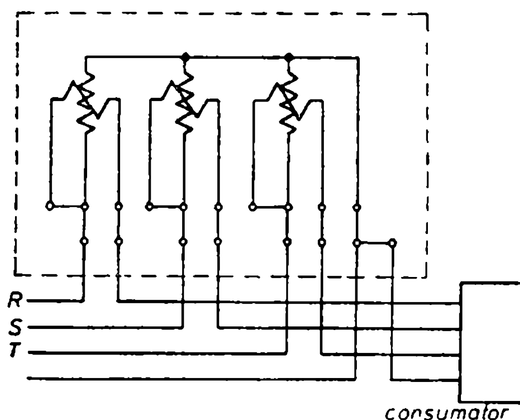


Fig. 9-72. Schema de legare a contorului trifazat pentru măsurarea energiei active, prevăzut cu trei dispozitive.

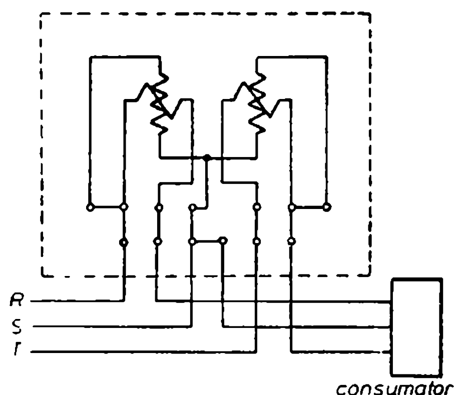


Fig. 9-73. Schema de legare a contorului cu două dispozitive pentru măsurarea energiei active la circuite trifazate.

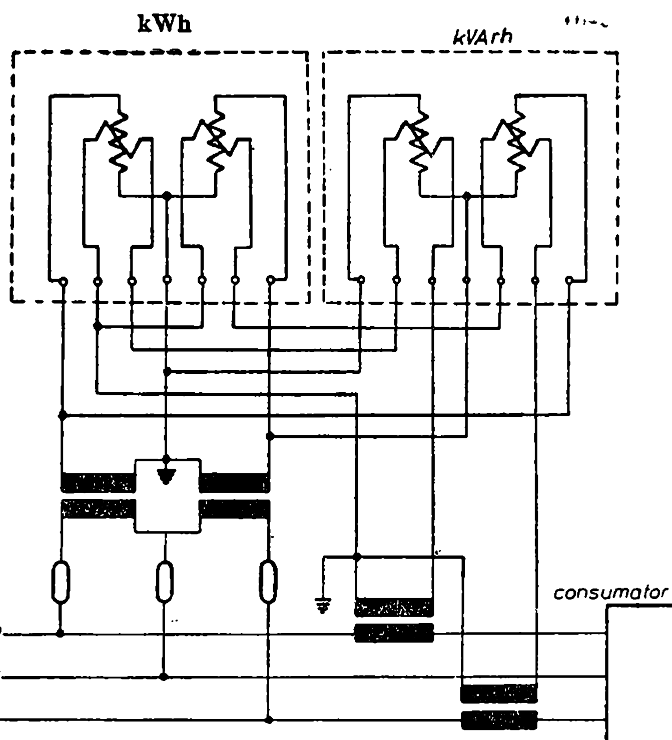


Fig. 9-74. Conectarea contoarelor de energie prin transformatoare de măsurare.

arătată schema de conexiuni prin intermediul transformatoarelor de măsurare a două contoare trifazate, unul pentru energie activă și altul pentru energie reactivă, avînd fiecare cîte două dispozitive.

9.11. MĂSURAREA FACTORULUI DE PUTERE

Se știe că la circuitele receptoarelor monofazate în regim sinusoidal factorul de putere este:

$$\Delta=\frac{P}{P_{max}}=\frac{P}{S}=\cos\varphi, \qquad (9\text{-}121)$$

unde P este puterea activă și S este puterea aparentă.

Relația (9-121) este valabilă și pentru circuitele (receptoarele) trifazate simetrice și echilibrate, alimentate cu tensiuni sinusoidale.

Există mai multe metode de măsurare a factorului de putere la circuite de curent alternativ manofazate și trifazate.

Măsurarea factorului de putere la circuite monofazate cu wattmetrul, voltmetrul și ampermetrul este o metodă indirectă de măsurare, bazată pe următoarea relație de calcul a factorului de putere:

$$\cos\varphi=\frac{P}{UI}. \qquad (9\text{-}122)$$

Puterea activă P se măsoară cu wattmetrul, tensiunea U cu voltmetrul, iar curentul I cu ampermetrul.

Metoda prezintă inconvenientul că necesită citirea simultană a trei instrumente de măsurare, fiind însoțită de erorile de indicație și de citire respective. În afară de aceasta, cînd cos φ are valori apropiate de 1, metoda nu prezintă suficientă precizie deoarece, la asemenea defazaje, o eroare oricît de mică a instrumentelor sau de citire a lor, antrenează o eroare sensibilă în determinarea valorii lui cos φ și a defazajului φ.

Măsurarea factorului de putere la circuite trifazate cu ajutorul a două wattmetre este tot o metodă indirectă, aplicabilă la circuite trifazate simetrice și echilibrate.

Acest procedeu de măsurare rezultă din cele arătate la măsurarea puterii active prin metoda celor două wattmetre. Din relația (9-110) se deduce:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sqrt{3}(P_{W1}-P_{W2})}{P_{W1}+P_{W2}}, \qquad (9\text{-}123)$$

în care P_{W1} și P_{W2} sînt puterile active măsurate la circuitul trifazat de cele două wattmetre. Rezultă:

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+3\left(\frac{P_{W1}-P_{W2}}{P_{W1}+P_{W2}}\right)^2}}. \qquad (9\text{-}124)$$

Măsurarea factorului de putere cu ajutorul cos φ-metrului. Cos φ-metrul este un instrument logometric de tip electrodinamic cu care se măsoară direct fie factorul de putere cos φ, fie defazajul φ, la receptoare (circuite) monofazate.

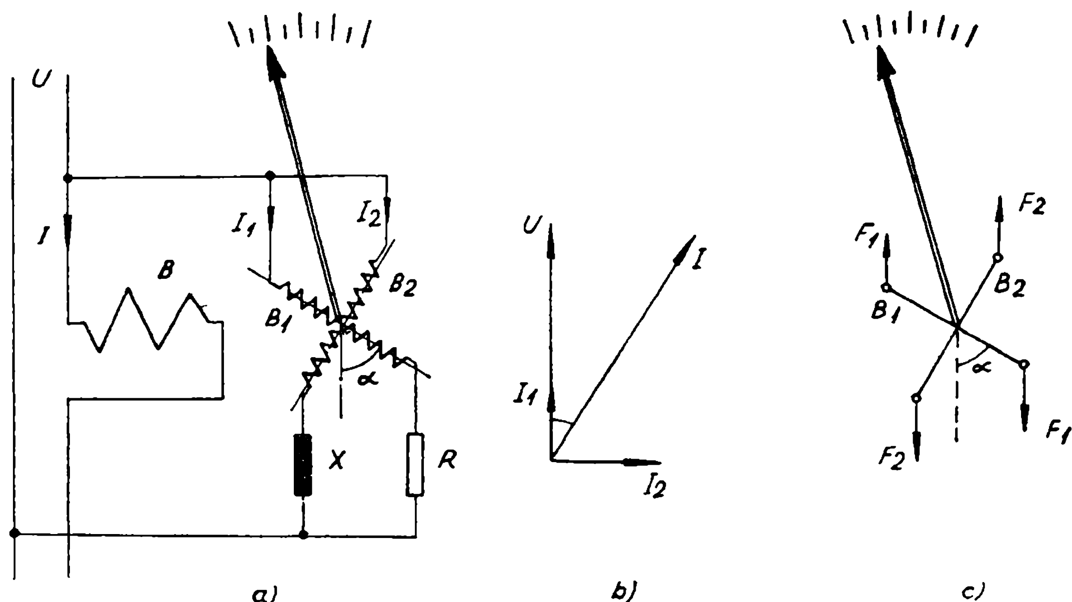


Fig. 9-75. Cos φ-metrul electrodinamic :
a — schema de principiu; *b* — diagrama tensiunii şi curenţilor; *c* — cuplurile.

În fig. 9-75, *a* este reprezentată schema electrică a unui cos φ-metru monofazat de tip electrodinamic. Sistemul fix constă dintr-o bobină B care se leagă în serie cu circuitul, iar sistemul mobil constă din două bobine, B_1 şi B_2, aşezate la 90° una faţă de alta. Bobina B_1 este legată în serie cu o rezistenţă R de valoare mare, iar bobina B_2 este legată în serie cu o reactanţă inductivă X tot de valoare mare. Ambele bobine se leagă în paralel cu circuitul monofazat.

În diagrama din fig. 9-75, *b* sînt arătate defazajele curenţilor I, I_1 şi I_2 din cele trei bobine faţă de tensiunea U a circuitului monofazat.

Cele două bobine B_1 şi B_2 fiind străbătute de curenţii I_1 şi I_2 şi găsindu-se în cîmpul magnetic creat de curentul I din bobina B, asupra fiecăreia din ele acţionează cîte un cuplu. Pentru valorile medii în raport cu o perioadă a acestor cupluri, ţinînd totodată seama şi de unghiul α din fig. 9-75, *c* care stabileşte poziţia în cîmp a celor două bobine, se obţin expresiile :

$$C_1 = k_1 I_1 I \cos\varphi \sin\alpha, \qquad (9\text{-}125)$$

$$C_2 = k_2 I_2 I \sin\varphi \cos\alpha$$

(v. aplicaţia 9-6).

Aceste cupluri acţionează în sensuri opuse, sistemul mobil oprindu-se în poziţia pentru care $C_1 = C_2$, adică

$$k_1 I_1 \cos\varphi \sin\alpha = k_2 I_2 \sin\varphi \cos\alpha, \qquad (9\text{-}126)$$

de unde rezultă :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{k_2 I_2}{k_1 I_1} \operatorname{tg}\varphi$$

sau

$$\operatorname{tg}\alpha = k \operatorname{tg}\varphi, \qquad (9\text{-}127)$$

unde k este o constantă ce înglobează şi curenţii I_1 şi I_2 care depind numai de tensiunea U aplicată şi al căror raport este independent de această tensiune.

Deoarece

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}},$$

rezultă că scala instrumentului poate fi gradată în valori ale factorului de putere $\cos\varphi$ sau în valori ale defazajului φ.

Din relaţia (9-127) se vede că, odată cu schimbarea semnului defazajului φ, se schimbă şi sensul de indicaţie al instrumentului. Deci, instrumentul are scală bilaterală, într-un sens pentru valorile $\cos\varphi$-inductiv şi în celălalt sens pentru $\cos\varphi$-capacitiv.

La circuite trifazate nesimetrice sau neechilibrate, măsurarea factorului de putere este o operaţie mai dificilă deoarece, în acest caz, factorul de putere nu se confundă cu $\cos\varphi$.

9.12. MĂSURAREA FRECVENŢEI

Măsurarea frecvenţei curentului alternativ se face cu instrumentele denumite *frecvenţmetre*.

Frecvenţmetrul cu rezonanţă mecanică are schiţa reprezentată în fig. 9-76 şi constă din: electromagnetul E, a cărui bobină este parcursă de curentul alternativ cu frecvenţa de măsurat, armătura A legată rigid de traversa T şi lamelele vibrante L, fixate de traversa T.

Forţa F de atracţie a armăturii A de către electromagnet are variaţie pulsatorie în timp (fig. 9-77), frecvenţa de variaţie a forţei fiind dublă faţă de frecvenţa curentului din bobina electromagnetului. Aceasta deoarece forţa de

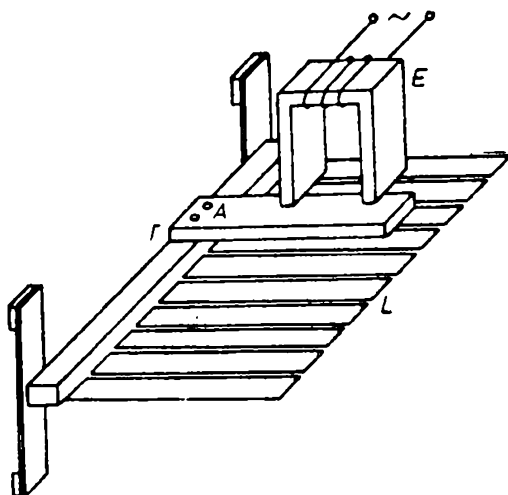


Fig. 9-76. Frecvenţmetrul cu lamele vibrante.

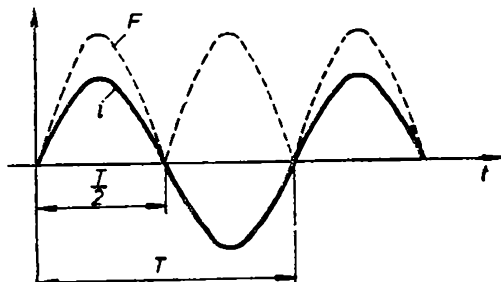


Fig. 9-77. Variaţia în timp a forţei electromagnetului.

atracţie (portantă) la un electromagnet este proporţională cu patratul inducţiei magnetice adică, la o altă scară, este proporţională cu patratul curentului din bobina electromagnetului (dacă circuitul magnetic nu este saturat). Deci, în timpul funcţionării instrumentului, armătura A, traversa T şi lamelele L vor vibra cu frecvenţa dublă faţă de frecvenţa curentului alternativ. Lamelele L avînd dimensiuni diferite, una din ele va intra în rezonanţă, amplitudinea oscilaţiilor sale fiind maximă, ceea ce se observă pe partea frontală a instrumentului, unde se văd capetele vopsite în alb ale lamelelor (fig. 9-78). Instrumentul fiind etalonat anterior, în dreptul lamelei cu amplitudine de oscilaţie maximă se citeşte valoarea în Hz a frecvenţei curentului alternativ. Schimbîndu-se frecvenţa, se schimbă şi lamela care intră în rezonanţă.

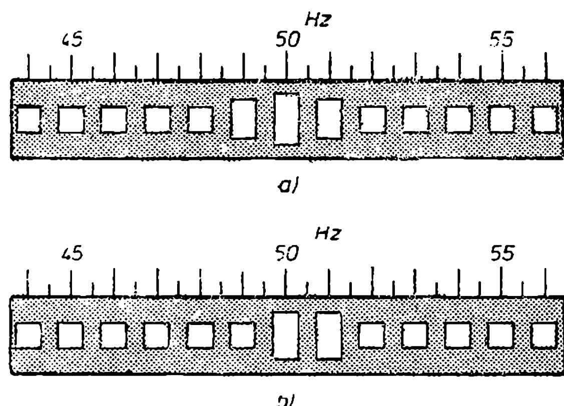


Fig. 9-78. Scala de citire a indicaţiilor la frecvenţmetrul cu lamele vibrante : a — $f=50$ Hz; b — $f=50{,}5$ Hz.

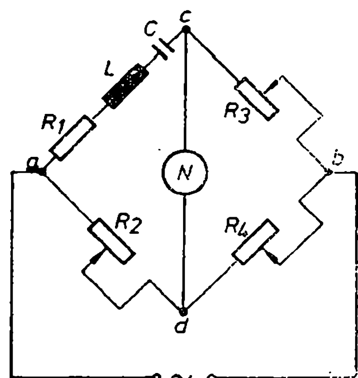


Fig. 9-79. Schema punţii de c.a. pentru măsurarea frecvenţei.

Frecvenţmetrul cu rezonanţă se leagă în circuit ca un voltmetru, adică în paralel.

Frecvenţmetrul cu rezonanţă electrică funcţionează pe principiul punţilor de curent alternativ. Starea de echilibru a unei astfel de punţi depinde, în anumite situaţii şi de valoarea frecvenţei tensiunii de alimentare. Deci, dacă în stare de echilibru se cunosc parametrii elementelor din cele patru braţe ale punţii, rezultă frecvenţa la care s-a obţinut acest echilibru.

În fig. 9-79 este reprezentată schema electrică a unei punţi de c.a. folosită pentru măsurarea frecvenţei. Condiţia de echilibru se exprimă prin relaţia :

$$\left[R_1+\mathrm{j}\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\right]R_4=R_2R_3,$$

adică

$$R_1R_4=R_2R_3,\quad \omega L-\frac{1}{\omega C}=0,$$

de unde rezultă valoarea frecvenţei măsurate :

$$f=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \tag{9-128}$$

Modificînd valoarea lui L sau C, se schimbă frecvenţa pentru care puntea este în echilibru.

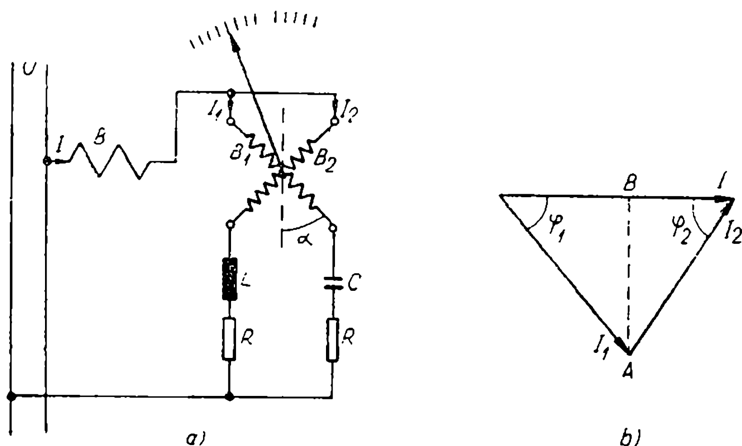


Fig. 9-80. Frecvenţmetrul electrodinamic :
a — schema de principiu; *b* — diagrama curenţilor.

Frecvenţmetrul electrodinamic are principiul de funcţionare analog cu cos φ - metrul electrodinamic (paragraful 9.11). În fig. 9-80, *a* este reprezentată schema electrică a acestui tip de instrument. Conform relaţiei (9-126), condiţia de echilibru este :

$$k_1 I_1 I \cos \varphi_1 \sin \alpha = k_2 I_2 I \cos \varphi_2 \cos \alpha \tag{9-129}$$

sau

$$\frac{k_2}{k_1} \frac{I_2 \cos \varphi_2}{I_1 \cos \varphi_1} = \operatorname{tg} \alpha, \tag{9-130}$$

unde φ_1 şi φ_2 sînt defazajele curenţilor I_1 şi I_2 faţă de I (fig. 9-80, *b*).

Pe de altă parte, $I = \widehat{I_1 + I_2}$, iar din fig. 9-80, *b* rezultă :

$$\overline{AB} = I_1 \sin \varphi_1 = I_2 \sin \varphi_2, \quad \frac{I_2}{I_1} = \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2}. \tag{9-131}$$

Înlocuind relaţia (9-131) în (9-130), se obţine :

$$\frac{k_2}{k_1} \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2} = \operatorname{tg} \alpha. \tag{9-132}$$

Parametrii R, L şi C ai circuitului fiind ficşi, defazajele φ_1 şi φ_2 nu depind decît de frecvenţa f a tensiunii de alimentare, adică :

$$\frac{k_2}{k_1} \mathrm{F}(f) = \operatorname{tg} \alpha, \tag{9-133}$$

de unde rezultă că deviaţia α a instrumentului este o funcţie de frecvenţa f.

9.13. Q-METRUL

Q-metrul este instrumentul folosit pentru măsurarea factorului de calitate a bobinelor de înaltă frecvență, $Q=\frac{\omega_0 L}{R}$. Schema electrică de principiu a instrumentului constă dintr-un circuit cu rezonanță de tensiune (sau de curent), deci cu bobina de inductanță L legată în serie (sau în paralel) cu un condensator variabil cu capacitatea C. La bornele circuitului se aplică tensiunea cu valoarea efectivă U și de frecvență $f_0=\frac{\omega_0}{2\pi}$. Cu un voltmetru (electronic) se măsoară tensiunea U_C pe condensator.

Se modifică capacitatea C pînă cînd U_C devine maxim. În această situație circuitul ajunge în regim de rezonanță și:

$$Q=\frac{U_C}{U}, \tag{9-134}$$

unde

$$U_C=U_L=\omega_0 LI \quad \text{și} \quad U=RI.$$

Capitolul 10

MĂSURĂRI MAGNETICE

10.1. MĂSURAREA INDUCŢIEI MAGNETICE ŞI A FLUXULUI MAGNETIC

Considerînd inducţia magnetică $\bar{B}$ constantă pe secţiunea transversală S a unui miez, fluxul magnetic prin această secţiune este :

$$\Phi = BS. \tag{10-1}$$

Ca urmare, cunoscînd secţiunea şi măsurînd fluxul magnetic, rezultă inducţia magnetică sau, măsurînd inducţia, rezultă fluxul.

La circuitele magnetice de c.c., fluxul magnetic, respectiv inducţia magnetică sînt constante în timp şi nu apare fenomenul de inducţie electromagnetică. În schimb, la circuitele magnetice de c.a. aceste mărimi sînt variabile în timp şi apare fenomenul de inducţie electromagnetică. Aceste precizări sînt utile pentru a înţelege principiile pe care se bazează metodele de măsurare a inducţiei magnetice, respectiv a fluxului magnetic, ce vor fi prezentate în cele ce urmează.

10.1.1. MĂSURAREA INDUCŢIEI MAGNETICE CU SONDA HALL. TESLAMETRUL HALL

Este cunoscut că tensiunea Hall u_H măsurată cu milivoltmetrul mV (fig. 10-1) este proporţională cu inducţia magnetică B a cîmpului în care este plasată sonda Hall şi cu curentul de comandă i_c din sondă, adică :

$$u_H = k_H B i_c, \tag{10-2}$$

unde k_H este constanta Hall. Sonda, realizată din material semiconductor, este aşezată perpendicular pe direcţia inducţiei şi are dimensiuni mici.

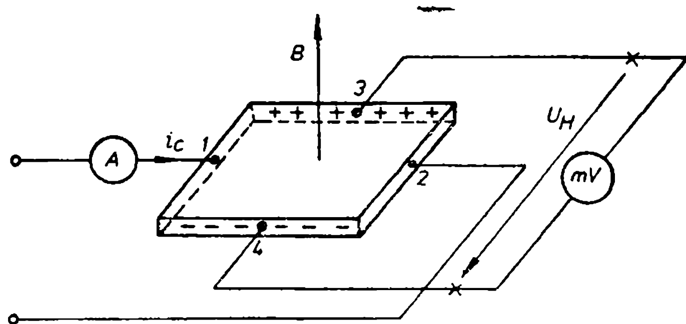


Fig. 10-1. Sonda Hall.

Deci, măsurînd tensiunea Hall și curentul de comandă și cunoscînd constanta Hall, rezultă din (10-2) valoarea inducției magnetice. Deoarece sonda are dimensiuni mici, se măsoară practic cu ajutorul ei inducția magnetică într-un punct. Evident, locul de măsurare trebuie să fie accesibil pentru sondă (întrefierul mașinilor electrice, spațiul dintre polii unui magnet sau electromagnet etc.).

Inducția magnetică ce se măsoară poate fi constantă în timp sau cu variație periodică. În primul caz, curentul de comandă este continuu, iar în al doilea caz curentul de comandă poate fi continuu sau periodic sinusoidal.

Cunoscînd permeabilitatea magnetică a mediului în care este plasată sonda Hall, rezultă și valoarea intensității cîmpului magnetic din relația $B=\mu H$.

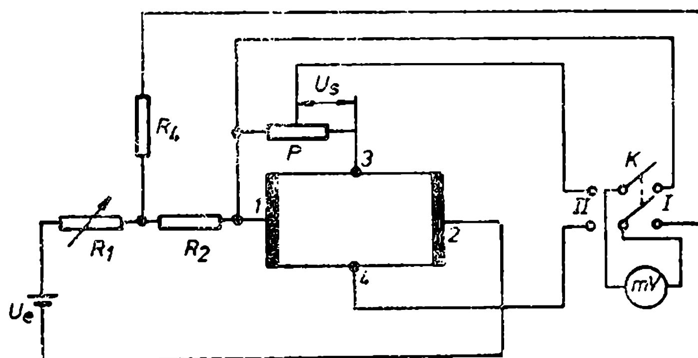


Fig. 10-2. Schema de principiu a teslametrului Hall.

Teslametrul cu sondă Hall este instrumentul construit pentru măsurarea inducției magnetice, avînd schema de principiu reprezentată în fig. 10-2. Curentul de comandă este asigurat de sursa de c.c. cu t.e.m. U_e. Valoarea acestui curent, $i_c=I_c$, trebuie păstrată în timpul măsurării aceeași cu cea de la etalonare, ceea ce se verifică cu instrumentul de măsură mV, în poziția I a comutatorului K, și se corectează prin rezistența R_1 (acul indicator al instrumentului trebuie să fie în dreptul diviziunii marcată cu roșu).

Măsurarea inducției magnetice se face cu comutatorul K în poziția II. Pentru $B=0$, indicația instrumentului trebuie să fie zero, ceea ce înseamnă diferență de potențial nulă între electrozii *3* și *4*. Corectarea în poziția zero a acului indicator se realizează cu potențiometrul P legat între electrozii *1* și *3*, astfel că tensiunea suplimentară U_s compensează diferența de potențial inițială dintre electrozii *3* și *4*.

Printr-o rezistență variabilă în trepte se realizează modificarea sensibilității teslametrului. Teslametrul de fabricație indigenă are domeniile 0,1 ; 0,2 ; 0,5 ; 1 ; 2 T (cu scala instrumentului gradată direct în tesla).

Teslametrele de precizie sînt prevăzute și cu un sistem de compensare în funcție de temperatură.

Dacă inducția magnetică este cu variație sinusoidală în timp, $B=B_m \sin \omega t$, și curentul de comandă este continuu, I_c, instrumentul pentru măsurarea lui u_H (la altă scară pentru măsurarea lui B) trebuie să fie de c.a. Indicația acestui instrument redă valoarea $B_m/\sqrt{2}$.

10.1.2. MĂSURAREA INDUCŢIEI MAGNETICE PE BAZA EFECTULUI GAUSS

Efectul Gauss constă în modificarea rezistenţei electrice a unor tipuri de conductoare metalice, de exemplu conductoare din bismut, în funcţie de intensitatea cîmpului magnetic în care sînt plasate. În acest scop, se realizează o sondă în formă de spirală şi se măsoară variaţia rezistenţei sale atunci cînd este introdusă în cîmp, această variaţie fiind proporţională cu inducţia, respectiv cu intensitatea cîmpului magnetic.

Sonda de bismut are dezavantajul că rezistenţa ei se modifică şi în funcţie de temperatură şi, în plus, prezintă un fenomen de histerezis magnetic. Ca urmare, această metodă de măsurare nu asigură precizia necesară, motiv pentru care nu este folosită pe scară largă în practică.

10.1.3. MĂSURAREA INDUCŢIEI MAGNETICE PE BAZA FENOMENULUI DE INDUCŢIE ELECTROMAGNETICĂ

Introducînd o bobină într-un cîmp magnetic variabil în timp, în bobină se induce o tensiune electromotoare ce poate fi măsurată. Dacă fluxul magnetic prin secţiunea bobinei variază sinusoidal în timp, valoarea efectivă a t.e.m. induse este proporţională cu amplitudinea fluxului:

$$U_e = 4{,}44\, f\, \Phi_m N, \tag{10-3}$$

unde f este frecvenţa de variaţie, iar N este numărul de spire al bobinei (cîmpul magnetic din interiorul bobinei se consideră omogen).

Cunoscînd frecvenţa f, numărul de spire N şi secţiunea S a bobinei şi măsurînd tensiunea U_e, rezultă valoarea maximă a inducţiei magnetice:

$$B_m = \frac{\Phi_m}{S} = \frac{U_e}{4{,}44\, fSN}. \tag{10-4}$$

Dacă cîmpul magnetic este constant în timp, măsurarea inducţiei magnetice pe baza fenomenului de inducţie electromagnetică se realizează rotind bobina de măsurare în cîmp cu o viteză unghiulară constantă. Folosind ca instrument de măsurare galvanometrul balistic, măsurarea se face prin introducerea (sau scoaterea) rapidă a bobinei în cîmp.

Aplicaţia 10-1. Se cere să se justifice posibilitatea de măsurare a inducţiei magnetice în întrefierul maşinilor electrice de c.c. cu ajutorul unei bobine-sondă şi a unui galvanometru balistic.

Rezolvare. În fig. 10-3, *a* este reprezentată schema electrică de măsurare, respectiv de calibrare a galvanometrului. În fig. 10-3, *b* este reprezentată schiţa bobinei sondă care are N spire şi aria medie a unei spire S_{med}.

Calibrarea galvanometrului balistic se face folosind sursa cu tensiunea U_e şi condensatorul cu capacitatea C. Se pune comutatorul K pe poziţia *2*, în care condensatorul C se încarcă de la sursă. Apoi, se trece K pe poziţia *3* şi condensatorul se descarcă pe rezistenţa R legată în paralel cu galvanometrul balistic G. Bobina-sondă este în serie cu galvanometrul. La gal-

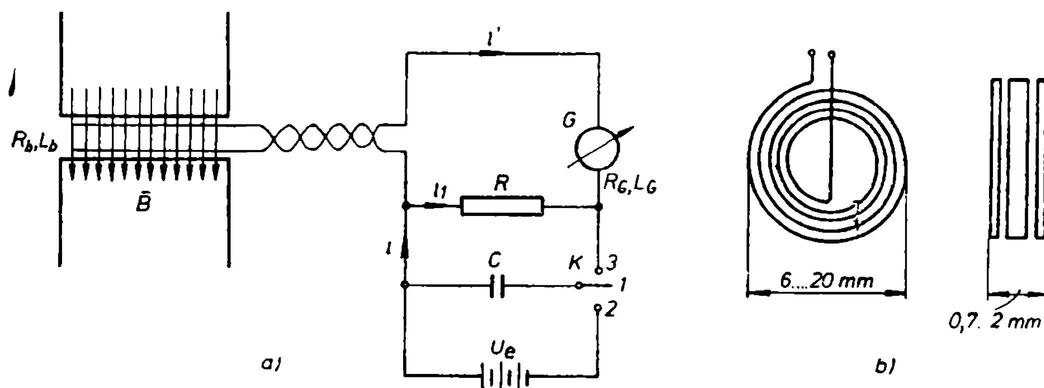


Fig. 10-3. Măsurarea inducției magnetice în întrefier cu bobină și galvanometru :
a — schema electrică; *b* — bobina de măsurare.

vanometru se citește deviația α_0, în funcție de care se calculează constanta K_G a galvanometrului, așa cum se arată în continuare.

Aplicînd teorema a II-a a lui Kirchhoff pentru circuitul galvanometrului, rezultă:

$$(R_b+R_G)\,i'+(L_b+L_G)\,\frac{di'}{dt}=Ri_1.$$

Integrînd în raport cu timpul cît durează descărcarea condensatorului, se obține:

$$(R_b+R_G)\int_0^t i'\,dt+(L_b+L_G)\int_{i_1'=0}^{i_2'=0} di'=R\int_0^t i_1 dt$$

unde $i_1'=0$ și $i_2'=0$ sînt curenții prin circuitul galvanometrului la începutul și la sfîrșitul descărcării condensatorului. Avînd în vedere că $\int i\,dt=Q=Q'+Q_1=CU$, relația de mai sus devine:

$$(R_b+R_G)\,Q'=RQ_1,\quad \text{sau}\quad (R_b+R_G+R)\,Q'=RQ=RCU.$$

Deviația α_0 a galvanometrului balistic este proporțională cu sarcina Q', adică $Q'=K_G\alpha_0$, deci

$$(R_b+R_G+R)\,K_G\alpha_0=RCU,$$

de unde se obține constanta galvanometrului:

$$K_G=\frac{RCU}{(R_b+R_G+R)\,\alpha_0}. \qquad (10\text{-}5)$$

Sensibilitatea galvanometrului balistic se stabilește alegînd o valoare potrivită pentru rezistența R

Măsurarea inducției magnetice în întrefier se realizează scoțînd repede bobina-sondă din cîmp, astfel încît fluxul magnetic prin suprafața sa se modifică de la Φ la 0. Întreruptorul

K fiind pus pe poziţia 3, apare în circuitul galvanometrului balistic un impuls de curen i'' care provoacă deviaţia α_1. Relaţiile de calcul sînt următoarele:

$$(R_b+R_G+R)\, i''+(L_b+L_G)\, \frac{di''}{dt} = -\, NS_{med}\, \frac{dB}{dt},$$

$$(R_b+R_G+R) \int_0^t i''dt + (L_b + L_G) \int_{i_1''=0}^{i_2''=0} di'' = -\, NS_{med} \int_B^0 dB,$$

$$(R_b+R_G+R)\, Q''=NS_{med}B\ ;\ Q''=K_G\alpha_1.$$

Deci

$$B=\frac{(R_b+R_G+R)\, K_G\, \alpha_1}{NS_{med}}$$

sau înlocuind K_G din (10-5), se obţine:

$$B=\frac{RCU}{NS_{med}}\, \frac{\alpha_1}{\alpha_0}. \qquad (11\text{-}6)$$

Întrebarea care se pune este: cît de repede trebuie scoasă bobina-sondă din cîmp? Se fac în acest sens mai multe încercări, scoţînd din ce în ce mai repede bobina din cîmp. Deviaţia α_1 obţinută la galvanometrul balistic este din ce în ce mai mare, pînă la un moment dat, cînd nu mai creşte. Viteza avută la încercarea respectivă este cea corectă.

10.1.4. FLUXMETRUL

Fluxmetrul este un instrument cu ajutorul căruia se măsoară variaţii ale fluxului magnetic. Este de tip magnetoelectric, fără cuplu rezistent, deci fără resoarte spirale, avînd schema reprezentată în fig. 10-4. Bobina sistemului mobil se poate conecta prin intermediul unor lamele maleabile şi a unui comutator cu trei poziţii în următoarele trei situaţii:

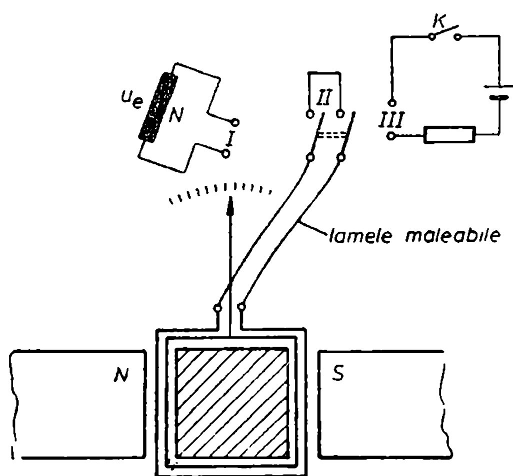


Fig. 10-4. Schema fluxmetrului.

În poziţia *I*, de măsurare, bobina sistemului mobil este conectată la bornele bobinei de măsurare prevăzute cu N spire, în care fluxul magnetic variabil de măsurat induce tensiunea electromotoare u_e.

În poziţia *II*, de transport, bobina sistemului mobil este legată în scurtcircuit.

Poziţia *III* se foloseşte pentru aducerea la zero a instrumentului.

În poziţia de măsurare *I*, asupra sistemului mobil acţionează următoarele cupluri:

Cuplul activ are valoarea momentană :

$$c = k_a i, \tag{10-7}$$

unde i este curentul din bobina mobilă determinat de t.e.m. u_e indusă în bobina de măsurare.

Cuplul de amortizare este proporţional cu viteza unghiulară :

$$C_A = k_A \frac{d\alpha}{dt}, \tag{10-8}$$

unde α este unghiul de deviaţie al sistemului mobil.

Cuplul de inerţie (dinamic) este :

$$C_J = J \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \tag{10-9}$$

unde J este momentul de inerţie al sistemului mobil.

Cu aceste cupluri se obţine următoarea ecuaţie de mişcare a sistemului mobil :

$$C_J + C_A = c$$

sau

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} + k_A \frac{d\alpha}{dt} = k_a i. \tag{10-10}$$

Înmulţind relaţia (10-10) cu dt şi integrînd-o între limitele t_1 şi t_2, rezultă :

$$J \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} d\left(\frac{d\alpha}{dt}\right) + k_A \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha = k_a \int_{t_1}^{t_2} i\, dt, \tag{10-11}$$

unde limitele de integrare s-au stabilit astfel :

$$\text{la } t = t_1 \text{ avem } \alpha = \alpha_1 \text{ şi } \frac{d\alpha}{dt} = \Omega_1;$$

$$\text{la } t = t_2 \text{ avem } \alpha = \alpha_2 \text{ şi } \frac{d\alpha}{dt} = \Omega_2.$$

Dacă se ţine seama că sistemul mobil se mişcă dintr-o poziţie de repaus în altă poziţie de repaus, adică $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$, din (10-11) se obţine :

$$k_A (\alpha_2 - \alpha_1) = k_a Q, \text{ sau } k_A \Delta\alpha = k_a Q, \tag{10-12}$$

unde $\alpha_2 - \alpha_1 = \Delta\alpha$ şi $\int_{t_1}^{t_2} i\, dt = Q$.

În continuare, trebuie să stabilim legătura dintre variaţia fluxului magnetic şi deviaţia sistemului mobil al fluxmetrului.

Aplicînd teorema a II-a a lui Kirchhoff pentru circuitul de măsurare, se obţine :

$$u_e - L \frac{di}{dt} = Ri \tag{10-13}$$

unde L şi R sînt inductanţa şi rezistenţa electrică a acestui circuit (bobina mobilă şi bobina de măsurare).

T.e.m. indusă în bobina de măsurare se determină cu legea inducției electromagnetice în funcție de variația în timp a fluxului magnetic (înlănțuirii magnetice) de măsurat.

$$u_e = -\frac{d\psi}{dt} \qquad (\psi = N\Phi) \tag{10-14}$$

Înlocuind relația (10-14) în (10-13) se obține:

$$-\frac{d\psi}{dt} = L\frac{di}{dt} + Ri \tag{10-15}$$

sau

$$-d\psi = L\,di + Ri\,dt. \tag{10-16}$$

Prin integrare, rezultă:

$$-\int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi = L\int_{i_1}^{i_2} di + R\int_{t_1}^{t_2} i\,dt, \tag{10-17}$$

unde s-au introdus următoarele limite de integrare:

la $t=t_1$ avem $\psi=\psi_1$ și $i=i_1$;

la $t=t_2$ avem $\psi=\psi_2$ și $i=i_2$.

Dacă se consideră că fluxul magnetic (înlănțuirea) are o variație în treaptă de la ψ_1 la ψ_2, curentul din circuit este nul atît înainte, cît și după această variație ($i_1=i_2=0$). În această situație, din (10-17) rezultă:

$$\psi_1 - \psi_2 = RQ$$

sau

$$\Delta\psi = RQ \tag{10-18}$$

unde $\Delta\psi = \psi_1 - \psi_2$ și $Q = \int_{t_1}^{t_2} i\,dt$ (sarcina electrică transportată de curentul i prin circuit în intervalul de timp $t_2 - t_1$).

Din relațiile (10-12) și (10-18) rezultă:

$$\Delta\psi = R\frac{k_A}{k_a}\Delta\alpha, \quad \text{sau} \quad \Delta\psi = K_\Phi \Delta\alpha, \tag{10-19}$$

unde $K_\Phi = R\frac{k_A}{k_a}$ este constanta fluxmetrului.

Se constată că deviația $\Delta\alpha$ a fluxmetrului este proporțională cu variația fluxului magnetic $\Delta\psi = N\Delta\Phi$. De asemenea, se remarcă faptul că poziția inițială α_1 a sistemului mobil poate fi oarecare deoarece în relația (10-19) intervine diferența $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$.

La variații mari ale fluxului magnetic, fluxmetrul se șuntează cu o rezistență electrică.

În situația că variația fluxului magnetic se face de la valoarea Φ la valoarea zero, adică

$$\Delta\psi = \psi = N\Phi = NS_bB \tag{10-20}$$

şi, dacă secţiunea S_b a miezului bobinei de măsurare este cunoscută, rezultă posibilitatea măsurării cu ajutorul fluxmetrului şi a inducţiei magnetice B.

Cu ajutorul fluxmetrului se poate măsura şi sarcina electrică Q, ceea ce rezultă din relaţiile (10-18) şi (10-19) adică :

$$Q = \frac{K_\Phi}{R} \Delta\alpha. \tag{10-21}$$

10.2. MĂSURAREA INTENSITĂŢII CÎMPULUI MAGNETIC

În afară de posibilităţile de măsurare a intensităţii cîmpului magnetic amintite la paragraful 10.1, adică pe baza cunoaşterii inducţiei magnetice şi a permeabilităţii mediului, se mai pot folosi şi următoarele metode :

10.2.1. MĂSURAREA INTENSITĂŢII CÎMPULUI MAGNETIC PE BAZA LEGII CIRCUITULUI MAGNETIC

Intensitatea cîmpului magnetic din interiorul unei bobine toroidale (fig. 10-5) se poate determina pe baza legii circuitului magnetic : $\oint \bar{H} \cdot d\bar{l} = NI$, de unde rezultă :

$$Hl = NI, \text{ sau } H = \frac{NI}{l}, \tag{10-22}$$

unde N este numărul de spire a bobinei, l este lungimea liniei de cîmp (linia de integrare), iar I este curentul din bobină. Deci, cunoscînd pe N şi l şi măsurînd pe I, rezultă H.

Se observă că produsul NI=const., în timp ce lungimea l este mai mare spre periferie şi mai mică spre interiorul bobinei. Înseamnă că H este mai mare în partea interioară a bobinei şi mai mic în partea exterioară. Valoarea medie H_{med} rezultă pentru lungimea medie l_{med} a bobinei.

Dacă diametrul bobinei este mult mai mic în raport cu diametrul torului, se poate considera că H = const. pe toată secţiunea torului.

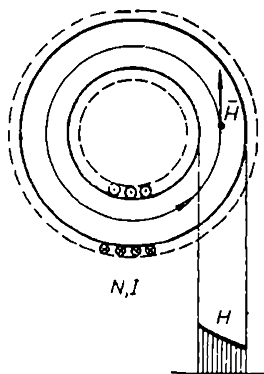


Fig. 10-5. Bobină în formă de tor.

10.2.2. METODA MAGNETOMETRICĂ

Fie H_2 intensitatea cîmpului magnetic de măsurat (fig. 10-6). Perpendicular pe direcţia lui H_2 se găseşte un cîmp magnetic de intensitate cunoscută H_1, care poate fi chiar cîmpul magnetic terestru.

Cu ajutorul unui ac magnetic se determină direcţia intensităţii cîmpului magnetic rezultant, adică unghiul α. Cunoscînd pe α rezultă :

$$H_2 = H_1 \operatorname{tg} \alpha. \tag{10-23}$$

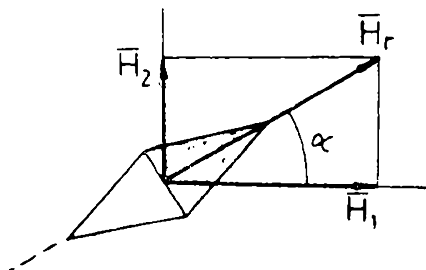


Fig. 10-6. Principiul metodei magnetometrice.

10.3. MĂSURAREA CARACTERISTICILOR MAGNETICE A MATERIALELOR FEROMAGNETICE

10.3.1. DETERMINAREA CICLULUI DE HISTEREZIS CU AJUTORUL OSCILOSCOPULUI

Ciclul de histerezis $B(H)$ constituie o caracteristică fundamentală a materialelor magnetice cu histerezis, în special a celor feromagnetice. Dependent de forma ciclului histerezis rezultă inducția magnetică de saturație, inducția magnetică remanentă, cîmpul magnetic coercitiv, pierderile prin histerezis (proporționale cu suprafața delimitată de ciclu) etc. Inclusiv curba de magnetizare se

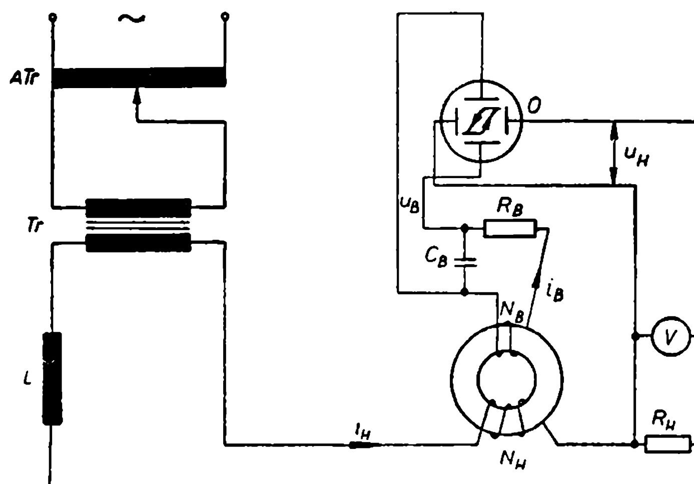


Fig. 10-7. Schema electrică de principiu pentru determinarea cu osciloscopul a ciclului de histerezis.

obține prin unirea vîrfurilor ciclurilor de histerezis principale (obținute pentru diferite valori ale lui H_{max}).

Schema electrică de principiu a instalației de determinare cu ajutorul osciloscopului a ciclului de histerezis este reprezentată în fig. 10-7, în care : M este miezul magnetic în formă de tor, al cărui ciclu de histerezis se determină, T_r este un transformator care are rolul de a nu permite trecerea în circuitul de măsurare a componentelor continue ale tensiunii de alimentare, L este o bobină de filtrare care asigură pentru curentul i_H o variație sinusoidală, iar O este osciloscopul pe ecranul căruia apare ciclul de histerezis.

Magnetizarea miezului M se realizează de către bobina cu N_H spire parcurse de curentul sinusoidal i_H. Avînd în vedere relația :

$$H=\frac{N_H i_H}{l}, \tag{10-24}$$

unde l este lungimea medie a miezului, se observă că intensitatea H a cîmpului magnetic din miez este proporțională cu i_H, respectiv cu căderea de tensiune u_H provocată de acest curent pe rezistența R_H. Tensiunea $u_H=R_H i_H$ este aplicată la plăcile verticale ale osciloscopului și poate fi măsurată în același timp cu voltmetrul V.

Deci, deviația pe orizontală a spotului osciloscopului este proporțională cu intensitatea H a cîmpului magnetic din miezul feromagnetic.

Variația fluxului magnetic din secțiunea S a bobinei de măsurare cu N_B spire produce în această bobină tensiunea electromotoare :

$$u_{eB}=-\frac{d\psi}{dt}=-N_B\frac{d\Phi}{dt}=-N_B S\frac{dB}{dt}. \quad (10\text{-}25)$$

Conform teoremei a doua a lui Kirchhoff și cu notațiile din fig. 10-7, rezultă :

$$u_{eB}=R_B i_B+\frac{1}{C_B}\int i_B\,dt \quad (10\text{-}26)$$

sau, în valori efective :

$$U_{eB}=I_B\sqrt{R_B^2+\left(\frac{1}{\omega C_B}\right)^2}=I_B\frac{\sqrt{R_B^2\omega^2C_B^2+1}}{\omega C_B}. \quad (10\text{-}27)$$

Dacă se aleg parametrii R_B și C_B astfel ca

$$R_B^2\omega^2C_B^2\gg 1, \quad (10\text{-}28)$$

se obține : $U_{eB}=I_B R_B$, de unde rezultă :

$$I_B=\frac{U_{eB}}{R_B},\ \text{respectiv}\ \ i_B=\frac{u_{eB}}{R_B}=-\frac{N_B S}{R_B}\frac{dB}{dt}. \quad (10\text{-}29)$$

Tensiunea aplicată la plăcile orizontale ale osciloscopului este :

$$u_B=\frac{1}{C_B}\int i_B\,dt=-\frac{N_B S}{R_B C_B}\int dB=k_B B, \quad (10\text{-}30)$$

adică deviația spotului pe verticală se face proporțional cu valorile inducției magnetice B.

Deci, deviația pe orizontală a spotului este proporțională cu H și deviația pe verticală este proporțională cu B. Astfel, pe ecranul osciloscopului apare ciclul de histerezis $B(H)$.

La realizarea schemei, este necesar să se pună și condiția ca $N_B i_B \ll N_H i_H$, adică intensitatea H a cîmpului magnetic din miez să fie determinată numai de amperspirele $N_H i_H$, cu variație sinusoidală în timp.

Există și alte metode de determinare a ciclului de histerezis, care pot fi găsite în literatura de specialitate.

10.3.2. DETERMINAREA CURBEI DE MAGNETIZARE CU AJUTORUL PERMEAMETRULUI (PERMEAMETRUL ILIOVICI)

Cu ajutorul permeametrului se determină curba de magnetizare, în c.c., a materialelor feromagnetice.

Principiul de funcționare al unui permeametru se explică pe baza schemei aparatului din fig. 10-8, care constă dintr-un jug din material feromagnetic, o probă realizată din materialul a cărui curbă de magnetizare se determină, o bobină de excitație cu N_1 spire, parcursă de curentul continuu I_1 și o bobină de măsurare legată la fluxmetrul F.

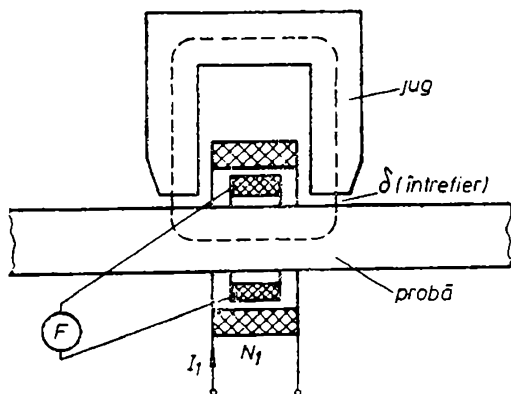


Fig. 10-8. Schema permeametrului fără compensare.

Din legea circuitului magnetic $\oint \bar{H}\, d\bar{l} = NI$ aplicată la circuitul magnetic din fig. 10-8, rezultă :

$$H_p l_p + H_j l_j + 2\, H_\delta \delta = N_1 I_1, \quad (10\text{-}31)$$

unde H_p, l_p, H_j, l_j, H_δ și δ sînt intensitățile cîmpului magnetic, respectiv lungimile (mijlocii) pentru probă, jug și întrefierul existent între probă și jug.

Din relația (10-31) se obține :

$$H_p = \frac{N_1 I_1}{l_p} - \left(H_j \frac{l_j}{l_p} + 2 H_\delta \frac{\delta}{l_p}\right), \quad (10\text{-}32)$$

de unde, dacă se poate neglija paranteza din membrul drept, rezultă :

$$H_p = \frac{N_1 I_1}{l_p}. \quad (10\text{-}33)$$

Adică, cunoscînd pe N_1 și l_p și măsurînd I_1, rezultă H_p.

Pentru ca neglijarea parantezei din (10-32) să fie posibilă, este necesar ca întrefierul δ să fie cît mai mic, ceea ce se obține prin șlefuirea suprafețelor, și pentru ca H_j să fie neglijabil este necesar ca $\mu_j \gg \mu_p$.

Inducția B_p din materialul probei se măsoară cu ajutorul fluxmetrului F, adică se întrerupe curentul I_1 și rezultă o variație a fluxului magnetic în bobina de măsură de la valoarea Φ_1 la zero. Se obține :

$$B_p = \frac{\Phi_1}{S_p}. \quad (10\text{-}34)$$

În acest fel se măsoară perechea de valori H_p și B_p corespunzătoare unui anumit curent I_1. Dînd lui I_1 o altă valoare, se obține o altă pereche de valori pentru intensitatea cîmpului magnetic și inducția magnetică din probă, ș.a.m.d.

Cu perechile de valori măsurate pentru B și H se trasează punct cu punct curba de magnetizare.

Permeametrul Iliovici, reprezentat în fig. 10-9, este prevăzut cu un circuit magnetic de compensare, cu scopul ca eroarea comisă prin neglijarea parantezei din (10-32) să fie minimă, respectiv ca relația (10-33) să fie cît mai exactă.

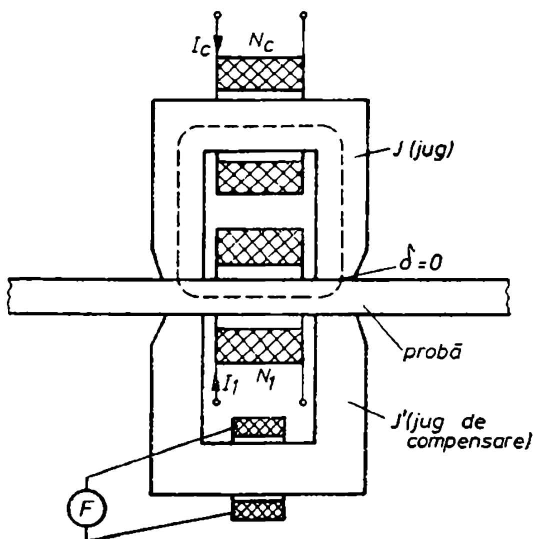


Fig. 10-9. Schema permeametrului Iliovici.

Cu notațiile din fig. 10-9, se obțin relațiile :

$$H_p l_p + H_j l_j = N_1 I_1 + N_c I_c, \quad (10\text{-}35)$$

$$H_j l_j + H_j' l_j' = N_c I_c, \quad (10\text{-}36)$$

unde N_c și I_c sînt numărul de spire și curentul din bobina de compensare. Dacă se realizează condiția :

$$H_j l_j = H_c I_c \quad (10\text{-}37)$$

atunci, din (10-36) rezultă $H'_j l'_j=0$, adică $H'_j=0$, iar din (10-35) se obține (10-33), adică

$$H_p=\frac{N_1 I_1}{l_p}.$$

Condiția de compensare $H'_j=0$ se verifică cu ajutorul fluxmetrului F astfel : la valoarea dată a curentului I_1 se modifică curentul de compensare I_c pînă în momentul în care fluxmetrul nu indică o variație de flux magnetic prin secțiunea jugului de compensare J' atunci cînd se întrerup simultan curenții I_1 și I_c.

Așa cum s-a precizat mai sus, curba de magnetizare a materialului probei se obține punct cu punct, dînd lui I_1 diverse valori și realizînd condiția de compensare (10-37) pentru fiecare valoare.

10.3.3. FEROMETRUL

Ferometrul este aparatul cu care se pot măsura : inducția magnetică B, intensitatea H a cîmpului magnetic și pierderile în fier pentru materiale feromagnetice. Cu valorile măsurate pentru B și H se poate trasa curba de magnetizare.

Schema electrică a ferometrului este reprezentată în fig. 10-10, care conține următoarele elemente : autotransformatorul de rețea AT, regulatorul de fază

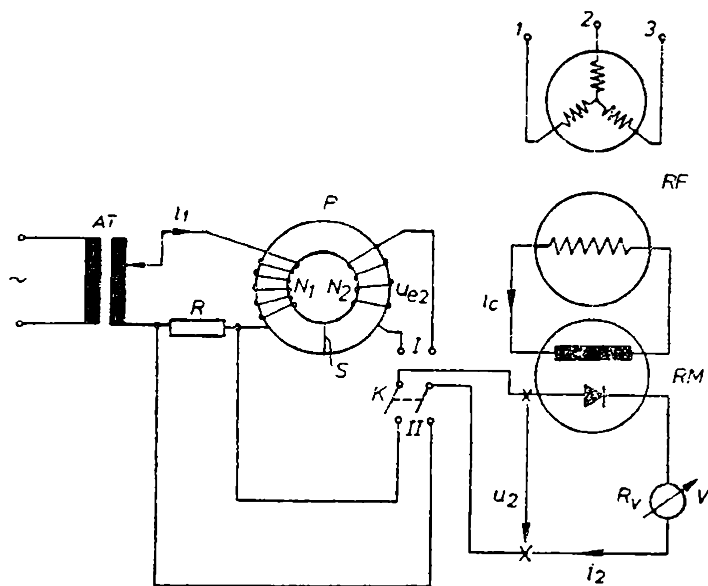


Fig. 10-10. Schema electrică de principiu a ferometrului.

RF cu ajutorul căruia se modifică faza curentului alternativ de comandă i_c, redresorul mecanic RM, voltmetrul de tip magnetoelectric V și proba P, cu secțiunea S, realizată în formă toroidală din materialul de încercat.

Curentul de comandă i_c obținut de la regulatorul de fază RF are aceeași frecvență ca și curentul i_1 de magnetizare a probei, provenit de la autotransformatorul AT.

Curentul i_2 prin voltmetrul V este provocat fie de tensiunea electromotoare $u_{e2}=-L_{12}\frac{di_1}{dt}$ indusă în bobina secundară N_2 (poziția I a comutatorului K), fie de căderea de tensiune $u_R=Ri_1$ provocată pe rezistența R de curentul i_1 din bobina primară N_1 (poziția II a comutatorului K).

Redresorul mecanic are contactul închis și va permite trecerea curentului i_2 numai atît timp cît curentul i_c care îl comandă este pozitiv. Deci, acest redresor va permite trecerea prin voltmetrul V a curentului i_2 numai în timpul alternanțelor pozitive ale curentului de comandă i_c, iar în timpul alternanțelor negative con-

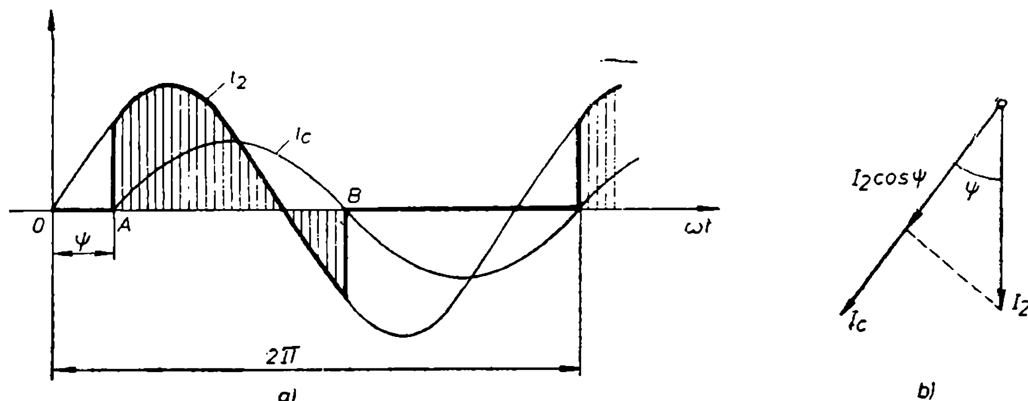


Fig. 10-11. Defazajul ψ dintre curentul de comandă și curentul măsurat la ferometru : *a* — în diagrama liniară; *b* — în diagrama fazorială.

tactele redresorului mecanic sînt deschise și $i_2=0$. În fig. 10-11, *a* este notat cu AB intervalul din perioada 2π cînd curentul $i_2\neq 0$ și cu ψ defazajul dintre i_c și i_2. În fig. 10-11, *b* este reprezentată diagrama fazorială a celor doi curenți, considerați cu variație sinusoidală în timp.

Instrumentul de măsurare V fiind de tip magnetoelectric, are deviația proporțională cu valoarea medie $I_{2\,med}$ a curentului i_2 care, la rîndul său, este proporțională cu $I_2 \cos \varphi$ (v. aplicația 10-2). Cu alte cuvinte, voltmetrul V, avînd rezistența interioară R_v foarte mare, măsoară o tensiune medie proporțională cu proecția curentului I_2 pe direcția curentului de comandă I_c (fig. 10-11, *b*) :

$$U_{2\,med}=R_vI_{2\,med}=\frac{\sqrt{2}}{\pi}R_vI_2\cos\psi=\frac{\sqrt{2}}{\pi}U_2\cos\psi, \qquad (10\text{-}38)$$

unde $R_vI_2=U_2$ este valoarea efectivă a tensiunii sinusoidale de la bornele voltmetrului cu redresor.

Funcționarea ferometrului pentru determinarea punct cu punct a curbei de magnetizare constă în următoarele :

În poziția I a comutatorului K, curentul $i_2=i_{2I}$ prin voltmetrul V este determinat de t.e.m. u_{e2} indusă în bobina secundară N_2, avînd valoarea efectivă :

$$U_{e2}=4{,}44\, fN_2SB_{max}, \qquad (10\text{-}39)$$

unde $4{,}44=\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$.

Ținînd seama că circuitul închis al voltmetrului are practic caracter rezistiv și că i_2 este de valoare mică (R_v foarte mare), rezultă $U_{2I}=U_{e2}$, respectiv I_{2I} este în fază cu U_{e2} (fig. 10-12, *a*). În aceste condiții, relația (10-38) devine :

$$U_{2\,medI}=\frac{\sqrt{2}}{\pi}U_{e2}\cos\psi=2fN_2SB_{max}\cos\psi. \qquad (10\text{-}40)$$

Se reglează faza curentului de comandă i_c pînă cînd indicația U_{2medI} a voltmetrului devine maximă, adică $\psi=0$. În această situație, conform celor explicate mai sus, înseamnă că I_{cI} este în fază cu I_{2I}, respectiv cu U_{e2} (fig. 10-12, *a*) și relația (10-40) obține forma :

$$(U_{2\,medI})_{max}=2\,fN_2SB_{max}, \qquad (10\text{-}41)$$

de unde rezultă :

$$B_{max}=\frac{(U_{2medI})_{max}}{2fN_2S}. \qquad (10\text{-}42)$$

Astfel se determină inducția magnetică maximă în miezul probei, cu comutatorul K în poziția I.

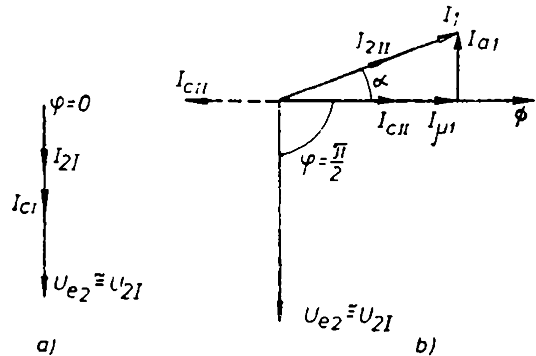


Fig. 10-12. Diagrama fazorială a ferometrului :
a — comutatorul *K* în poziția *I* (măsurarea lui *B*) ; *b* — comutatorul *K* în poziția *II* (măsurarea lui *H*).

Pentru determinarea intensității cîmpului magnetic H_{max} în miezul probei, se lasă în prima etapă a măsurării comutatorul K în poziția I și se modifică faza curentului de comandă i_c pînă cînd voltmetrul V indică zero, ceea ce înseamnă $\psi=\frac{\pi}{2}$, adică I_{cI} perpendicular pe U_{e2} (fig. 10-12, *b*).

În a doua etapă a măsurării, se trece comutatorul K *în poziția II*, fără a schimba faza curentului de comandă. În această situație, curentul $i_2=i_{2II}$ prin voltmetrul V este determinat de căderea de tensiune pe rezistența R, provocată de curentul i_1. În fig. 10-12, *b* este arătat că curentul I_1 are două componente ortogonale : $I_{\mu 1}$ — curentul de magnetizare a miezului probei, care determină fluxul $\Phi=SB$ și componenta I_{a1}, corespunzătoare pierderilor din miez. T.e.m. U_{e2} este defazată în urmă cu $\pi/2$ față de Φ, adică față de $I_{\mu 1}$, iar I_{cII} este în fază (sau opoziție de fază) cu $I_{\mu 1}$ (ceea ce a condus în prima etapă a măsurării la $U_{2\,medI}=0$).

Tensiunea $U_{2\,medII}$ măsurată de voltmetrul V, așa cum s-a arătat mai sus, este proporțională cu proiecția curentului I_1 pe direcția curentului de comandă I_{cII}, adică :

$$U_{2\,medII}=\frac{\sqrt{2}}{\pi}RI_1\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{\pi}RI_{\mu 1}, \qquad (10\text{-}43)$$

de unde rezultă :

$$I_{\mu 1}=\frac{\pi U_{2medII}}{\sqrt{2}\,R}. \qquad (10\text{-}44)$$

Cunoscînd curentul de magnetizare $I_{\mu 1}$ (valoarea efectivă), din legea circuitului magnetic se deduce valoarea maximă a intensității cîmpului magnetic în miez :

$$H_{max}=\frac{\sqrt{2}\,I_{\mu 1}N_1}{l} \qquad (10\text{-}45)$$

unde l este lungimea medie a miezului și $\sqrt{2}\, I_{\mu 1}$ este valoarea maximă a curentului de magnetizare.

Deci, s-au măsurat cu ajutorul ferometrului B_{max} (relația 10-42) și H_{max} (relația 10-45) din materialul probei, adică s-a obținut un punct al curbei de magnetizare.

Cu ajutorul autotransformatorului AT se dau mai multe valori curentului I_1 și se obțin perechi de valori B_{max}, H_{max} cu care se trasează curba de magnetizare.

Aplicația 10-2. Să se justifice că valoarea medie a curentului i_2 ce trece prin instrumentul magnetoelectric V, alimentat prin redresorul mecanic RM (fig. 10-10), este $I_2 \cos\psi$, în care I_2 este valoarea efectivă a acestui curent (sinusoidal) și ψ este defazajul curentului i_2 față de curentul de comandă i_c (fig. 10-11).

Rezolvare. Valoarea medie, în raport cu o perioadă, a curentului i_2 permis de către redresorul mecanic RM să treacă prin voltmetrul V (fig. 10-11) este:

$$I_{2med} = \frac{1}{T}\int_{\frac{\psi}{\omega}}^{\frac{\pi+\psi}{\omega}} i_2\, dt = \frac{1}{T}\int_{\frac{\psi}{\omega}}^{\frac{\pi+\psi}{\omega}} \sqrt{2} I_2 \sin\omega t\, dt =$$

$$= \frac{1}{T}\sqrt{2} I_2 \frac{1}{\omega}\left| -\cos\omega t \right|_{\frac{\psi}{\omega}}^{\frac{\pi+\psi}{\omega}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} I_2 \cos\psi.$$

Măsurarea pierderilor în fier cu ajutorul ferometrului se realizează în felul următor:

Pierderile în fier sînt date de relația:

$$P_{Fe} = U_{e1} I_1 |\cos\varphi| = U_{e1} I_1 \cos\varphi' = U_{e1} I_1 \sin\alpha = U_{e1} I_{a1}, \qquad (10\text{-}46)$$

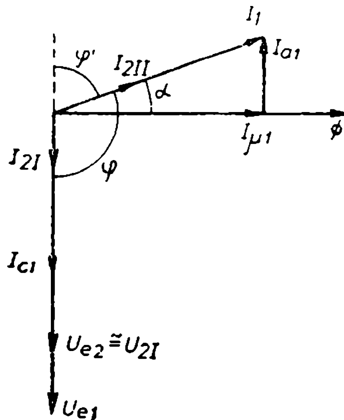


Fig. 10-13. Diagrama fazorială a ferometrului la măsurarea pierderilor în fier.

unde U_{e1} este valoarea efectivă a tensiunii induse în bobina primară cu N_1 spire, I_1 este curentul din primar, $\varphi = \pi - \varphi' = \frac{\pi}{2} + \alpha$ este defazajul dintre aceste două mărimi și $I_2 \sin\alpha = I_{a1}$ este componenta curentului corespunzătoare pierderilor (fig. 10-13).

Se pune comutatorul K în poziția I și se reglează faza lui i_c pînă cînd voltmetrul V indică valoarea maximă. În acest caz, așa cum s-a arătat mai sus, curentul I_{cI} este în fază cu tensiunea $U_{e2} = U_{2I}$ (fig. 10-13). Valoarea medie a tensiunii măsurate este

$$(U_{2medI})_{max} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} U_{2I} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} U_{e2} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{N_2}{N_1} U_{e1}, \qquad (10\text{-}47)$$

unde s-a ținut seamă că $U_{e1}/U_{e2} = N_1/N_2$. Din această relație se obține

$$U_{e1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{N_1}{N_2}(U_{2medI})_{max}. \qquad (10\text{-}48)$$

Apoi, fără a modifica curentul de comandă I_c, se trece comutatorul K în poziția II în care I_{2II} este în fază cu I_1 (fig. 10-13) și voltmetrul V măsoară tensiunea medie :

$$U_{2\,medII}=\frac{\sqrt{2}}{\pi}U_{2II}\left|\cos\psi\right|=\frac{\sqrt{2}}{\pi}RI_1\left|\cos\varphi\right|=\frac{\sqrt{2}}{\pi}RI_1\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{\pi}RI_{a1} \tag{10-49}$$

unde s-a ținut seama că $\psi=\varphi=\frac{\pi}{2}+\alpha$. Din această relație se obține

$$I_{a1}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\,\frac{U_{2\,medII}}{R}. \tag{10-50}$$

Înlocuind (10-48) și (10-50) în (10-46) rezultă :

$$P_{Fe}=\frac{\pi^2}{2}\,\frac{N_1}{N_2}\,(U_{2medI})_{max}\frac{U_{2\,medII}}{R}. \tag{10-51}$$

Deci, măsurînd pe $(U_{2\,medI})_{max}$ și $(U_{2\,medII})$ și cunoscînd N_1, N_2 și R, rezultă pierderile în miezul feromagnetic al probei supuse încercării, care, așa cum se cunoaște, constau din pierderile prin histerezis și pierderile prin curenții turbionari. Modificînd valoarea tensiunii de alimentare a bobinei primare se poate determina, punct cu punct, curba pierderilor în funcție de tensiune.

La construcția ferometrului se pune condiția ca $N_2I_2 \ll N_1I_1$, adică magnetizarea miezului probei să fie produsă numai de amperspirele primare.

10.3.4. MĂSURAREA PIERDERILOR ÎN FIER CU APARATUL EPSTEIN

Pierderile în fier prin curenți turbionari și prin histerezis apar în miezurile bobinelor de curent alternativ. Se consideră în fig. 10-14, *a* o astfel de bobină care are o rezistență proprie R_L (constantă) și inductanța $L=\frac{\psi}{i}$ variabilă în funcție de curentul din bobină datorită saturației magnetice a miezului.

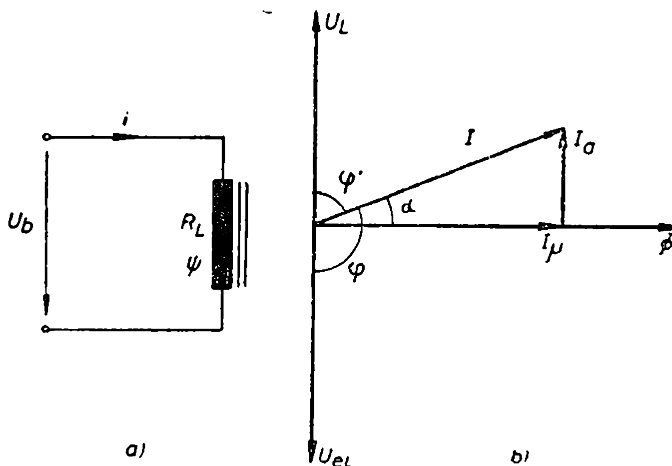


Fig. 10-14. Bobina cu pierderi :
a — schema electrică; *b* — diagrama fazorială.

Curentul din bobină fiind variabil, t.e.m. indusă în bobină este :

$$u_{eL} = -\frac{d\psi}{dt}. \tag{10-52}$$

Dacă u_b este tensiunea alternativă aplicată la bornele bobinei, cu teorema a II-a a lui Kirchhoff se obține :

$$u_b + u_{eL} = R_L i, \tag{10-53}$$

de unde, ținînd seama de (10-52), rezultă :

$$u_b = R_L i + \frac{d\psi}{dt}$$

sau

$$u_b = R_L i + u_L, \tag{10-54}$$

în care

$$u_L = \frac{d\psi}{dt} \quad (u_L = -u_{eL}).$$

În figura 10-14, *b* este reprezentată diagrama fazorială a valorilor efective pentru bobina considerată.

Pierderile în fier sînt date de relația :

$$P_{Fe} = U_{eL} I \, |\cos\varphi| = U_L I \cos\varphi' = U_L I \sin\alpha, \tag{10-55}$$

unde s-a avut în vedere că $U_{eL} = U_L$ și $\varphi' = \pi - \varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Modulul $|\cos\varphi|$ s-a introdus pentru a rezulta valoarea pozitivă a pierderilor în fier.

Schema de principiu pentru măsurarea pierderilor în fier este reprezentată în fig. 10-15 și constă din miezul *M* în care se măsoară pierderile, pe care este așezată o bobină parcursă de curent alternativ, alimentată de la o sursă cu tensiunea

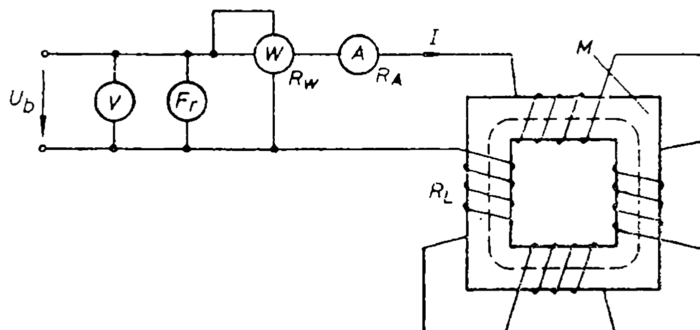


Fig. 10-15. Schema electrică pentru măsurarea pierderilor în fier.

la borne U_b, care se măsoară cu voltmetrul *V*. Există în circuit un wattmetru *W* pentru măsurarea puterii absorbită de la sursă, ampermetrul *A* care măsoară curentul *I* din bobină și frecvențmetrul F_r care măsoară frecvența acestui curent.

Puterea măsurată de wattmetrul *W* este :

$$P_W = (R_W + R_A + R_L)\, I^2 + P_{Fe}, \tag{10-56}$$

unde R_W, R_A și R_L sînt rezistențele electrice din circuit.

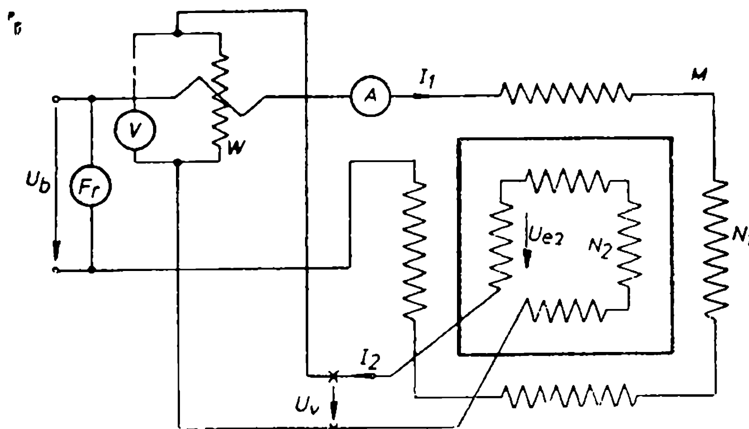


Fig. 10-16. Schema aparatului Epstein.

Din relația (10-56) se obține :

$$P_{Fe} = P_W - (R_W + R_A + R_L)\, I^2. \qquad (10\text{-}57)$$

Această relație de calcul a pierderilor în fier conduce la erori mari din cauză că se face diferența între două valori de același ordin de mărime și pentru că rezistența circuitului se modifică cu temperatura.

Aparatul Epstein asigură măsurarea pierderilor în fier cu precizie ridicată, avînd schema reprezentată în fig. 10-16. Pe miezul M, cu o greutate de 10 kg, realizat din materialul feromagnetic din încercat, sînt așezate o bobină primară cu N_1 spire și o bobină secundară cu N_2 spire, astfel încît $N_1 = N_2$ și t.e.m. induse $U_{e1} = U_{e2}$, fiind defazate cu 90° în urmă față de fluxul magnetic Φ care le produce.

Solenația care produce magnetizarea miezului este :

$$N_1 \underline{I}_1 + N_2 \underline{I}_2 = N_1 \underline{I}_{10} \qquad (10\text{-}58)$$

de unde, ținînd seama că $N_1 = N_2$, rezultă :

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{I}_{10} \qquad (10\text{-}59)$$

în care $\underline{I}_1$ și $\underline{I}_2$ sînt curentul din primar și curentul din secundar, exprimați sub formă complexă.

În fig. 10-17 este reprezentată în planul complex diagrama circuitului din fig. 10-16 în care se ține seama de (10-59) și de faptul că fluxul Φ din miez este produs de componenta $I_{\mu 1}$ a curentului I_{10}. Din diagramă rezultă :

$$I_1 \cos \varphi_1' - I_2 \cos \varphi_2 = I_{10} \cos \varphi_{10}' \qquad (10\text{-}60)$$

Pierderile în miezul de fier se exprimă prin relația

$$P_{Fe} = U_{e1} I_{10} \,|\cos \varphi_{10}| = U_{e1} I_{10} \cos \varphi_{10}' \qquad (10\text{-}61)$$

unde s-a ținut seama că $\varphi_{10} = \pi - \varphi_{10}'$.

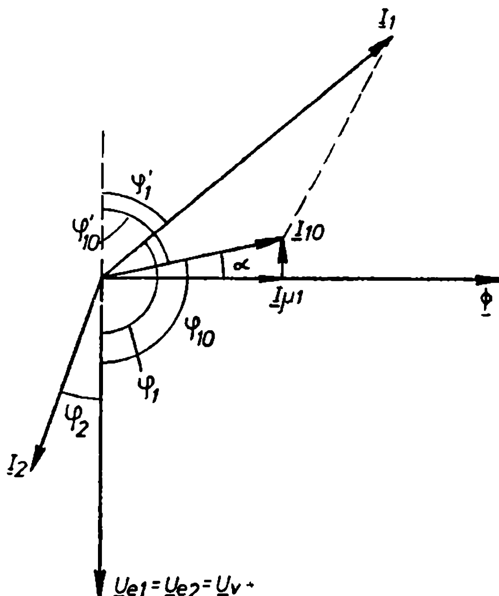


Fig. 10-17. Diagrama în planul complex pentru aparatul Epstein.

Urmărind schema din fig. 10-16, se observă că bobina de tensiune a wattmetrului W este legată în paralel cu voltmetrul V şi este alimentată cu tensiunea secundară U_V. Curentul prin aceste aparate este foarte mic (neglijabil), astfel că se pot neglija căderile de tensiune din bobina secundară şi se obţine $U_V = U_{e2} = U_{e1}$.

Puterea măsurată de wattmetrul W este :

$$P_W = U_V I_1 \,|\cos \varphi_1|, \tag{10-62}$$

unde în membrul drept s-a luat modulul din cos φ_1 pentru a se obţine valoarea pozitivă a puterii, deoarece $\varphi_1 > 90°$. Avînd în vedere că $\varphi_1 = \pi - \varphi_1'$, se mai poate scrie pentru această putere relaţia :

$$P_W = U_V I_1 \cos \varphi_1', \tag{10-63}$$

în care, înlocuind $I_1 \cos \varphi_1'$ din (10-60), se obţine :

$$P_W = U_V I_{10} \cos \varphi_{10}' + U_V I_2 \cos \varphi_2. \tag{10-64}$$

Semnificaţia termenilor din membrul drept ai relaţiei (10-64) este următoarea :

— pierderile în fier :

$$P_{Fe} = U_V I_{10} \cos \varphi_{10}' = U_{e1} I_1 \cos \varphi_{10}' ; \tag{10-65}$$

— pierderile în secundar :

$$P_2 = U_V I_2 \cos \varphi_2. \tag{10-66}$$

Deci (10-64) devine $P_W = P_{Fe} + P_2$, de unde rezultă :

$$P_{Fe} = P_W - P_2. \tag{10-67}$$

Se remarcă faptul că pierderile în fier se obţin tot ca diferenţa a două puteri dar, în acest caz, pierderile în secundar P_2 se pot determina cu precizie mai mare, curentul din secundar fiind de valoare mică.

Cadrul feromagnetic al aparatului Epstein are latura de 50 cm sau 25 cm (STAS 7758-67). Cadrul cu latura mai mare se foloseşte pentru materialele cu pierderi specifice mai mari (0,8...2,2 W/kg) şi cel cu latura mai mică pentru materialele cu pierderi specifice mai mici (0,5...1,1 W/kg).

Dacă sursa de alimentare a aparatului Epstein este de frecvenţă variabilă, cu ajutorul lui se poate realiza şi separarea pierderilor în fier, adică pierderile prin curenţi turbionari şi prin histerezis.

Capitolul 11

INSTRUMENTE DE MĂSURARE ELECTRONICE ȘI ÎNREGISTRATOARE

Instrumentele electronice, a căror construcție s-a dezvoltat foarte mult în ultimul timp, sînt folosite în special pentru măsurarea tensiunilor, curenților și puterilor foarte mici, datorită faptului că au un consum propriu foarte mic (neglijabil) în comparație cu instrumentele clasice. În general, un instrument electronic are o parte de amplificare și un sistem de măsurare de tip magnetoelectric. Precizia instrumentelor electronice este în jur de $\pm(1...3\%)$, datorită modificării în timp, în funcție de temperatură etc., a parametrilor unor componente electronice.

Instrumentele înregistratoare, clasice sau electronice, sînt prevăzute cu un sistem de imprimare analogică sau cifrică a mărimilor măsurate.

În cele ce urmează se vor prezenta unele dintre cele mai uzuale instrumente electronice și înregistratoare.

11.1. OSCILOSCOPUL ELECTRONIC

Partea principală a osciloscopului electronic este tubul catodic, a cărui schemă de principiu este reprezentată în fig. 11-1. Catodul c al tubului este încălzit de filamentul f și emite electroni. Fiind atrași de către anodul a_1, situat la un potențial ridicat, electronii trec prin grila de comandă g, de formă cilindrică, conectată la un potențial negativ, fiind focalizați în axa cilindrului. Al doilea anod a_2, tot de formă cilindrică ca și primul, este situat la un potențial mai ridicat decît a_1. Spotul de electroni, care trece de la primul, la al doilea anod, este focalizat din nou și puternic accelerat spre ecranul fluorescent al tubului

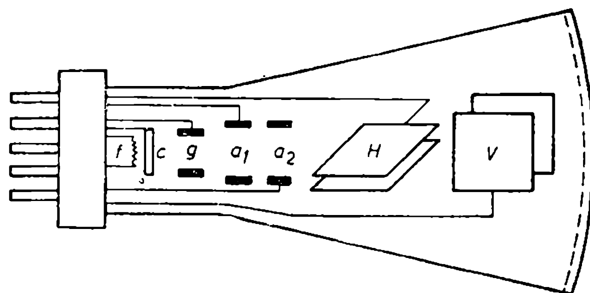


Fig. 11-1. Tubul catodic.

pe care îl bombardează și, astfel, pe ecran se va vedea un punct luminos. Luminozitatea (intensitatea) spotului de pe ecran se reglează modificînd potențialul negativ al grilei g, iar focalizarea (concentrarea) spotului se realizează modificînd diferența de potențial dintre anozii a_1 și a_2.

În drumul spre ecran, spotul de electroni trece prin spațiul dintre două plăci verticale V și două plăci orizontale H.

Între plăcile verticale V se aplică o diferență de potențial (tensiune) u_x, cu variație în timp sub formă de dinți de ferăstrău (fig. 11-2), denumită *tensiune de baleiaj* sau *bază de timp*, care este obținută de la un oscilator propriu al osciloscopului. Sub influența diferenței de potențial u_x, spotul de electroni se va deplasa pe orizontală, descriind pe ecran un segment de dreaptă. Timpul t_a cît spotul se mișcă spre dreapta ecranului este mult mai lung decît timpul t_b cît spotul se mișcă spre stînga.

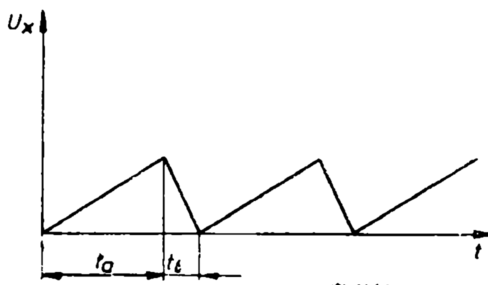


Fig. 11-2. Tensiunea de baleiaj în formă de dinți de ferăstrău.

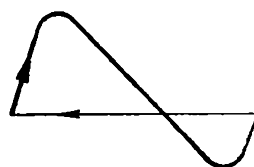


Fig. 11-3. Imaginea pe ecranul osciloscopului a sinusoidei.

Între plăcile orizontale se aplică o diferență de potențial (tensiune) u_y, proporțională cu mărimea a cărei variație în timp se urmărește. Sub influența acestei diferențe de potențial, spotul de electroni se deplasează pe verticală. Dacă, spre exemplu, u_y este o tensiune cu variație sinusoidală în timp, iar frecvența bazei de timp u_x este egală sau submultiplu întreg față de frecvența tensiunii u_y, pe ecranul osciloscopului se vor vedea imagini luminoase de formă sinusoidală. În fig. 11-3 este arătată sinusoida obținută în cazul egalității celor două frecvențe, care este incompletă din cauza revenirii spotului în poziția inițială. Dacă frecvența bazei în timp nu este submultiplu întreg al frecvenței semnalului de studiat, sau este un multiplu al acestei frecvențe, pe ecranul osciloscopului apare o rețea de curbe luminoase suprapuse. De aceea, frecvența bazei de timp u_x trebuie sincronizată cu frecvența semnalului.

În situația cînd u_x și u_y au ambele variație sinusoidală în timp, pe ecran se obțin „figurile lui Lissajoux“ (fig. 11-4), a căror formă depinde de raportul frecvențelor celor două tensiuni și de diferența de fază dintre ele.

Din cele prezentate este evident că osciloscopul se poate folosi numai pentru studiul mărimilor cu variație periodică în timp și sub formă de impuls. Mărimile cu variație aperiodică nu pot fi urmărite cu acest aparat.

Osciloscopul este un aparat fără inerție, deoarece inerția spotului de electroni în mișcare este practic zero.

Există și osciloscoape cu mai multe spoturi, cu ajutorul cărora se pot urmări simultan mai multe mărimi variabile periodic în timp.

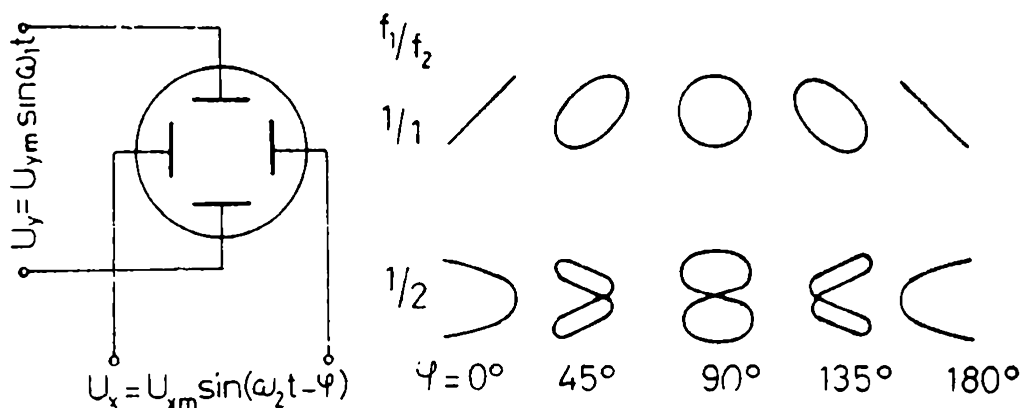


Fig. 11-4. Figurile lui Lissajoux.

Oscilografele electronice sînt osciloscoape prevăzute cu dispozitiv de fotografiere (înregistrare).

Aplicațiile osciloscopului electronic se referă aproape la toate domeniile tehnicii moderne. Cu o etalonare adecvată a deplasării spotului pe verticală, osciloscopul poate fi folosit pentru măsurarea amplitudinii unor tensiuni sau curenți cu variație periodică în timp. De asemenea, poate fi vizualizată forma de variație în timp a acestor tensiuni sau curenți (sinusoidală sau nesinusoidală).

Dacă se cunoaște cu precizie frecvența tensiunii de baleiaj f_2, se poate măsura cu ajutorul osciloscopului frecvența f_1 a semnalului care provoacă deflexia pe verticală. De exemplu, dacă pe ecran se obține o imagine de forma reprezentată în fig. 11-3, înseamnă că $f_1 = f_2$.

La paragraful 9.7 s-au făcut referiri privind folosirea osciloscopului electronic pentru localizarea defectelor în cabluri, iar la paragraful 10.3.1 s-a explicat metoda de determinare a ciclului de histerezis al materialelor feromagnetice cu ajutorul osciloscopului.

Osciloscopul electronic are multiple aplicații în tehnica măsurărilor și verificărilor circuitelor și dispozitivelor electronice și cu semiconductoare folosite în telecomunicații, automatizări etc. Spre exemplu, cu osciloscopul se pot testa circuitele de redresare, circuitele de comutație statice cu tranzistoare și tiristoare etc.

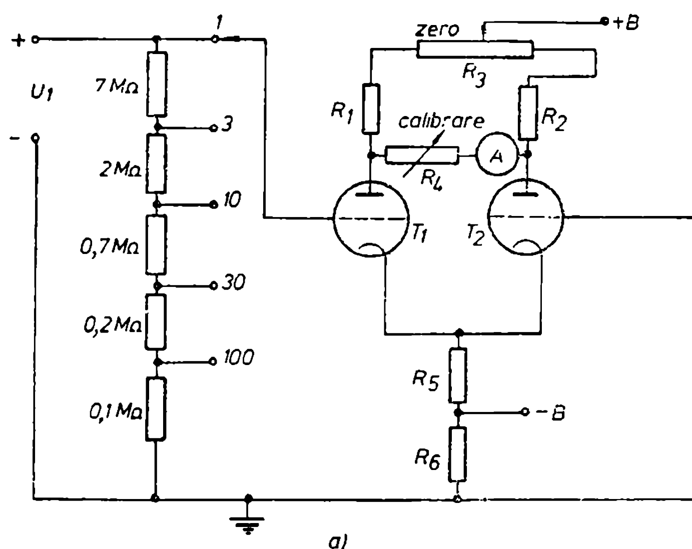
11.2. VOLTMETRE ELECTRONICE

Voltmetrele clasice (magnetoelectrice, electromagnetice, electrodinamice) au două mari dezavantaje. În primul rînd, conectarea lor introduce o sarcină suplimentară în circuit, deoarece rezistența (impedanța) lor interioară este relativ mică, mai ales pentru domeniile mici de măsurare. În al doilea rînd, cu ajutorul lor nu se pot măsura în c.c. sau în c.a., tensiuni mici, de ordinul milivolților sau microvolților.

Voltmetrele electronice elimină aceste dezavantaje prin aceea că au o rezistență (impedanță) interioară, de intrare, foarte mare, ceea ce le conferă o sensibilitate mărită. Dezavantajul lor constă în aceea că sînt mult mai scumpe și necesită o sursă de alimentare.

11.2.1. VOLTMETRE CU TUBURI ELECTRONICE

În fig. 11-5, *a* şi *b* sînt prezentate schemele electrice de principiu pentru două tipuri de *voltmetre cu tuburi electronice* folosite *pentru măsurarea tensiunilor continue.* Se observă forma în punte a schemei, cu cele două tuburi electronice (triode) T_1 şi T_2 în două laturi şi cu rezistenţele R_1, R_2 în celelalte două laturi ale punţii. Instrumentul de măsurare *A*, de tip magnetoelectric, este introdus într-o diagonală, iar sursa de alimentare, $+B$ şi $-B$, în cealaltă diagonală. Tuburile electronice au şi rol de amplificare. Tensiunea de măsurat U_1 se aplică la grila de comandă a tubului T_1 prin intermediul unui atenuator (cu rezistenţa totală de 10 MΩ).



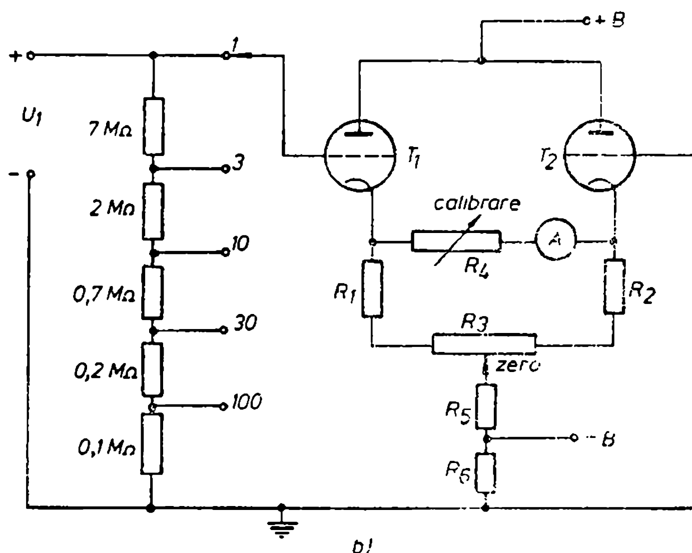


Fig. 11-5. Schema voltmetrului electronic cu două triode avînd catodul comun (*a*), respectiv anodul comun (*b*).

Prin aplicarea unui potențial pozitiv la grila de comandă a tubului T_1, rezistența anodică a tubului descrește și puntea se dezechilibrează. Simultan, crescînd curentul anodic, catodul tubului T_2 devine mai pozitiv față de grilă și rezistența anodică a acestui tub crește. Deci, ambele tuburi participă la dezechilibrarea punții. Instrumentul de măsurare A sesizează dezechilibrul punții, indicația sa fiind proporțională cu tensiunea de măsurat U_1 (aplicată la grila tubului T_1).

Rezistențele R_1 și R_2 sînt fixe. Cu rezistența R_3 se aduce instrumentul de măsurare A în poziția zero (înainte de măsurare), iar cu rezistența R_4 se fixează sensibilitatea instrumentului.

Se remarcă faptul că rezistența de intrare este aceeași (10 MΩ) pentru toate domeniile de măsurare. Pentru a nu se modifica această rezistență de intrare, cordoanele de legătură folosite la intrare trebuie să fie foarte bine izolate. De asemenea, componentele electronice din schemă trebuie să aibă parametri cu toleranțe cît mai mici și independenți de factori externi. De exemplu, pentru ca condițiile de temperatură la cele două tuburi să fie aceleași, se folosește obișnuit o triodă dublă. Toate aceste măsuri au menirea ca puntea să nu se dezechilibreze sub influența unor factori perturbatori externi.

Voltmetrele cu tuburi electronice pentru măsurarea tensiunilor alternative (periodice) necesită un detector, adaptat la intrarea voltmetrului, care permite :

— măsurarea valorii medii ;
— măsurarea valorii de vîrf (amplitudinii) ;
— măsurarea valorii efective (RMS).

În fig. 11-6 este arătată schema de principiu a unui detector care permite măsurarea valorilor de vîrf (amplitudinilor) unei tensiuni cu variație periodică.

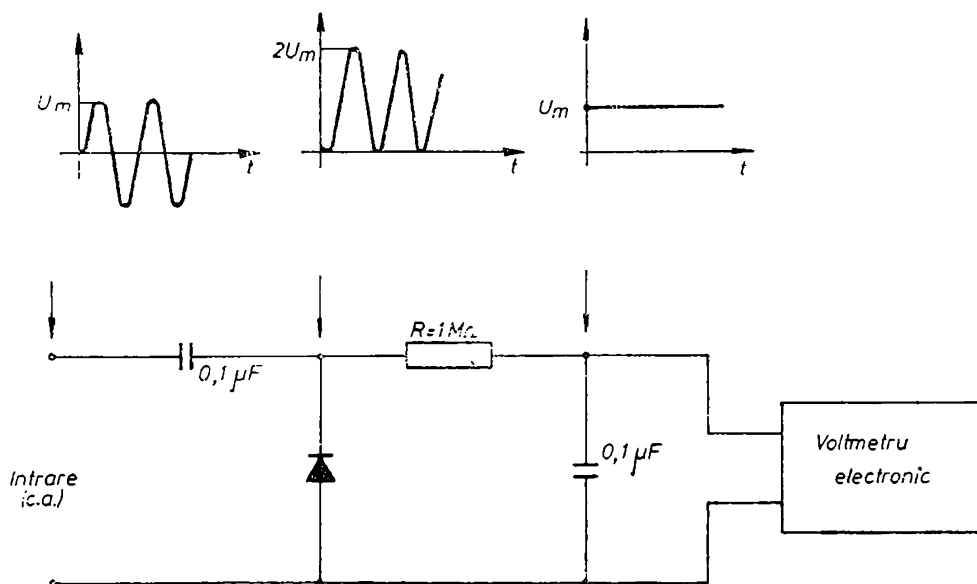


Fig. 11-6. Schema detectorului pentru valoarea de vîrf.

Instrumentul de măsurare al voltmetrului electronic poate fi etalonat pentru valoarea de vîrf sau pentru valoarea efectivă a tensiunii periodice. Avînd în vedere că în regim sinusoidal, raportul dintre valoarea efectivă și amplitudine este 0,707, cu voltmetrul electronic se poate măsura în acest regim atît amplitudinea, cît și valoarea efectivă, oricum ar fi etalonată scala aparatului. În schimb,

în regim nesinusoidal, raportul dintre cele două valori se modifică şi, dacă instrumentul este etalonat pentru valoarea de vîrf, nu poate măsura valoarea efectivă şi invers, dacă este etalonat pentru valoarea efectivă, nu poate măsura valoarea de vîrf.

Trebuie subliniat că pentru măsurarea cu ajutorul voltmetrului electronic a valorii efective pentru orice formă de variaţie periodică în timp a tensiunii, este necesar un detector de valoare efectivă, adică un dispozitiv prin intermediul căruia să se aplice la intrarea în voltmetrul electronic o tensiune proporţională cu valoarea efectivă. Un astfel de detector poate fi, spre exemplu, un termocuplu.

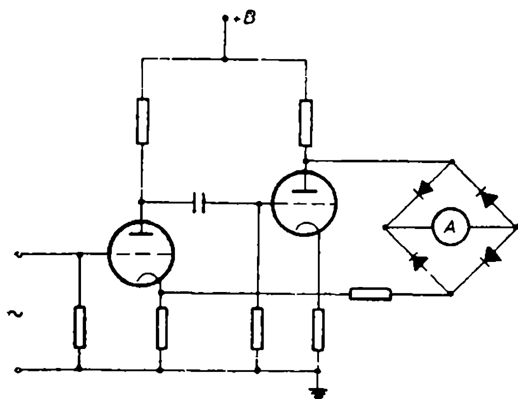


Fig. 11-7. Schema voltmetrului electronic cu două triode şi reacţie negativă.

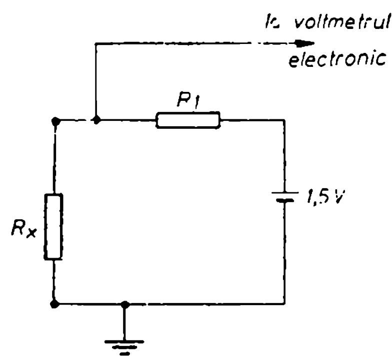


Fig. 11-8. Potenţiometrul de adaptare.

În fig. 11-7 este reprezentată schema unui voltmetru de c.a., cu tuburi electronice, cu reacţie negativă. Această construcţie asigură sensibilitate mai mare şi stabilitate mai bună pentru instrumentul de măsurare.

Măsurarea rezistenţelor cu voltmetrul cu tuburi electronice poate fi realizată dacă la intrarea sa se adaptează un dispozitiv potenţiometric avînd schema reprezentată în fig. 11-8. Se observă că $U_1=0$ cînd $R_x=0$ şi $U_1=1{,}5$ V cînd $R_x=\infty$. Voltmetrul electronic are, în mod obişnuit, scală distinctă pentru măsurarea rezistenţelor.

Aplicaţia 11-1. Să se reevalueze treptele de rezistenţă ale divizorului de tensiune din fig. 11-5, astfel încît să se poată măsura tensiuni pînă la 300 V, cu următoarele trepte : 1 V, 15 V, 60 V, 150 V, 300 V. Rezistenţa totală de intrare creşte la $R=30$ MΩ.

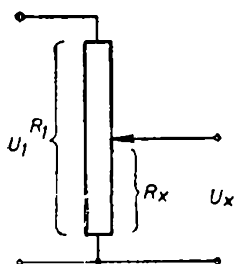


Fig. 11-9. Schemă explicativă pentru divizarea tensiunii de intrare.

Rezolvare. Pe baza schemei din fig. 11-9 rezultă :

$$\frac{U_x}{U_1}=\frac{R_x}{R_1}.$$

Aplicînd această relaţie pentru datele din enunţ şi avînd în vedere că pentru fiecare treaptă $U_x=1$ V, rezultă :

$$U_1=1\ \text{V},\quad \frac{1}{1}=\frac{R_x}{30},\quad R_x=30\ \text{M}\Omega\ ;$$

$$U_1=15\ \text{V},\quad \frac{1}{15}=\frac{R_x}{30},\quad R_x=2\ \text{M}\Omega\ ;$$

$U_1=60$ V, $\frac{1}{60}=\frac{R_x}{30}$, $R_x=0,5$ MΩ ;

$U_1=150$ V, $\frac{1}{150}=\frac{R_x}{30}$, $R_x=0,2$ MΩ ;

$U_1=300$ V, $\frac{1}{300}=\frac{R_x}{30}$, $R_x=0,1$ MΩ.

Se obţin astfel valorile treptelor de rezistenţă înscrise pe schiţa din fig. 11-10.

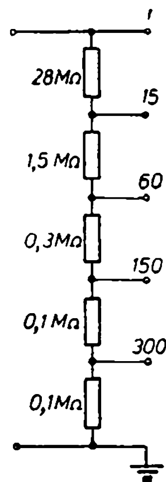


Fig. 11-10. Treptele rezistenţei de intrare.

11.2.2. VOLTMETRE CU TRANZISTOARE

Dispozitivele semiconductoare (diode, tranzistoare) sînt folosite tot mai mult în ultimul timp în construcţia instrumentelor electrice de măsurare. În comparaţie cu instrumentele cu tuburi electronice, instrumentele cu dispozitive semiconductoare prezintă următoarele avantaje :

— în timpul funcţionării, căldura dezvoltată în interiorul lor este redusă, deci cu efecte neglijabile ;

— sînt mai compacte şi mai uşoare ;

— pot fi alimentate de la o baterie, deci sînt independente de reţea.

Voltmetrele cu tranzistoare funcţionează pe aceleaşi principii ca şi voltmetrele cu tuburi electronice. În fig. 11-11 este reprezentată schema electrică a unui voltmetru de c.c. cu două tranzistoare în punte (analoagă cu schema voltmetrului cu două triode din fig. 11-5, *a*). Cele patru braţe ale punţii sînt formate din rezistenţele R_1, R_2 şi tranzistoarele T_1, T_2. Tranzistorul T_1 fiind comandat prin curentul de bază, nu este necesar un divizor potenţiometric pentru tensiunea de intrare.

Dacă un potenţial pozitiv (faţă de masă) se aplică la baza tranzistorului T_1, creşte curentul de bază şi, în măsură mai mare creşte curentul de colec-

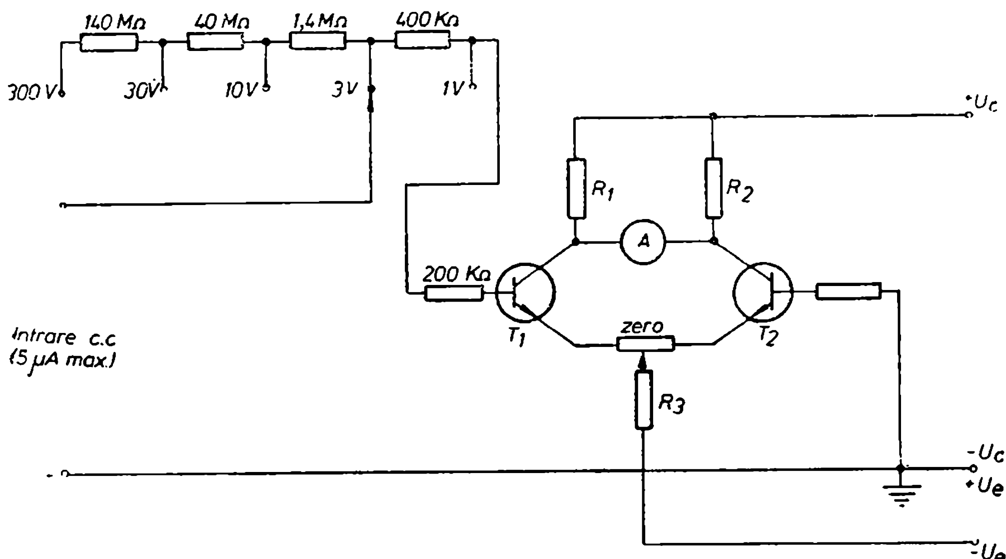


Fig. 11-11. Schema voltmetrului de c.c. cu tranzistoare.

tor ce străbate rezistențele R_1 și R_3. În același timp, scade curentul de colector al tranzistorului T_2 datorită creșterii potențialului la emitor provocat de căderea de tensiune pe rezistența R_3. Ca urmare, puntea se dezechilibrează și ampermetrul A, legat în diagonala punții, indică acest dezechilibru, proporțional cu tensiunea de la intrare.

Rezistența de intrare (sensibilitatea) voltmetrului este de circa 200 kΩ/V, iar precizia, de aproximativ $\pm 1\%$.

11.3. FRECVENȚMETRE ELECTRONICE

Principiul de funcționare al frecvențmetrelor electronice cu citire directă a frecvenței constă în obținerea prin instrumentul de măsurare (ampermetru) a unui curent de valoare proporțională cu frecvența tensiunii aplicate, independent de amplitudinea acesteia.

În fig. 11-12 este reprezentată schema de principiu a unui frecvențmetru cu două triode T_1 și T_2, conectate în montaj în contratimp. La bornele bobi-

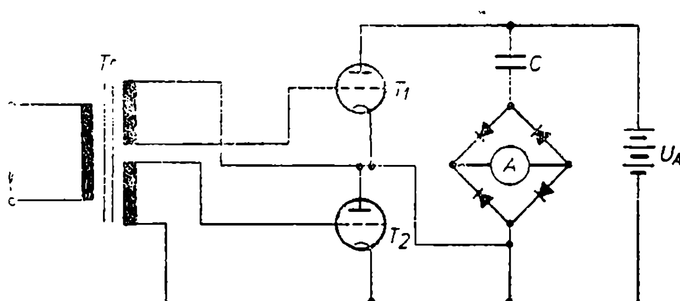


Fig. 11-12. Schema de principiu a frecvențmetrului cu două triode în contratimp.

nei primare ale transformatorului Tr se aplică tensiunea $u_1 = U_{1m} \sin \omega_1 t$ a cărei frecvență $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$ se măsoară. Datorită amplitudinii mari a tensiunii obținute la cele două bobine secundare și aplicate la grilele de comandă, tuburile T_1 și T_2 sînt aduse pe rînd în stare de conducție, respectiv de blocare.

În alternanța cînd tubul T_2 conduce, tubul T_1 fiind blocat, condensatorul C se încarcă rapid cu sarcina electrică $Q = CU_A$, unde U_A este tensiunea sursei de c.c. din circuitul anodic. În alternanța următoare tubul T_2 se blochează, iar T_1 va conduce, permițînd condensatorului să se descarce rapid. Atît încărcarea condensatorului, cît și descărcarea au loc prin instrumentul de măsurare A, de tip magnetoelectric, montat în diagonala unei punți de redresare. Valoarea medie a curentului, măsurată de ampermetrul A, calculată în raport cu perioada $T_1 = 1/f_1$, este:

$$I_{med} = \frac{2Q}{T_1} = 2\,CU_A f_1 = kf_1,$$

adică indicația instrumentului de măsurare este proporțională cu frecvența f_1, constanta de proporționalitate fiind $k = 2\,CU_A$. Deci, scala instrumentului de măsurare poate fi etalonată în valori ale frecvenței.

11.4. FAZMETRE ELECTRONICE

Principiul de funcţionare al unui fazmetru electronic se bazează pe ideea că, prin însumarea (sau scăderea) a două tensiuni sinusoidale de aceeaşi frecvenţă şi aceeaşi amplitudine, dar defazate între ele, se obţine o tensiune ce depinde de defazaj, adică

$$u_1 = U_m \sin \omega t, \quad u_2 = U_m \sin(\omega t + \varphi),$$

$$u = u_1 + u_2 = U_m\, 2 \sin\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right) \cos\frac{\varphi}{2}\,.$$

Schema bloc a unui fazmetru cu citire directă este reprezentată în fig. 11-13. Cele două tensiuni, u_1 şi u_2, a căror defazaj se măsoară sînt aplicate la intrarea a două amplificatoare limitatoare, la ieşirea cărora se obţin semnale (tensiuni) dreptunghiulare, A şi B, de amplitudini egale, dar cu conservarea defazajului de la intrare.

Tuburile T_1 şi T_2 realizează însumarea semnalelor A şi B aplicate la grilele lor de comandă. În partea de jos a fig. 11-13 se vede că suma $A+B$ depinde

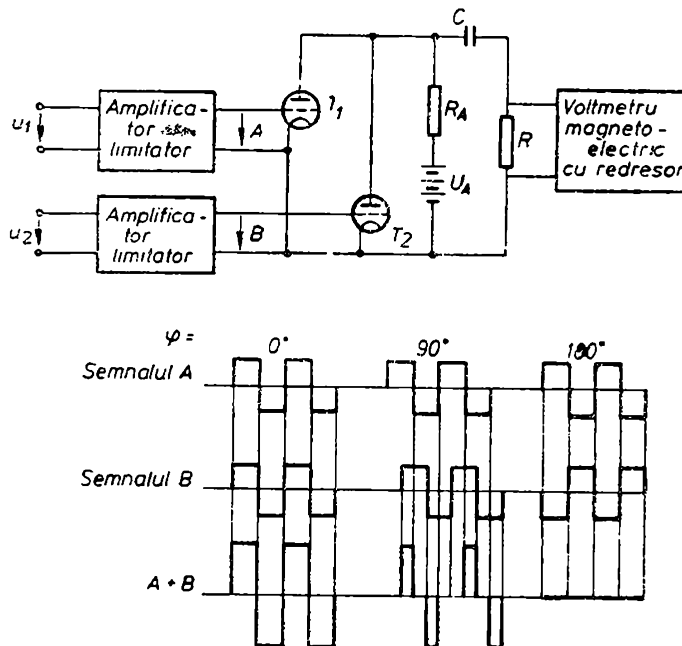


Fig. 11-13. Schema de principiu a fazmetrului electronic.

de defazajul φ, care, la o altă scară, reprezintă căderea de tensiune pe rezistenţa de sarcină R. Voltmetrul de tip magnetoelectric, prevăzut cu schemă de redresare în punte şi legat la bornele rezistenţei R, va măsura valoarea medie a semnalului $A+B$. Deci, indicaţia sa depinde numai de defazajul φ şi, ca urmare, scala poate fi gradată în valori ale acestui defazaj.

11.5. TAHOMETRE ELECTRONICE

Tahometrul este aparatul folosit pentru măsurarea turației. Această măsurare intervine foarte frecvent în tehnică, la mașini electrice, motoare cu ardere internă și, în general, în toate cazurile cînd există în construcția unei mașini piese în mișcare de rotație.

Există diverse tipuri de tahometre, fixe sau portative. Spre exemplu, una dintre metodele de măsurare a turației constă în folosirea unui generator tahometric (de c.c. sau de c.a.), cuplat pe arborele a cărui turație se măsoară, și prevăzut cu un voltmetru care măsoară tensiunea sa. Întrucît tensiunea dată de generator depinde liniar de turație, scala voltmetrului se etalonează în valori ale turației [rot/min].

În ultimul timp, se folosesc tot mai mult tahometrele electronice. În principiu, pentru măsurarea turației este necesar să existe un traductor cu rolul de a transforma viteza unghiulară într-un semnal electric, a cărui amplitudine sau frecvență este proporțională cu această viteză. Schema bloc a unui tahometru electronic, este reprezentată în fig. 11-14. Traductorul *T*, de tip fotoelectric sau magnetic, furnizează un semnal sub formă de impulsuri, cu frecvența de repetiție proporțională cu turația. Pentru ca forma acestor impulsuri să nu afecteze măsurarea, schema este prevăzută și cu un formator de impulsuri, CF, la ieșirea căruia se obțin impulsuri dreptunghiulare, cu durată constantă și cu frecvență, de asemenea, proporțională cu turația. Urmează în schemă frecvențmetrul *F*, care măsoară frecvența impulsurilor, deci turația. Pentru precizii mai mari, se pot folosi frecvențmetre numerice.

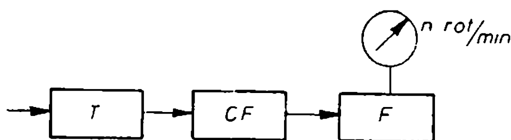


Fig. 11-14. Schema bloc a tahometrului electronic.

Se precizează că *traductorul de turație fotoelectric* constă dintr-o celulă fotoelectrică, sensibilizată de o rază de lumină, provenită de la o sursă luminoasă și reflectată de o mică oglindă fixată pe piesa rotitoare. Deci, la fiecare rotație, celula fotoelectrică generează un impuls de curent. La *traductorul de turație magnetic*, impulsul de curent apare într-o bobină prin fața căreia trece o piesă feromagnetică fixată pe arborele în rotație (sau un gol practicat în arbore), provocînd modificarea reluctanței circuitului magnetic al bobinei.

O altă categorie de tahometre o constituie *strobotahometrele electronice*. Pe piesa în rotație se află un reper asupra căruia se trimite o rază de lumină intermitentă, provenită de la o lampă specială cu descărcări în gaze, comandată electronic. Cînd între frecvența de rotație și cea a impulsurilor luminoase există egalitate sau un raport întreg, reperul apare imobil. Cunoscînd frecvența impulsurilor luminoase, se poate determina numărul de rotații din unitatea de timp.

11.6. INSTRUMENTE ÎNREGISTRATOARE

Instrumentele electrice înregistratoare au rolul de a măsura și de a imprima (înregistra) valorile mărimilor electrice, magnetice etc. Înregistrarea valorilor mărimilor măsurate poate fi făcută analogic, prin trasarea, la o anumită scară, a curbei de variație, sau numeric (cifric).

11.6.1. AMPERMETRE, VOLTMETRE, WATTMETRE ÎNREGISTRATOARE

În fig. 11-15 este schițat principiul de funcționare al unui instrument înregistrator clasic, care poate fi : ampermetru, voltmetru, wattmetru etc. O bandă de hîrtie gradată este menținută în mișcare de translație de către un mecanism de ceasornic sau de altă natură. Acul indicator este prevăzut cu o peniță realizată dintr-un tub capilar, unul din capetele tubului fiind în contact cu hîrtia, iar celălalt fiind introdus într-un rezervor cu cerneală.

Din cauza inerției relativ mari a mecanismului de înscriere, instrumentele înregistratoare sînt folosite pentru urmărirea mărimilor care au o variație relativ lentă în timp. De exemplu, astfel de instrumente sînt folosite în stații și centrale electrice pentru urmărirea variației valorilor efective ale curentului și tensiunii, a puterii etc. Pentru urmărirea mărimilor cu variație rapidă în timp se folosesc instrumente înregistratoare cu inerție mai mică cum sînt, de exemplu, oscilografele.

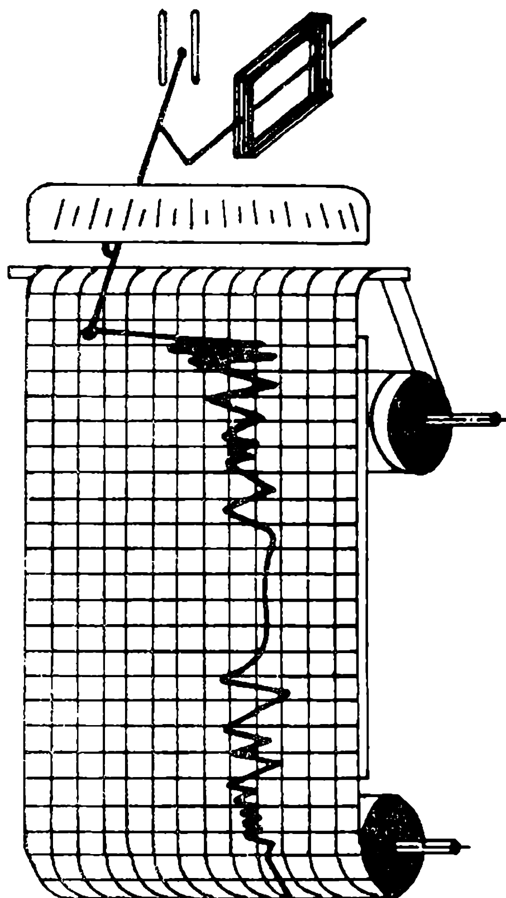


Fig. 11-15. Schema de principiu a instrumentului înregistrator (clasic).

11.6.2. OSCILOGRAFUL ELECTROMECANIC

Schița funcțională a unui oscilograf electromecanic este reprezentată în fig. 11-16. Elementul de măsurare al acestui tip de aparat este constituit dintr-un galvanometru vibrator (buclă) *B*, care constă dintr-un magnet permanent între polii căruia se găsește o oglindă susținută de o buclă conductoare (galvanometru). Cînd prin buclă trece curent, acesta, împreună cu oglinda se rotește mai mult sau mai puțin, într-un sens sau în altul, în funcție de valoarea și sensul curentului.

O rază de lumină care provine de la un bec *S*, este reflectată de oglindă și dirijată, parțial, spre o lentilă prismatică L_p și, parțial, spre o lentilă cilindrică L_c.

De la lentila prismatică L_p, raza de lumină ajunge pe suprafața oglindată a unei prisme hexagonale rotitoare, ale cărei fețe reflectă spotul luminos spre ecranul semitransparent *E*, destinat pentru urmărirea vizuală.

Raza de lumină care ajunge la lentila cilindrică L_c este concentrată și proiectată pe suprafața hîrtiei fotosensibile *H*, menținută în mișcare de trans-

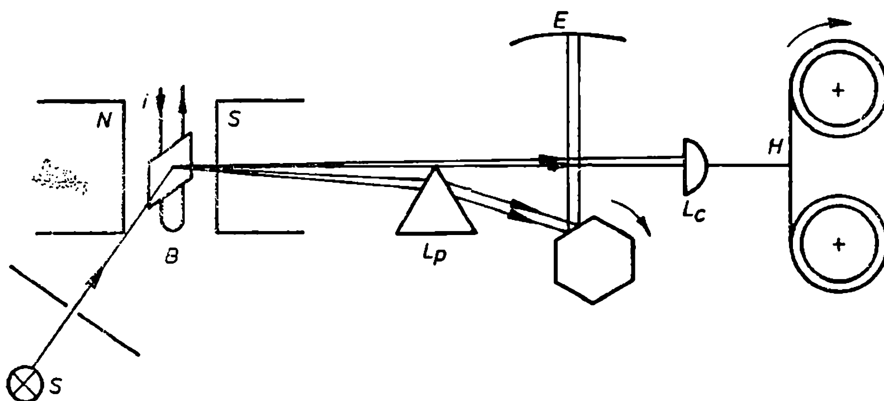


Fig. 11-16. Principiul de funcționare a oscilografului electromecanic.

lație de către un mecanism cu doi tamburi, unul pe care hîrtia se înfășoară și altul de pe care se desfășoară.

Dacă curentul din bucla *B* obține valori proporționale cu mărimea variabilă în timp de studiat, oglinda buclei se va mișca, iar pe ecran se va observa, respectiv pe hîrtia sensibilă se va înregistra curba de variație în timp a mărimii studiate.

Cu oscilograful electromecanic se pot urmări atît mărimi cu variație periodică, cît și cele cu variație aperiodică în timp. Există oscilografe electromecanice cu 3...24 bucle, cu ajutorul cărora se pot urmări simultan tot atîtea mărimi.

Oscilograful electromecanic se mai numește și *cu inerție*, deoarece mișcarea sistemului mobil al galvanometrului este însoțită de inerție, din care cauză frecvența de variație a mărimilor studiate este limitată. Pentru amortizarea mișcărilor galvanometrului, aceasta este situată într-un mediu de ulei.

În tehnica măsurărilor moderne, oscilografele au devenit aparate deosebit de utile. La oscilografele moderne, developarea hîrtiei pe care s-a făcut înregistrarea se realizează la lumina zilei (sau la lumină artificială).

11.6.3. ÎNREGISTRATORUL ÎN COORDONATE X—Y

Înregistratorul X—Y este un aparat modern cu ajutorul căruia se înregistrează dependența dintre două mărimi : $y(x)$. În fig. 11-17 este reprezentată schema unui astfel de instrument, care constă dintr-un mecanism de înscriere a cărui mișcări în direcțiile *X*, *Y* sînt efectuate prin cîte un servomotor. Deplasarea pe direcția axei *X* se face proporțional cu mărimea x, iar deplasarea pe direcția axei *Y* se face proporțional cu mărimea y. Rezultă astfel curba $y(x)$.

Dacă hîrtiei pe care se realizează înregistrarea i se imprimă o viteză de deplasare constantă în direcția *X*, se obține curba de variație în funcție de timp a unei mărimi, $y=f(t)$.

Sensibilitatea maximă a înregistratorului *X—Y* este de cca 2,5 cm/mV. Dispozitivul denumit Chopper are rolul de a transforma semnalul (tensiunea) continuu în impulsuri de o anumită frecvență (ex. 50 Hz).

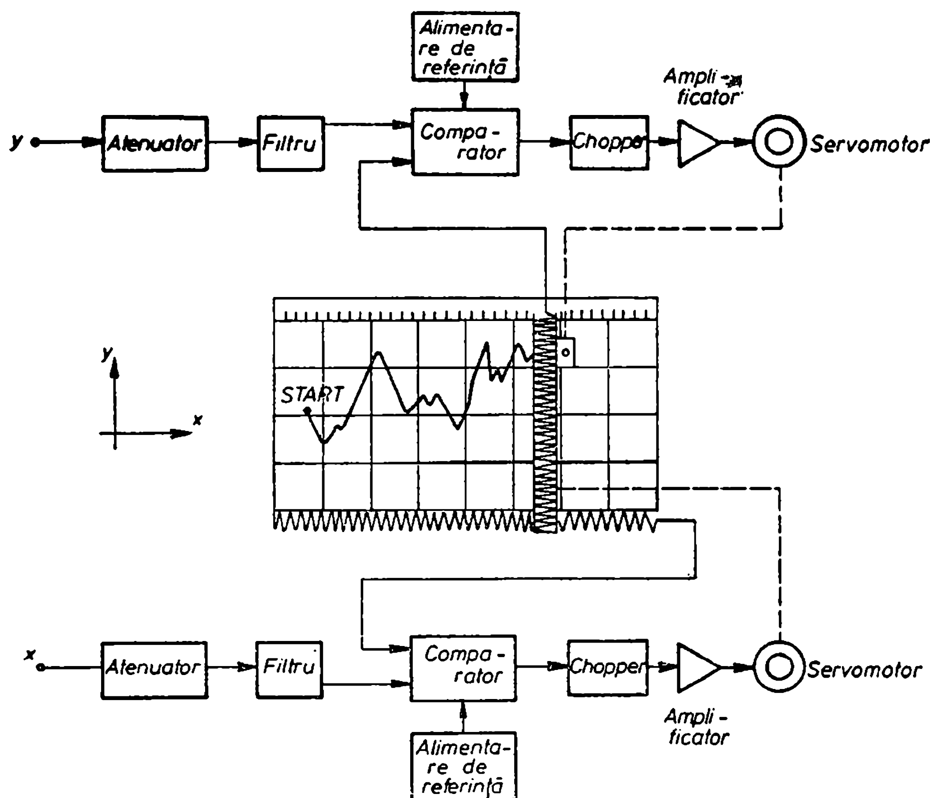


Fig. 11-17. Schema bloc a înregistratorului X—Y.

Înregistratoarele $X-Y$ se folosesc pentru urmărirea dependenței dintre două mărimi cu variație lentă în timp. Pentru frecvențe ridicate, inerția relativ mare a sistemului mobil de înregistrare conduce la trasarea unei înfășurători a curbei reale de variație.

11.7. SURSE DE ALIMENTARE STABILIZATE

Instrumentele de măsurare electronice, cît și alte numeroase aparate de cercetare, necesită surse de alimentare, de tensiune sau de curent, stabilizate. Sursele chimice sînt folosite în mică măsură în acest scop datorită modificării în timp a tensiunii și rezistenței lor interne. Se folosesc în prezent, pe scară largă, surse electronice stabilizate, cu semiconductoare, la care ne referim în cele ce urmează.

a. **Surse stabilizate de tensiune continuă.** O sursă stabilizată de tensiune continuă constă din două părți principale : redresorul și stabilizatorul. Redresorul este realizat, obișnuit, cu diode semiconductoare, cu schema de montaj în punte, plasate în circuitul secundar al transformatorului de alimentare de la rețea. Stabilizatorul are rolul de a menține constantă tensiunea continuă de ieșire, atunci cînd tensiunea de alimentare (de la rețea) se modifică între anumite limite sau cînd se schimbă curentul de sarcină (la ieșire).

În general, un stabilizator este format din două elemente principale: detectorul D, care are rolul de a sesiza variațiile tensiunii de la ieșire față de valoarea impusă, și corectorul C, acționat de detector în sensul anulării abaterii tensiunii de ieșire. După felul cum sînt dispuse aceste două elemente, se disting: stabilizatoare de tip serie (fig. 11-18, *a*) și stabilizatoare de tip derivație (fig. 11-18, *b*).

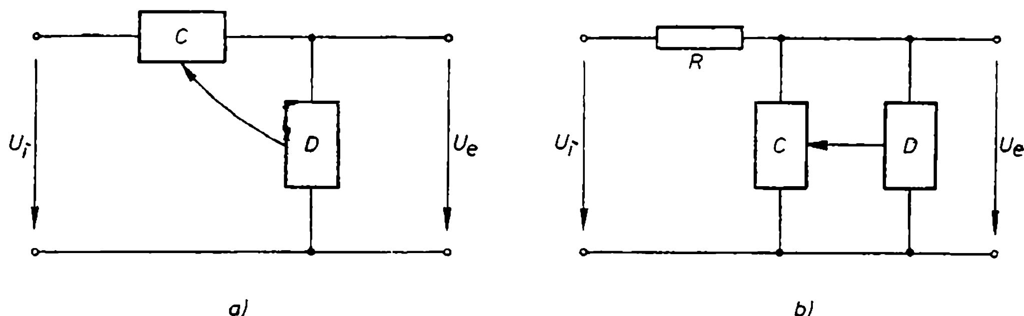


Fig. 11-18. Scheme-bloc ale stabilizatoarelor :
a — de tip serie; *b* — de tip derivație.

La stabilizatoarele de tip serie, elementul de corecție este în serie cu sarcina și acționează ca o rezistență variabilă care preia variațiile de tensiune de la ieșire. Dacă elementul detector este prevăzut cu o amplificare, este posibil ca elementul de corecție să compenseze cele mai mici variații ale tensiunii de ieșire.

La stabilizatoarele de tip derivație, elementul de corecție este în paralel cu sarcina. Atunci cînd curentul de sarcină are tendința de a se schimba datorită modificării tensiunii de ieșire, se schimbă și curentul prin corector, astfel încît curentul prin rezistența R să se păstreze constant, menținînd astfel tensiunea la ieșire la valoarea inițială. Dacă se modifică tensiunea la intrare, curentul prin elementul corector se schimbă în așa fel încît tensiunea la ieșire este menținută constantă.

Performanțele unui stabilizator de tensiune continuă se apreciază prin rezistența de ieșire R_e și coeficientul de stabilizare K_u, definiți prin relațiile :

$$R_e=\left(\frac{\Delta U_e}{\Delta I_e}\right)_{U_i=\text{const.}}, \quad K_u=\left(\frac{\Delta U_i/U_i}{\Delta U_e/U_e}\right)_{R_s=\text{const.}},$$

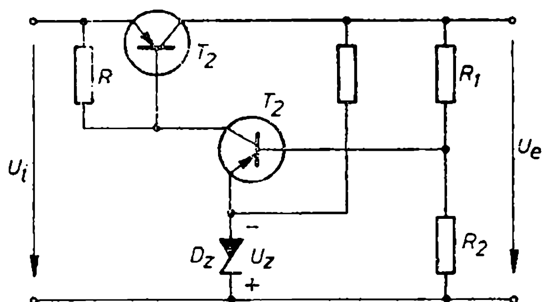


Fig. 11-19. Schema de principiu a unui stabilizator de tip serie.

unde R_s este rezistența de sarcină.

Tensiunea de referință este obținută cu un tub de gaz, cu descărcare luminiscentă, sau — în cazul semiconductoarelor — cu o diodă Zener.

În fig. 11-19 este reprezentată schema electrică de principiu a unui element stabilizator de tip serie, prevăzut cu două tranzistoare, T_1 și T_2, și o diodă Zener, D_z. Variația nedorită de tensiune la ieșire se

transmite în raportul $\frac{R_2}{R_1+R_2}$ la intrarea tranzistorului amplificator T_1. Tensiunea de referință U_z este dată de dioda Zener. Variația de tensiune de la ieșire este deci amplificată și apare sub forma unei variații a curentului la colectorul tubului T_1, care, trecînd prin rezistența de sarcină R produce tensiunea de comandă a tranzistorului de reglaj T_2, ce îndeplinește rolul unei rezistențe variabile.

b. **Surse stabilizate de curent continuu.** La acest tip de stabilizator, curentul la ieșire (de sarcină) se menține constant atunci cînd se modifică, în anumite limite, tensiunea de alimentare de la rețea, sau variază rezistența de sarcină. Performanțele unui astfel de stabilizator se apreciază prin admitanța de ieșire G_e și coeficientul de stabilizare K_i, definiți prin relațiile:

$$G_e=\left|\frac{I_e}{U_e}\right|_{U_i=\text{const.}},\qquad K_i=\left|\frac{\Delta U_i/U_i}{\Delta I_e/I_e}\right|_{R_s=\text{const.}},$$

unde R_s este rezistența de sarcină.

Cel mai simplu stabilizator de curent este *baretorul*, a cărui caracteristică tensiune-curent este reprezentată în fig. 11-20, care se observă că poate stabiliza numai o valoare fixă, I_0, a curentului.

Schema de principiu a unui stabilizator de c.c. prevăzută cu două tranzistoare, T_i și T_2, și o diodă Zener, D_z, este reprezentată în fig. 11-21. Deosebirea între această schemă și cea a stabilizatorului de tensiune continuă din fig. 11-19 constă în aceea că, curentul de sarcină I trece printr-un rezistor etalon R_{et} și tranzistorul T_1 amplifică și transmite variațiile căderii de tensiune pe acest element.

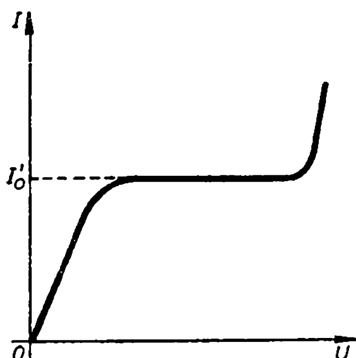


Fig. 11-20. Caracteristica tensiune-curent a baretorului.

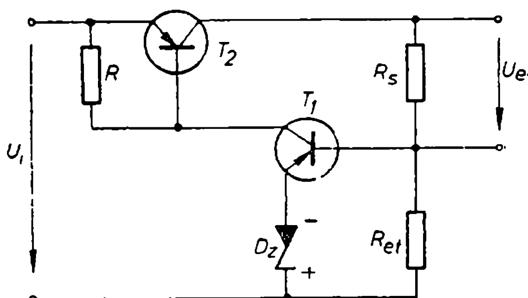


Fig. 11-21. Schema de principiu a unui stabilizator de c.c. cu tranzistoare.

Ca exemplu de sursă stabilizată de tensiune continuă și cu limitare de curent este cea de fabricație indigenă, tip I-4103, tranzistorizată, destinată alimentării aparatelor de laborator, avînd următoarele date caracteristice:

— tensiunea de alimentare: 220 V (—15% ... +10%),
— frecvența rețelei: (50 ... 60) Hz,
— temperatura mediului: (+5 ... +40) °C,
— tensiunea stabilizată la ieșire: 0 ... 7,5 V,
— limitarea curentului de sarcină: (0,05 ... 2) A,

— rezistența de ieșire : $R_e \leqslant 1\ \Omega$,

— coeficientul de stabilizare : $K_u \geqslant 5\,000$.

Sursa este prevăzută și cu protecție la supratensiune, între limitele (3 . . . 8) V.

c. **Surse stabilizate de tensiune alternativă.** Unele instrumente sau dispozitive electronice necesită o tensiune alternativă de alimentare constantă, independentă de fluctuațiile tensiunii de la rețea, sau de variațiile curentului de sarcină. În acest caz se folosesc sursele stabilizate de tensiune alternativă care pot fi de diferite tipuri : cu diodă Zener, cu amplificatoare magnetice, cu circuit ferorezonant etc.

11.8. DETERMINAREA CARACTERISTICILOR ȘI MĂSURAREA PARAMETRILOR TRANZISTOARELOR

Performanțele dispozitivelor și aparatelor cu tranzistoare depind în mare măsură de caracteristicile și parametrii acestora. Aceasta impune cunoașterea, sau găsirea prin măsurare, a caracteristicilor și parametrilor tranzistoarelor, care sînt dependente atît de frecvență cît și de temperatură.

Tranzistorul poate fi privit ca un circuit cuadripolar, cu două borne de intrare și două borne de ieșire. În fig. 11-22 este reprezentată schema cuadripolară a tranzistorului de tip *pnp* cu bază comună. Este cunoscut că un tranzistor are mai multe familii de caracteristici, fiecare familie reprezentînd dependența între două mărimi (de la intrare și de la ieșire), avînd pe a treia ca parametru.

Determinarea caracteristicilor tranzistoarelor se realizează folosind metode și mijloace (aparate) adecvate acestui scop, precizîndu-se în fiecare caz și regimul de funcționare al tranzistorului testat. Caracteristicile statice (în curent continuu) ale unui tranzistor se ridică prin *metoda punct cu punct*, care nu necesită aparatură complicată dar nu este suficient de expeditivă. În schimb, prin *metode de baleiaj*, folosind osciloscopul sau un aparat de înregistrare, se pot determina mult mai expeditiv aceste caracteristici. Frecvența de baleiaj trebuie să fie inferioară celei la care apar efecte reactive ce nu mai pot fi neglijate.

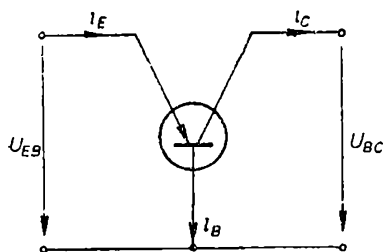


Fig. 11-22. Schema cuadripolară a tranzistorului de tip *pnp* cu bază comună.

Funcționarea tranzistoarelor la semnale mari și în regim de comutație necesită cunoașterea caracteristicilor statice în zone în care disipația admisibilă este mult depășită. *Metodele de impulsuri* permit determinarea caracteristicilor statice și în aceste zone prin aplicarea la bornele de acces ale tranzistorului a unor impulsuri de tensiune sau de curent de amplitudine mare și de durată foarte mică, astfel ca tranzistorul să nu fie deteriorat. Spre exemplu, determinarea caracteristicilor statice de ieșire prin metoda impulsurilor se face injectînd impulsuri de curent în circuitul emitorului și măsurînd amplitudinea impulsurilor de curent în circuitul colectorului, pentru diferite valori ale tensiunii continue la colector.

Referitor la măsurarea parametrilor unui tranzistor, sînt necesare unele precizări.

1. Din caracteristicile statice se determină *valorile parametrilor statici* :
— rezistenţa emitor-bază (de intrare) :

$$R_i = \left(\frac{\mathrm{d}u_{EB}}{\mathrm{d}i_E}\right)_{u_{CB}=\text{const.}};$$

— rezistenţa bază-colector (de ieşire) :

$$R_e = \left(\frac{\mathrm{d}u_{BC}}{\mathrm{d}i_C}\right)_{i_E=\text{const.}};$$

— factorul de amplificare al curentului :

$$= \left(\frac{\mathrm{d}i_C}{\mathrm{d}i_E}\right)_{u_{CB}=\text{const.}};$$

— factorul de amplificare a tensiunii :

$$= \left(\frac{\mathrm{d}u_{BC}}{\mathrm{d}u_{EB}}\right)_{i_E=\text{const.}}$$

Caracteristicile statice fiind neliniare, valorile acestor parametri depind de poziţia pe caracteristică a punctului de funcţionare.

2. *Parametrii dinamici* se determină considerînd funcţionarea tranzistorului cu semnale periodice de amplitudine mică astfel încît circuitul cuadripolar să poată fi considerat liniar. În acest regim, se folosesc parametrii hibrizi de tip h, ce intervin în ecuaţiile cuadripolului de forma :

$$u_1 = h_{11}i_1 + h_{12}u_2$$

$$i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}u_2,$$

unde s-a considerat $u_1 = u_{EB}$, $u_2 = -u_{BC}$, $i_1 = i_E$ şi $i_2 = i_C$. Se observă că :

$$h_{11} = \left(\frac{u_1}{i_1}\right)_{u_2=0}, \qquad h_{12} = \left(\frac{u_1}{u_2}\right)_{i_1=0},$$

$$h_{21} = \left(\frac{i_2}{i_1}\right)_{u_2=0}, \qquad h_{22} = \left(\frac{i_2}{u_2}\right)_{i_1=0}.$$

Aceste două precizări, respectiv relaţiile de definiţie a parametrilor statici şi dinamici evidenţiază şi procedeul folosit pentru măsurarea lor. Spre exemplu, $u_2=0$ înseamnă încercarea tranzistorului cu ieşirea în scurtcircuit, iar $i_2=0$ înseamnă ieşirea în gol.

Aparatura folosită pentru încercarea tranzistoarelor trebuie să satisfacă cerinţa de a fi de precizie şi cu un consum propriu minim posibil. Astfel, pentru măsurarea tensiunilor între electrozi se foloseşte voltmetrul electronic, iar pentru măsurarea rezistenţelor (impedanţelor) de intrare sau de ieşire se folosesc punţi electronice.

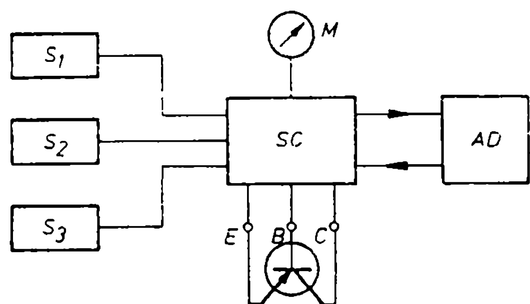


Fig. 11-23. Schema-bloc a tranzistormetrului.

Tranzistormetrul este aparatul destinat încercării tranzistoarelor. Ne referim la tranzistormetrul portabil de fabricație indigenă, tip E-0702, care este destinat verificării atît a tranzistoarelor *pnp* și *npn* de mică putere, cît și a diodelor de mică putere, inclusiv diode Zener. În fig. 11-23 este reprezentată schema bloc a aparatului, compusă din:

S_1 — sursa de tensiune continuă stabilizată;
S_2 — sursa de curent reglabilă;
S_3 — sursă de semnal alternativ;
AD — amplificator-detector;
SC — sistem de comutare;
M — instrument de măsurare magnetoelectric.

Sursa S_1 este de tipul serie prezentat la paragraful 11-7, asigurînd tensiuni continue între (0...20) V.

Sursa cu tranzistoare S_2 asigură injectarea unui curent în baza tranzistorului de măsurat în limitele (0... 30) mA.

Sursa S_3 asigură curentul alternativ necesar măsurării factorului de amplificare de curent în regim dinamic.

Amplificatorul detector *AD* are rolul de a transforma curentul alternativ de la transformatorul de ieșire al sursei S_3 într-un semnal proporțional cu factorul de amplificare de curent al tranzistorului de măsurat.

Sistemul de comutare *SC* asigură conectarea instrumentului de măsurare în diferite puncte ale schemei fie ca voltmetru, fie ca miliampermetru.

Tensiunea de alimentare a tranzistormetrului portabil descris este 220 V$\pm$ 10%, iar domeniul de temperatură $+10\ °C...+35\ °C$.

11.9. UNELE CONSIDERAȚII ASUPRA MĂSURĂRILOR LA CIRCUITELE INTEGRATE

În ultimul deceniu a început să se dezvolte vertiginos *tehnica circuitelor integrate* și alte domenii ale microelectronicii, ramură principial nouă a electronicii moderne. Evident, măsurările folosite în tehnica microelectronică sînt cu totul specifice, în acest scop folosirea aparaturii clasice (voltmetre electronice, ampermetre etc.) fiind total nepotrivită. Este dificil de măsurat cu un ohmmetru (sau ceva similar) valoarea unor rezistențe (impedanțe) create în interiorul unui microcristal în interconexiune strînsă cu alte elemente ale microcristalului.

Circuitele integrate reprezintă blocuri distincte ale unor scheme electronice complexe sau chiar unele circuite electronice de sine stătătoare, de exemplu, bistabili, circuite logice, amplificatoare (cu 2—3 etaje) etc. În acest caz măsurări asupra circuitului se fac aplicînd la intrarea sa un semnal și analizînd răspunsul întregului bloc integrat. Dealtfel, astfel se și face încercarea

și sortarea diferitelor circuite integrate, a sistemelor microelectronice în general. În acest scop au fost create instalații speciale de măsurare pentru încercarea și sortarea circuitelor (blocurilor) microelectronice. Cel mai adesea aceste măsurări se fac cu ajutorul unor instalații cuplate cu calculatoare electronice, înzestrate cu aparatură digitală modernă.

Pentru cercetarea mai detaliată a unui modul sau circuit integrat se utilizează în mod curent sonde cu fascicul electronic. În aceste tehnici, accesul la detaliile electronice de ordinul micronilor (10—20 μm) se face prin fascicule electronice care constituie „conductoarele“ de legătură între schemă și aparatul de măsurare. De exemplu, cu ajutorul a două microfascicule electronice se poate măsura valoarea unei microrezistențe din interiorul unui circuit integrat bidimensional sau tridimensional.

Analiza prin microscopie electronică prin baleiaj, sau alte metode, este de asemenea folosită în tehnica microelectronică, atît pentru măsurare, cît mai ales pentru controlul producției. Metoda poate fi folosită în diferite etape ale producției microcircuitelor, sau pentru controlul suprafețelor. Uneori, asemenea microscoape care analizează probe (microscheme) după radiațiile X sau electronii secundari generați prin incidența fasciculului electronic inițial, se mai numesc și microsonde electronice.

Fotografierea cu raze X este de asemenea mult folosită în controlul unor microscheme, micromodule etc., în vederea descoperirii unor eventuale defecte interioare, mai ales dacă modulul a fost deja încapsulat într-o rășină epoxidică sau alte corpuri speciale.

Tehnica circuitelor integrate a condus la o revoluție în însăși domeniul măsurărilor (electronice) și mai ales telemăsurărilor, chiar la distanțe cosmice. Astfel, majoritatea aparatelor de măsurat digitale se construiesc actualmente pe bază de circuite integrate.

Elaborarea tehnicilor maser și laser au determinat și crearea metodelor de măsurare în domeniul frecvențelor foarte mari, specifice acestor tehnici noi. Chiar metode mai vechi de măsurare au fost reactualizate și completate cu aparatură de mare precizie, ceea ce duce la înglobarea acestor metode în domeniul măsurărilor de tehnică nouă.

Capitolul 12

MĂSURĂRI ŞI INSTRUMENTE NUMERICE

12.1. PRINCIPIUL DE FUNCŢIONARE AL INSTRUMENTELOR NUMERICE

Instrumentele de măsurare descrise la capitolele precedente pot fi încadrate în categoria instrumentelor *analogice*, întrucît indicaţia lor se poate modifica continuu pe întreg domeniul de măsurare. Pentru stabilirea valorii măsurate de aceste instrumente, este nevoie de intervenţia operatorului care citeşte diviziunile şi subdiviziunile indicate în lungul scalei gradate.

Există şi o altă categorie de instrumente de măsurare, denumite *numerice*, care furnizează direct, prin cifre, valoarea mărimii măsurate. Cu cît numărul de cifre afişate este mai mare, cu atît precizia măsurării este mai ridicată.

O măsurare numerică constă, în fond, în aproximaţia unei funcţii continue (mărimea de măsurat) printr-o mulţime discretă de valori. Dispozitivul care operează această transformare se numeşte convertor analog-numeric. De exemplu, dacă mărimea de măsurat A (*t*) prezintă în timp variaţia reprezentată în fig. 12-1, mulţimea continuă a valorilor acestei funcţii se înlocuieşte printr-o mulţime discontinuă, cu un număr limitat de valori discrete (0, 1, 2, 3, ...). Valoarea mărimii la momentul t_1 se înlocuieşte cu valorea discretă cea mai apropiată (3 sau 4). Evident că acest proces de aproximare introduce erori care sînt cu atît mai mici, cu cît intervalul dintre valorile discrete alese (cuantizarea) este mai mic.

Stările discrete de la ieşirea convertorului analog-numeric sînt transformate în numere cu ajutorul unui codificator, operaţie denumită codificare. La ieşirea din codificator se ataşează partea de măsurare propriu-zisă.

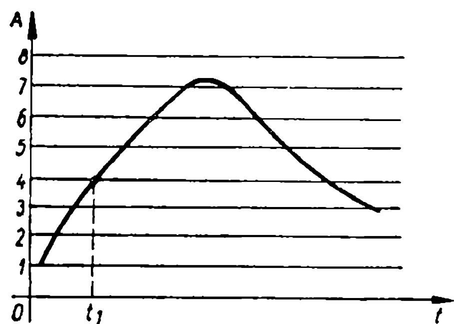


Fig. 12-1. Discretizarea în trepte a unei mărimi cu variaţie continuă în timp.

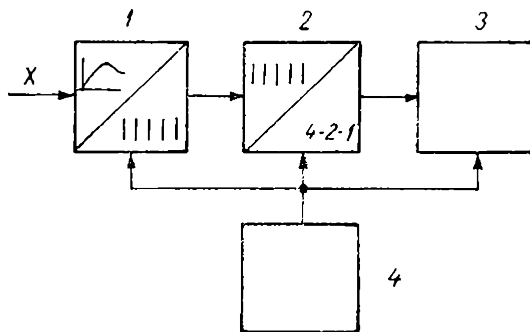


Fig. 12-2. Schema bloc a unui instrument numeric.

În fig. 12-2 este reprezentată schema bloc a unui instrument numeric. Mărimea analogică X este discretizată în convertorul analog-numeric *1*, a cărui informație este codificată de codificatorul *2* și apoi transmisă instalației de ieșire *3*. Întreaga funcționare a schemei este guvernată de dispozitivul de comandă *4*.

12.2. VOLTMETRUL NUMERIC

Voltmetrele numerice sînt de mai multe tipuri. În continuare se prezintă principiul de funcționare al voltmetrului numeric cu 4 cifre, tip VN 1-4/B, de fabricație indigenă.

Voltmetrul numeric VN 1 măsoară tensiuni cu o eroare de 0,2%, de la 100 μV pînă la 1 000 V c.c. Acest aparat funcționează pe principiul aproxi-

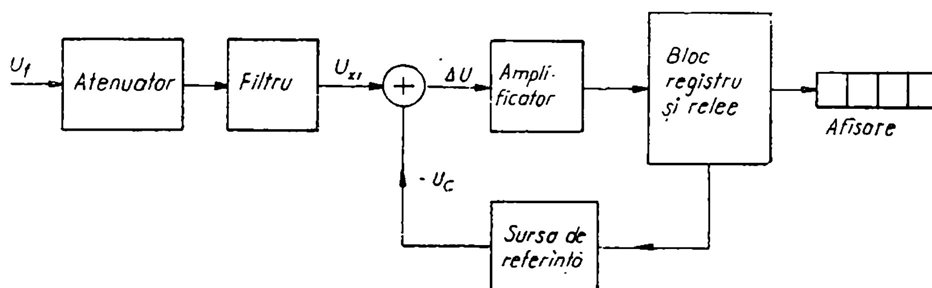


Fig. 12-3. Schema bloc a voltmetrului numeric cu 4 cifre.

mărilor succesive, pe baza comparației dintre tensiunea de măsurat U_x și o tensiune de referință (comparație) U_c. Schema de principiu a funcționării acestui tip de voltmetru este reprezentată în fig. 12-3.

Înainte de a fi comparată cu tensiunea de referință, tensiunea de măsurat U_x este divizată prin atenuatorul de intrare, format dintr-un sistem de rezistențe, și filtrată printr-un sistem de capacități de semnalele perturbatoare pe care le poate conține. Semnalul de intrare U_{xi} astfel obținut (prin filtru și atenuator) este însumat cu o tensiune de referință de polaritate opusă. Se obține semnalul abatere $\Delta U = U_{xi} - U_c$ care este trecut printr-un amplificator de c.c. Semnalul de ieșire din acest amplificator are forma unor impulsuri rectangulare cu amplitudinea și polaritatea corespunzătoare semnalului abatere.

Semnalul de la ieșirea din amplificator este prelucrat de blocul ce conține un registru de deplasare și relee care se stabilizează pentru starea corespunzătoare la $\Delta U=0$. În acest sens, mărimea de ieșire din acest bloc acționează asupra sursei de referință și modifică tensiunea de comparație U_c pînă cînd se ajunge la $U_{xi}=U_c$, adică $\Delta U=0$. Modificarea tensiunii de comparație atrage după sine schimbarea celor 4 cifre de la sistemul de afișaj, pînă în momentul cînd este atinsă starea stabilizată, cînd se poate citi valoarea tensiunii de măsurat U_x.

Din această scurtă prezentare a voltmetrului numeric de c.c. se reține faptul că măsurarea tensiunii se face *prin comparație* cu o tensiune de referință variabilă. Variația tensiunii de referință are loc în trepte egale, astfel că $U_c = n\Delta U_c$, unde ΔU_c este treapta elementară. Măsurarea începe de la $U_c=0$ și

se continuă pînă cînd $U_c = U_{xi}$. În acest moment, numărul de trepte necesare, n, este o măsură a tensiunii U_x.

Există și alte posibilități de comparație între tensiunea de măsurat și tensiunea de referință. De exemplu, tensiunea de referință poate fi liniar variabilă, cu o pantă dată. În acest caz, timpul pînă cînd se ajunge la îndeplinirea condiției de compensare este o măsură a tensiunii U_x.

Voltmetrele numerice pentru măsurarea tensiunilor alternative sînt prevăzute în plus cu un convertor c.a.-c.c. Deci, după convertire, urmează măsurarea tensiunii continue obținute, așa cum s-a explicat mai sus. În funcție de tipul convertorului utilizat se poate măsura valoarea medie sau valoarea efectivă a tensiunii alternative.

Rezoluția voltmetrelor numerice se exprimă prin cea mai mică valoare a tensiunii ce poate fi măsurată pentru fiecare domeniu de măsurare al instrumentului. Evident că rezoluția corespunde unității din rangul inferior al sistemului de indicație numerică. Schimbînd domeniul de măsurare al instrumentului (deplasînd virgula indicatorului) se modifică și rezoluția. De exemplu, la un voltmetru numeric cu 6 cifre și domeniul de măsurare de 1 V, rezoluția este 1 μV.

Eroarea voltmetrelor numerice este determinată, în principal, de cuantificarea realizată de convertorul analog-numeric.

12.3. MĂSURAREA NUMERICĂ A CURENTULUI ELECTRIC

Măsurarea numerică a curentului electric se poate efectua după procedura generală, prin înserierea în circuit a unei rezistențe cunoscute, de valoare convenabil aleasă, la bornele căreia se măsoară cu un voltmetru numeric căderea de tensiune, proporțională cu intensitatea curentului. Aceasta este metoda cea mai simplă și cea mai frecvent utilizată. Există însă și metode și instrumente (ampermetre) numerice specifice acestui scop, la care ne referim, sumar, în cele ce urmează.

Măsurarea numerică a curentului electric prin compararea unor sarcini electrice sub formă de impulsuri. Metoda se bazează pe egalitatea dintre sarcina transportată de curentul de măsurat într-un timp scurt, $Q_x = I_x t$, cu sarcina transportată de impulsuri etalon de curent repetate, $Q_c = nq$, unde n este numărul unor astfel de impulsuri și q sarcina corespunzătoare fiecăruia. Prin urmare, n este o măsură a curentului I_x.

Schema bloc a unui astfel de instrument de măsurare este reprezentată în fig. 12-4. Sarcina transportată de curentul I_x încarcă condensatorul C, astfel încît tensiunea U_c aplicată la intrarea amplificatorului *1* crește și, cînd atinge o anumită valoare, semnalul de ieșire din amplificator produce bascularea discriminatorului *2*, care deblochează generatorul *3*, de 5 MHz. Impulsurile generatorului 3 sînt numărate și, în același timp, provoacă producerea impulsurilor etalon de sarcină q de către generatorul *4*. Semnul sarcinii q este astfel ales încît să producă descărcarea condensatorului C. După n astfel de impulsuri etalon, condensatorul este descărcat și discriminatorul *2* rebasculează în poziția inițială, provocînd blocarea generatorului *3*, respectiv a generatorului *4*. După aceasta, ciclul de funcționare se repetă deoarece I_x produce o nouă încărcare a condensatorului C.

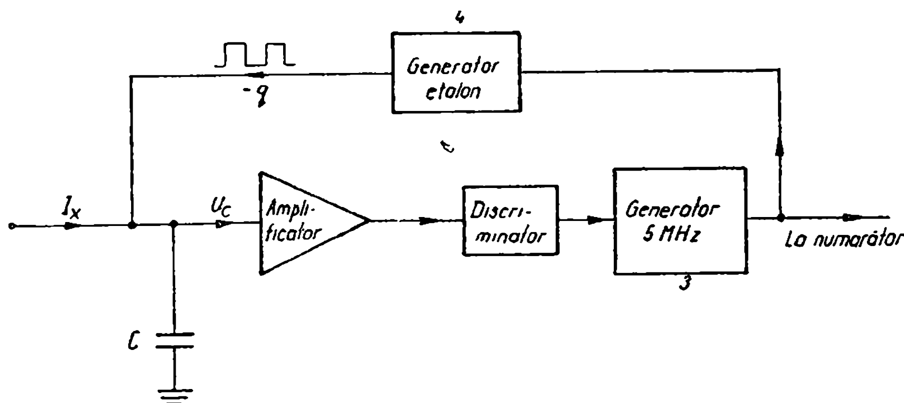


Fig. 12-4. Schema bloc a ampermetrului numeric cu impulsuri de sarcină electrică.

Se observă că numărul n de impulsuri etalon este mai mare sau mai mic, după cum intensitatea curentului de măsurat I_x este mai mare sau mai mică. Înregistrînd n la un numărător de impulsuri, rezultă valoarea numerică a lui I_x.

Măsurarea numerică a curentului electric prin compararea succesivă cu valori cunoscute. În principiu, această metodă folosește proprietatea de remagnetizare prin impulsuri de curent a miezurilor din ferită cu ciclul de histerezis dreptunghiular. În fig. 12-5, *a* este reprezentat un astfel de miez, iar în fig.12-5, *b* este arătat ciclul său de histerezis rectangular. Pentru ca miezul să comute din starea de magnetizare $-B_s$ în $+B_s$ sau din starea $+B_s$ în $-B_s$ este necesar un cîmp de excitație $H>H_c$, respectiv $H<-H_c$. Se notează cu I_c curentul care produce cîmpul H_c.

Se consideră că, în prezența curentului de comparație cunoscut, I_k, miezul din ferită se găsește în starea de magnetizare $-B_s$. Aplicînd în această stare curentul de măsurat I_x, miezul va comuta în starea $+B_s$ numai dacă $I_x-I_k>I_c$. În caz contrar, miezul rămîne mai departe în starea $-B_s$. Dacă comutarea are loc, va apare în bobina situată pe miez o t.e.m. indusă u_e (sub formă de impuls). Deci, apariția impulsului u_e este un indiciu că I_x este mai mare decît o anumită valoare cunoscută.

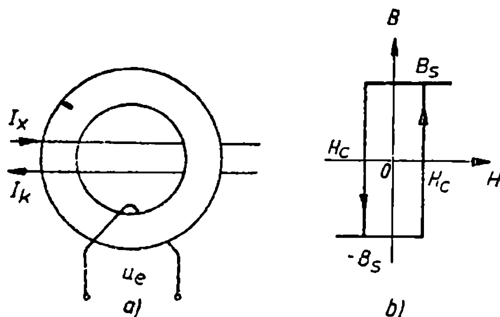


Fig. 12-5. Măsurarea numerică prin comparație a intensității curentului electric : a — miezul din ferită; b — ciclul de histerzis rectangular.

Pe același principiu, se efectuează o nouă comparație a lui I_x, de exemplu cu $\frac{1}{2} I_k$, ș.a.m.d. Astfel, din aproape în aproape, se ajunge să se stabilească cu precizie valoarea lui I_x, care se afișează la sistemul numeric al instrumentului.

12.4. MĂSURAREA NUMERICĂ A DEFAZAJULUI ŞI FACTORULUI DE PUTERE

La paragraful 11.4 s-a explicat posibilitatea măsurării analogice a defazajului dintre două mărimi sinusoidale, folosind un voltmetru electronic. Dacă în locul voltmetrului electronic se foloseşte un voltmetru numeric, valoarea defazajului se obţine sub formă numerică.

Ştiind că în regim sinusoidal factorul de putere este $\Delta = \cos\varphi$, înseamnă că există posibilitatea ca pentru fiecare valoarea numerică a defazajului φ să se obţină, tot sub formă numerică, valoarea factorului de putere Δ. Pentru aceasta trebuie să se ţină seama de legătura neliniară între Δ şi φ, exprimată prin funcţiunea cosinus. Există în acest sens aparate de măsurare numerice care îndeplinesc cerinţa impusă, destul de complexe, a căror descriere este prezentată în literatura de specialitate.

12.5. MĂSURAREA NUMERICĂ A PUTERII

Puterea şi energia au fost probabil primele mărimi electrice măsurate numeric. Contorul de energie este în orice caz, şi astăzi, cel mai răspîndit aparat de măsurare numeric.

El poate servi şi pentru măsurarea puterii. După cum se ştie, viteza de rotaţie a contorului este proporţională cu puterea consumată. Pentru a produce impulsuri a căror frecvenţă să fie proporţională cu viteza, au fost imaginate şi aplicate o mulţime de procedee, începînd cu montarea unor lamele de contact pe axul contorului trecînd apoi la practicarea unor orificii, la periferia discului, prin care, la trecerea lor prin dreptul unei surse, lumina produce impulsuri prin elemente fotoelectrice, sau la aplicarea unor piese feromagnetice pe disc, care trecînd printre două bobine cuplate magnetic ale unui oscilator, întrerup oscilaţiile acestuia. Toate aceste procedee nu pot asigura o precizie prea ridicată din cauza erorilor proprii ale contorului. Ele se utilizează însă şi astăzi în sisteme de telemăsurare puţin pretenţioase.

Tendinţa actuală privind măsurarea numerică a puterii este de a o converti într-o altă mărime (tensiune, frecvenţă), proporţională cu ea, şi de a măsura numeric această mărime.

Convertoare putere-tensiune. Una dintre posibilităţile de a converti puterea în tensiune este oferită de sonda cu efect Hall, la care, aşa cum este cunoscut, tensiunea Hall u_H este proporţională cu produsul între curentul de comandă i_c şi inducţia magnetică B : $u_H = C_H i_c B$. Dacă curentul de comandă i_c se alege proporţional cu tensiunea u_b de la bornele unui circuit şi dacă inducţia magnetică B este proporţională cu curentul i din circuit, rezultă tensiunea Hall proporţională cu puterea electromagnetică instantanee :

$$u_H = k u_b i = kp. \qquad (12\text{-}1)$$

În regim sinusoidal, valoarea medie a tensiunii Hall în raport cu o perioadă este proporţională cu puterea activă :

$$\frac{1}{T}\int_0^T u_H\,dt = k\frac{1}{T}\int_0^T p\,dt = kP = kU_b I\cos\varphi. \qquad (12\text{-}2)$$

Prin urmare, indicaţia unui voltmetru numeric folosit pentru măsurarea tensiunii Hall, redă, la o altă scară, puterea activă.

Convertoare de putere cu dispozitive de înmulţire numerică. Valoarea numerică a puterii se poate obţine prin produsul între valorile numerice a tensiunii efective de la borne, a curentului efectiv din circuit şi a factorului de putere, conform schemei reprezentată în fig. 12-6. Convertoarele analog-numerice *1* au rolul de a da la ieşire valorile numerice ale tensiunii, curentului (mărimi

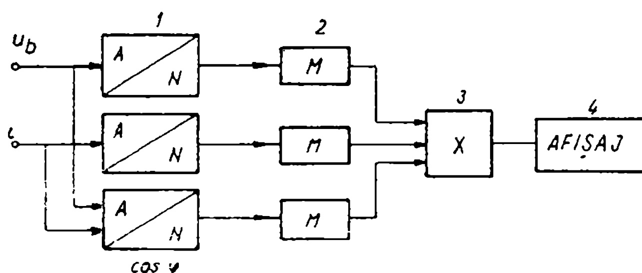


Fig. 12-6 Schema bloc a wattmetrului numeric cu dispozitive de înmulţire.

efective) şi factorului de putere, care se înmagazinează în dispozitivele de memorare *2*. Din aceste memorii se scot, ciclic, valorile numerice şi se înmulţesc în dispozitivul *3*. Rezultatul înmulţirii apare la afişajul *4*.

Wattmetrele numerice sînt destul de costisitoare dar, ca şi alte instrumente numerice de măsurare, oferă posibilitatea urmăririi şi comenzii de la distanţă a puterii, respectiv a altor mărimi (telemăsurare, telecomandă), ceea ce prezintă importanţă deosebită în sistemele electrice de putere. Toate aceste informaţii redate prin valori numerice ajung la un punct central de dispecerat din care se coordonează funcţionarea la parametrii optimi ai sistemului.

12.6. NUMĂRĂTOARE ELECTRONICE

Există un număr mare de instrumente electronice destinate numărării impulsurilor primite de la o sursă într-un interval de timp dat, numite numărătoare electronice. De regulă, aceste numărătoare sînt constituite din circuite bistabile care au la ieşire două stări stabile : 1 (tensiune mare) şi 0 (tensiune mică). Trecerea dintr-o stare în alta are loc la fiecare impuls de un anumit semn aplicat la intrare.

În cele ce urmează, se prezintă principiul de funcţionare al numărătoarelor binare şi zecimale, precum şi unele aplicaţii.

12.6.1. NUMĂRĂTOARE BINARE

Se consideră în figura 12-7 un numărător cu patru circuite bistabile în lanţ, avînd ieşirile notate cu *A*, *B*, *C* şi *D*. La intrarea primului circuit bistabil din dreapta se aplică un tren de impulsuri negative (impulsul negativ provoacă basculare a).

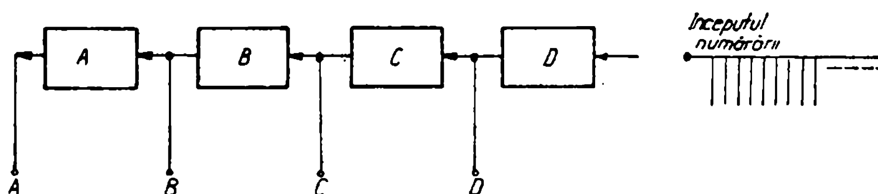


Fig. 12-7. Schema de principiu a numărătorului binar de impulsuri cu patru circuite bistabile.

Presupunem că la începutul numărării toate circuitele bistabile au la ieşire starea zero, adică $A=0$, $B=0$, $C=0$ şi $D=0$, ceea ce înseamnă numărul binar 0000. La primul impuls primit, circuitul bistabil D trece din starea 0 în starea 1. Următorul circuit bistabil rămîne în continuare în starea iniţială 0, deoarece la intrarea sa a apărut un impuls pozitiv care nu produce basculare. Deci, numărul binar care exprimă această nouă stare a circuitelor bistabile este 0001. La al doilea impuls primit din exterior, circuit bistabil D basculează din nou, din starea 1 în starea 0. Următorul circuit bistabil, C, basculează din 0 în 1 deoarece la intrarea sa a apărut un impuls negativ prin trecerea din 1 în 0 a bistabilului D. Această nouă stare a circuitelor bistabile corespunde numărului binar 0010. Procesul se desfăşoară analog la al treilea impuls, ş.a.m.d. În tabela 12-1 este prezentată starea circuitelor bistabile după fiecare impuls primit din exterior.

Tabela 12-1

Starea circuitelor bistabile din fig 12-7

Nr. impulsurilor	*A*	*B*	*C*	*D*
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0
13	1	1	0	1
14	1	1	1	0
15	1	1	1	1
16	0	0	0	0

Dacă tensiunile de la ieşirile A, B, C, D se aplică unor beculeţe fixate pe un panou, se poate urmări vizual starea fiecărui bistabil, respectiv numărul binar prin care se exprimă numărul de impulsuri primite.

Se observă din tabela 12-1 că, cu sistemul compus din patru bistabile nu se poate număra (în binar) decît un număr de 15 impulsuri.

Aplicaţia 12-1. Dacă numărătorul binar este prevăzut cu şapte elemente bistabile, care este numărul de impulsuri ce poate fi înregistrat?

Rezolvare. Numărul binar maxim ce poate fi înregistrat la numărătorul cu şapte elemente bistabile este: 1111111. La acest număr binar, corespunde numărul zecimal:

$$2^6+2^5+2^4+2^3+2^2+2^1+2^0=127.$$

Deci, se pot număra 127 de impulsuri.

12.6.2. NUMĂRĂTOARE ZECIMALE

Principiul de funcționare al unui numărător zecimal, realizat cu elemente bistabile și elemente logice, urmărește transformarea numerelor binare în numere zecimale. Cu alte cuvinte, impulsurile de ordinul unităților numărate de sistemul binar se transpun în sistemul de numărare zecimală la rangul

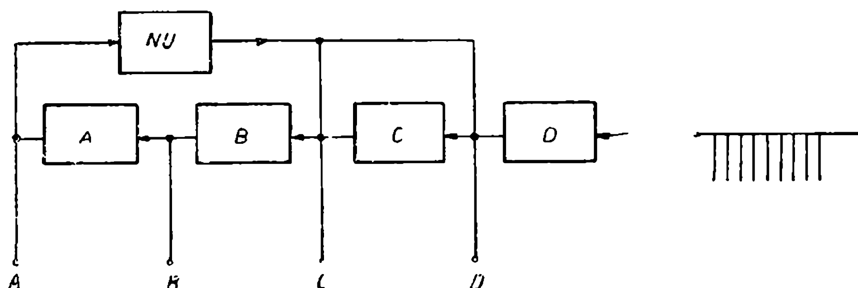


Fig. 12-8. Schema de principiu a numărătorului binar cu patru bistabile, a căror stări se repetă după fiecare zece impulsuri.

unităților, apoi grupe de cîte zece impulsuri numărate de sistemul binar se transpun în sistemul zecimal la rangul zecilor, ş.a.m.d. Evident, aceasta înseamnă că la fiecare al zecelea impuls numărat de sistemul binar, acesta să revină în starea inițială, apt pentru a număra alte 10 impulsuri.

În figura 12-8 este reprezentat sistemul de numărare în binar, cu patru elemente bistabile prevăzute cu două bucle de reacție, care revine în starea inițială 0000 la fiecare al zecelea impuls (tab. 12-2).

Sistemul de înregistrare (și citire) în zecimal a numărului de impulsuri de la 0 la 9 constă din 10 ansambluri realizate din elemente logice NU și ȘI, cîte un ansamblu pentru fiecare număr zecimal. La intrarea acestor ansambluri se aplică impulsurile *A*, *B*, *C*, *D* de la sistemul binar. În figura 12-9, *a*, *b* și *c* sînt reprezentate ansamblurile pentru înregistrarea și vizualizarea prin aprinderea unui bec a numerelor zecimale 0, 1, 2 și 3. Evident că la un moment dat, adică după un anumit impuls, va lumina numai un singur bec din cele 10.

Tabela 12-2

Starea circuitelor bistabile din fig. 1-28

Nr. impulsurilor	*A*	*B*	*C*	*D*
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	1	1	0
9	1	1	1	1
10	0	0	0	0

Pentru înregistrarea zecilor, sutelor, ... sistemul zecimal este prevăzut cu grupe în cascadă de cîte zece ansambluri fiecare (fig. 12-10), similare cu grupa de ansambluri a unităților descrisă mai sus. La fiecare al zecelea impuls, înregistrat la o grupă de ansambluri, se transmite un impuls la grupa de ansambluri din stînga (de exemplu, de la grupa zecilor, la grupa sutelor etc.).

Pentru a număra impulsurile într-un interval de timp, de exemplu în 1 secundă, este necesar să se adapteze la numărătorul binar-zecimal o „poartă" care să permită numărarea impulsurilor numai în acel interval de timp, respec-

tiv de a aduce numărătorul în starea zero la începutul intervalului. În fig. 12-11 este reprezentată schema numărătorului prevăzut cu o „poartă" din care se poate deduce foarte uşor principiul de funcţionare. La începutul intervalului de numărare (punctul A), poarta dă un impuls la numărător şi îl aduce în starea zero şi, în acelaşi moment, dă un semnal rectangular prin care se fixează începutul A şi sfîrşitul B al intervalului de numărare.

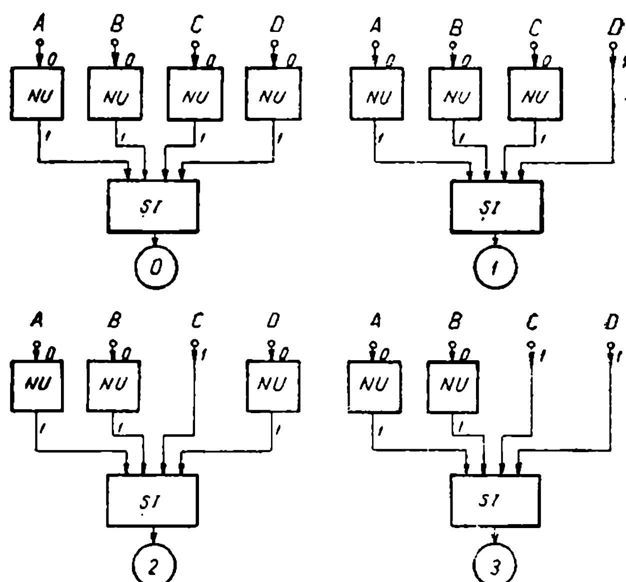


Fig. 12-9. Ansamblele pentru convertirea din binar în numerele zecimale 0, 1, 2 şi 3.

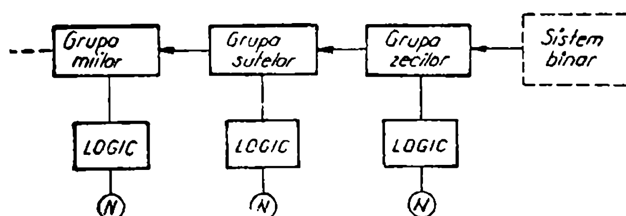


Fig. 12-10. Cascada ansamblelor de convertire din binar pe ranguri zecimale.

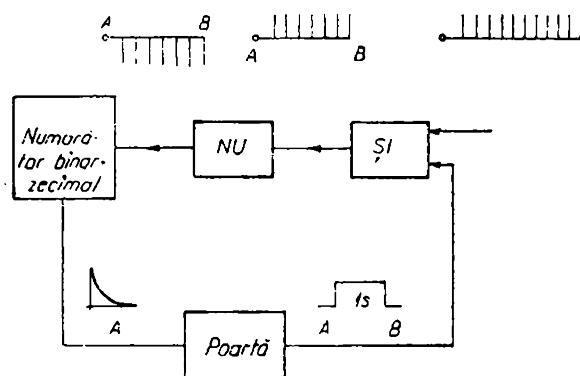


Fig. 12-11. Numărător cu o poartă.

12.7. FRECVENŢMETRUL NUMERIC

Frecvenţmetrul numeric constituie una din cele mai evidente aplicaţii ale numărătoarelor electronice de impulsuri. Problemele prezentate la paragraful precedent, referitoare la numărarea impulsurilor într-un interval de timp dat, constituie de fapt principiul de funcţionare al frecvenţmetrului numeric, care trebuie să indice numărul de perioade (oscilaţii) într-o secundă.

Următoarele precizări mai trebuie adăugate :

— alternanţa pozitivă a fiecărei oscilaţii trebuie transformată într-un impuls adecvat intrării în numărătorul binar-zecimal ;

— poarta care eşantionează timpul de măsurare la 1s trebuie să fie de precizie ridicată, mai ales atunci cînd frecvenţa de măsurat este mare ;

— repetarea numărării trenului de impulsuri cuprinse într-o secundă trebuie să se facă la intervale de timp care să permită citirea (vizualizarea) valorii frecvenţei în orice moment.

Capitolul 13

VERIFICAREA ŞI ETALONAREA INSTRUMENTELOR ELECTRICE DE MĂSURARE

13.1. CONSIDERAŢIUNI GENERALE

Verificarea instrumentelor electrice de măsurare este o operaţie obligatorie atît pentru instrumentele de fabricaţie nouă, precum şi pentru cele în folosinţă, fiind efectuată de către organele metrologice autorizate. Verificarea poate fi :

— *iniţială*, cînd se efectuează asupra fiecărui instrument de măsurare nou fabricat, reparat sau importat ;

— *periodică*, cînd se efectuează la termene stabilite asupra instrumentelor de măsurare în folosinţă ;

— *la cererea* organizaţiilor socialiste deţinătoare de instrumente de măsurare.

Organele metrologice de verificare eliberează buletine de verificare pentru fiecare instrument în care se precizează rezultatul verificării (admis, respins).

Pentru fiecare tip de instrument supus verificării există instrucţiuni oficiale de verificare, a căror respectare este obligatorie. În aceste instrucţiuni sînt precizate : natura şi condiţiile verificării, aparatura folosită şi clasa de precizie a acesteia, limitele admisibile ale abaterilor în timpul funcţionării instrumentului etc.

Întrucît pentru verificarea şi etalonarea instrumentelor electrice de măsurare se folosesc frecvent compensatoare (potenţiometre), se prezintă în continuare principiul de funcţionare al acestora.

13.2. COMPENSATOARE DE MĂSURARE

13.2.1. PRINCIPIUL DE FUNCŢIONARE

Compensatoarele (numite şi potenţiometre) sînt dispozitive de măsurare prin comparaţie, bazate în mod obişnuit pe metode de nul.

După cum se ştie, metoda de nul constă în compararea acţiunilor a două mărimi, una cunoscută şi una necunoscută şi în cazul în care diferenţa acţiunilor este nulă se trage concluzia că cele două mărimi au valori egale. Dacă mărimea cunoscută (mărimea etalon) este de precizie mare şi compensarea este riguroasă, precizia determinării mărimii necunoscute poate fi foarte mare.

În general, cu compensatoarele pot fi măsurate tensiuni precum şi oricare altă mărime care poate fi transformată în tensiune.

Pentru o instalaţie de compensare sînt necesare : o tensiune etalon reglabilă în limite largi şi în trepte fine, de precizie foarte mare şi un aparat care să indice egalitatea celor două tensiuni (instrument de nul) de exemplu, un galvanometru.

Compensatoarele pot fi de c.c. sau de c.a.

13.2.2. COMPENSATOARE DE CURENT CONTINUU

În c.c. obţinerea unei tensiuni etalon reglabilă este foarte dificilă, căci pilele etalon (Weston) au tensiunea cunoscută cu precizie, dar nereglabilă. Soluţia se obţine prin folosirea unui divizor de tensiune de pe care se pot culege tensiuni de valori diferite, prin deplasarea cursorului. Însă, pentru a cunoaşte tensiunea culeasă, este nevoie ca divizorul să fie parcurs de un curent constant, bine cunoscut, şi ca rezistenţa divizorului să fie cunoscută şi de asemenea constantă.

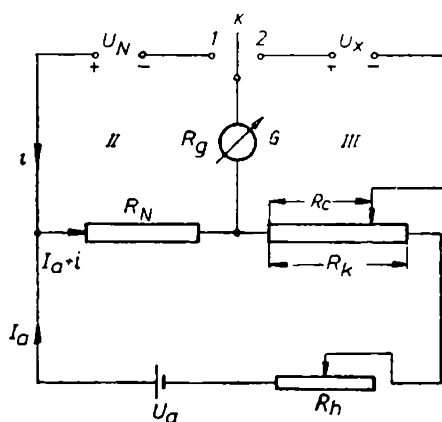


Fig. 13-1. Schema de principiu a compensatorului de c.c.

Divizorul se realizează neapărat reglabil în trepte, de exemplu în decade, pentru a avea rezistenţele determinate cu precizie (nu se poate folosi o rezistenţă reglabilă continuu, deoarece nu se poate fixa cu precizie valoarea rezistenţei).

Schema de principiu a unui compensator de c.c. este reprezentată în fig. 13.1. Ea cuprinde trei circuite, care au funcţiuni distincte.

Circuitul *I* conţine sursa auxiliară de tensiune U_a, care furnizează curentul de lucru I_a. Acest curent poate fi modificat cu rezistenţa R_h şi trece prin divizorul ohmic de tensiune cu rezistenţa totală R_k şi prin rezistenţa R_N care serveşte la măsurarea lui.

Circuitul *II* conţine sursa de tensiune etalon (pila Weston, de tensiune electromotoare U_N=1,01865 V), un galvanometru *G* ca indicator de nul, comutatorul *K* şi rezistenţa R_N. Acest circuit este destinat măsurării curentului I_a.

Circuitul *III* servind măsurărilor, conţine tensiunea de măsurat U_x, galvanometrul şi porţiunea R_c din rezistenţa divizorului ohmic de tensiune.

Dacă comutatorul *K* este în poziţia *1*, se poate scrie :

$$U_N=(I_a+i)\,R_N+i\,(R_g+R_i) \tag{13-1}$$

sau

$$I_a=\frac{U_N}{R_N}-\frac{i\,(R_N+R_g+R_i)}{R_N}, \tag{13-2}$$

unde R_i este rezistenţa interioară a sursei de tensiune U_N.

Regimul de funcţionare al compensatoarelor se particularizează pentru cazul în care $i=0$, cînd I_a are valoarea :

$$I_a=\frac{U_N}{R_N}, \tag{13-3}$$

care este foarte precis determinată. Modificarea curentului I_a se face cu rezistența R_h, pînă cînd $i=0$. Pentru ca curentul I_a să rămînă constant în continuare, trebuie ca tensiunea U_a să rămînă constantă și rezistențele compensatorului să aibe un coeficient de variație cu temperatura neglijabil. De asemenea, rezistențele de contact trebuie să rămînă constante. De aceea, toate rezistențele compensatorului se realizează din manganină și cu ploturi (deci reglabile în trepte), inclusiv rezistența R_h.

Pentru a măsura tensiunea necunoscută U_x, se trece comutatorul K în poziția 2 și la echilibru, cînd galvanometrul G indică zero, se poate scrie :

$$U_x=I_aR_c. \tag{13-4}$$

Echilibrul se realizează modificînd pe R_c, curentul I_a trebuind să rămînă în tot cursul măsurărilor neschimbat. În aceste condiții, din (13-3) și (13-4) se obține :

$$U_x=U_N\frac{R_c}{R_N}. \tag{13-5}$$

Aceasta arată că tensiunea U_x se măsoară prin comparație cu tensiunea etalon U_N, cu o precizie determinată de preciziile de cunoaștere a mărimilor U_N, R_c și R_N.

13.2.3. COMPENSATOARE DE CURENT ALTERNATIV

În c.a. problema compensatoarelor se prezintă mult mai complicat, fiind necesare mai multe condiții pentru a se realiza compensarea : tensiunea etalon reglabilă trebuie să aibă, față de tensiunea de măsurat, la o compensare perfectă, aceeași formă de variație în timp, aceeași frecvență, aceeași fază și aceeași amplitudine. Aceste condiții introduc tot atîtea elemente de reglare.

Compensatoarele de c.a. sînt de două tipuri :

— compensatoare în coordonate rectangulare ;

— compensatoare în coordonate polare.

La compensatorul în coordonate rectangulare tensiunea de măsurat $\underline{U}_x$ se compensează prin două componente rectangulare $\underline{U}_{ca}$ și $\underline{U}_{cr}$ ale tensiunii de $\underline{U}_c$ (fig. 13-2), dintre care $\underline{U}_{ca}$ este în fază cu curentul de lucru $\underline{I}_a$ a compensatorului. Fiecare dintre aceste două componente ale tensiunii de compensare se pot modifica între anumite limite, fără a se schimba defazajul dintre ele.

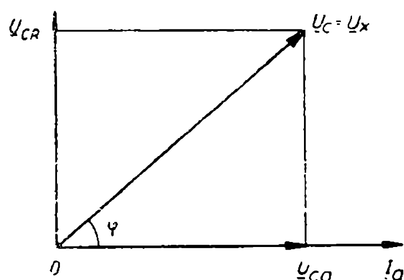


Fig. 13-2. Componentele rectangulare ale tensiunii de compensare

La compensatorul în coordonate polare tensiunea de măsurat $\underline{U}_x$, se compensează cu tensiunea $\underline{U}_c$ a cărei fază se modifică cu ajutorul unui regulator de fază și a cărei valoare efectivă se modifică între anumite limite.

13.3. VERIFICAREA AMPERMETRELOR ȘI VOLTMETRELOR

Verificarea ampermetrelor și voltmetrelor, în general a oricărui instrument electric de măsură, constă în următoarele :

— *Verificarea echilibrării sistemului mobil* : dacă se înclină cu 10° instrumentul în orice direcție, acul indicator, în prealabil adus la zero, nu trebuie să se deplaseze mai mult decît cu eroare de clasă.

— *Verificarea mișcării libere a sistemului mobil* : se variază cu un dispozitiv alimentarea, pînă cînd deviația acului indicator ajunge la limita superioară a scalei. Apoi, alimentarea se reduce, pînă cînd indicația ajunge la zero. Dispozitivul indicator trebuie să se deplaseze lin, fără salturi.

— *Verificarea deviației inițiale* : se aplică brusc valoarea egală cu 2/3 din limita scalei gradate (intensitate sau tensiune, după felul aparatului), indicatorul fiind la reperul inițial. Deviația inițială nu trebuie să depășească cu mai mult de 30% deviația permanentă pentru acea valoare.

— *Verificarea deviației remanente* : se aduce indicatorul la valoarea maximă a scalei și se reduce alimentarea încet pînă la zero, indicatorul trebuind să revină la poziția inițială în limitele erorii tolerate.

— *Verificarea timpului de amortizare a oscilațiilor* : se aduce indicatorul la mijlocul scalei gradate, se deconectează și se lasă indicatorul să-și amortizeze oscilațiile în jurul poziției inițiale, apoi se conectează brusc pornind în același moment un cronometru care se oprește în momentul în care oscilațiile au devenit mai mici decît 1,5% din lungimea scalei gradate. Se fac trei astfel de determinări și se ia media, care nu trebuie să depășească 4 s.

— *Verificarea rezistenței de izolație la străpungere* : se face cu instalații cu puterea de minimum 0,5 kVA pentru fiecare 1 000 V tensiune de încercare, prevăzute cu transformator ridicător de tensiune. Tensiunea de încercare se aplică progresiv, crescînd cu 100 V/s, iar descreșterea tensiunii se face de asemenea uniform. Rezistența de izolație la străpungere, pentru toate categoriile de aparate electrice trebuie să suporte timp de 60 s, la temperatura mediului ambiant de 20°±5 °C și umiditate relativă 65% ...80%, următoarele tensiuni de încercare, în funcție de tensiunile nominale de izolație : 0,5 kV, la cele cu tensiunea nominală de izolație 40 V ; 2 kV, la cele cu tensiunea nominală de izolație pînă la 650 V ; 3 kV, la cele pînă la 1 000 V ; 5 kV, la cele pînă la 2 000 V.

— *Verificarea indicațiilor* : la instrumentele electrice etalon și la cele de laborator de clasa 0,1 ... 0,5, verificarea indicațiilor se face prin *metoda compensației*, cu precizie de 0,02 ... 0,05% din limita de măsurare ; la instrumentele tehnice (clasa 1 ... 5), verificarea indicațiilor se face prin *metoda comparației* cu indicațiile unui instrument etalon cu indicele de clasă de cel puțin 5 ori mai mic decît al celor de verificat, cu limita superioară de măsurare aceeași cu a aparatelor de verificat și de același tip. Instrumentele de clasa 0,1 ; 0,2 ; 0,5 se pot verifica imdiat după conectarea lor în circuit, iar celelalte după lăsarea sub curentul și tensiunea nominală timp de 30 de min. Cele cu mai multe domenii de măsurare se verifică pentru fiecare domeniu.

În fig. 13-3 este reprezentată schema instalației pentru verificarea indicației ampermetrelor de c.c. prin metoda compensației. Schema instalației pentru verificarea indicației voltmetrelor de c.c. prin metoda compensației este repre-

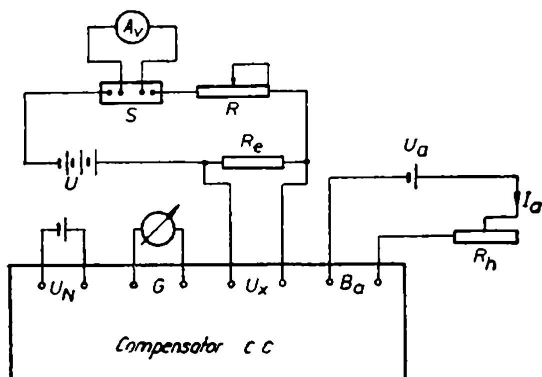


Fig. 13-3. Schema de verificare cu compensatorul a ampermetrelor de c.c.

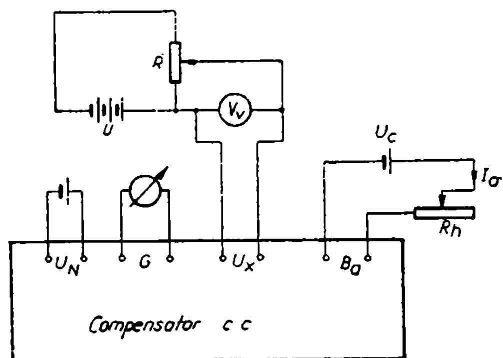


Fig. 13-4. Schema de verificare cu compensatorul a voltmetrelor de c.c.

zentată în fig. 13-4. Semnificația elementelor din aceste două scheme este următoarea :

U_N — tensiunea etalon (element Weston) ;
G — galvanometru (instrument de nul) ;
A_v, V_v — instrumente de verificat ;
B_a — baterie de alimentare a compensatorului, pentru curentul de lucru I_a ;
U_a — tensiunea bateriei exterioare ;
R_e — rezistență etalon ;
R_h — rezistența de modificare a curentului (tensiunii) de măsurat ;
S — șunt.

În fig. 13-5 este reprezentată schema pentru verificarea indicației ampermetrelor de c.c. prin metoda comparației, unde A_0 este ampermetrul etalon, iar A_v este ampermetrul ce se verifică. Ampermetrele de c.a. se verifică prin metoda comparației conform schemei din fig. 13-6, *a* în cazul alimentării directe și conform schemei din fig. 13-6, *b* în cazul alimentării prin transformator.

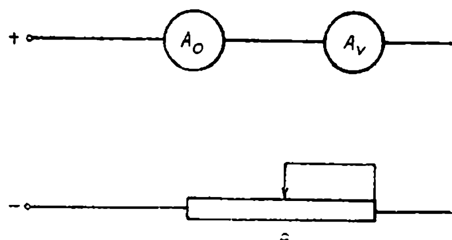
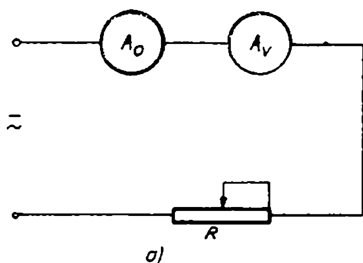


Fig. 13-5. Schema de verificare prin comparație a ampermetrelor de c.c.



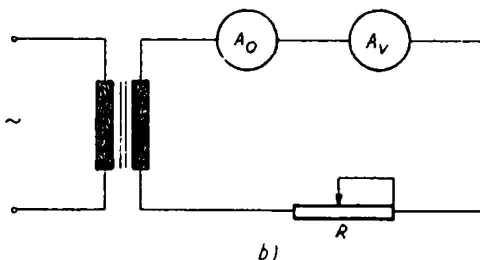


Fig. 13-6. Schema de verificare prin comparație a ampermetrelor de c.a. :
a — legarea directă ; *b* — legarea prin transformator de curent.

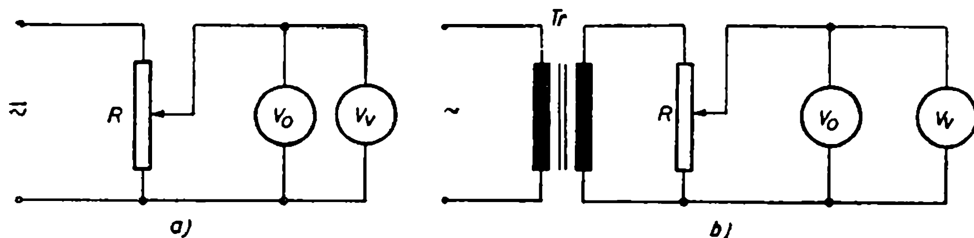


Fig. 13-7. Schema de verificare prin comparaţie a voltmetrelor :
a — legarea directă; *b* — legare prin transformator de tensiune.

Verificarea prin comparaţie a indicaţiei voltmetrelor se face folosind schema de montaj din fig. 13-7, *a* în cazul alimentării directe (c.c. şi c.a.), respectiv folosind schema de montaj din fig. 13-7, *b* în cazul alimentării prin transformator (c.a.).

13.4. VERIFICAREA CONTOARELOR DE ENERGIE ELECTRICĂ

Verificarea contoarelor de măsurare a energiei electrice nou fabricate, în uz sau reparate constă din :

— verificarea stării generale şi a construcţiei ;

— verificarea lucrărilor de reparaţie sau revizie ;

— verificarea funcţionării ;

— verificarea dispozitivelor auxiliare (mecanismul indicatorului de putere maximă, relee etc.).

În cele ce urmează, se fac referiri numai la verificarea funcţionării contoarelor, care constă în a verifica indicaţia, respectiv constanta contorului.

Pentru verificarea funcţionării unui contor de energie electrică se folosesc următoarele metode :

— verificarea vitezei de rotaţie a discului contorului cu wattmetrul şi cronometrul etalon ;

— verificarea prin comparaţie cu un contor etalon.

Înainte de începerea operaţiei de verificare a indicaţiei contoarelor, acestea trebuie să se afle timp de 45 min sub tensiunea şi curentul nominal, la cos $\varphi=1$ în cazul contoarelor de energie activă şi sin $\varphi=1$ în cazul contoarelor de energie reactivă.

Instalaţiile de verificare a contoarelor sînt prevăzute cu circuite separate pentru curent şi pentru tensiune, fiecare circuit avînd reglaj independent.

Verificarea cu wattmetrul şi cronometrul etalon. În fig. 13-8 este reprezentată schema de verificare a unui contor monofazat folosind wattmetrul şi cronometrul etalon.

Pentru asigurarea preciziei necesare trebuie urmărit ca variaţia sarcinii contoarelor în timpul verificării să nu întreacă $\pm 0,5\%$. Dacă sursa de alimentare a instalaţiei de verificare nu asigură îndeplinirea acestei condiţii, atunci verificarea trebuie făcută de către doi operatori, unul urmînd să numere rotaţiile discului, iar celălalt să urmărească indicaţiile wattmetrului etalon şi să menţină sarcina la o valoare, pe cît este posibil, constantă. Dacă oscilaţiile

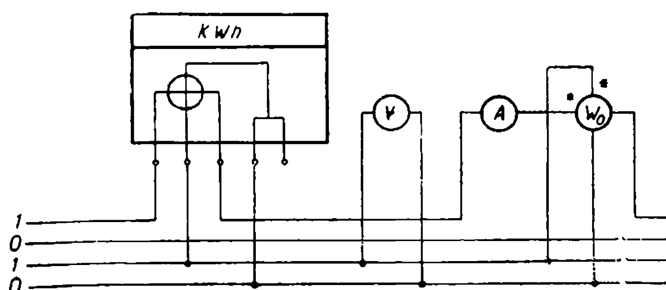


Fig. 13-8. Schema de verificare a unui contor monofazat.

sarcinii sînt de asemenea natură încît operatorul care o reglează nu poate să mențină variații ale sarcinii față de valoarea fixată mai mici ca $\pm 1,5\%$, atunci va trebui să renunțe la metoda de verificare wattmetru-cronometru etalon.

Erorile de indicație ale contoarelor se obțin ca rezultat a cel puțin două citiri la cronometru pentru fiecare sarcină. Aceasta se poate realiza fie prin urmărirea repetată a rotațiilor discului și folosirea în acest caz a unui singur cronometru sau prin folosirea a două cronometre pentru urmărirea o singură dată a rotațiilor discului la o anumită sarcină. Ca valoare reală a timpului de rotație pentru o sarcină dată se ia media aritmetică a citirilor obținute la cronometru, medie în care nu se includ citirile care dau valori mult prea diferite și care sînt cel mai adesea cauzate de greșeli în numărarea rotațiilor.

În cazul în care valoarea erorii obținute ca rezultat al două citiri la cronometru este foarte apropiată de valoarea erorii limită, atunci este necesar să se efectueze în mod suplimentar încă două citiri la sarcina respectivă și să se ia pentru eroare valoarea care rezultă din media aritmetică a celor patru determinări.

Calculul erorii contorului de verificat în cazul folosirii metodei wattmetru-cronometru etalon se efectuează cu ajutorul următoarei relații de bază :

$$\Delta\% = \frac{W_1 - W}{W}\,100, \tag{13-6}$$

în care :

- Δ este eroarea relativă a indicațiilor contorului exprimată în procente ;
- W_1 — valoarea energiei electrice determinată după indicațiile contorului de verificat ;
- W — valoarea reală (adevărată) a energiei electrice determinată după indicațiile aparatelor etalon.

În locul relației (13-6) se poate folosi pentru ușurarea calculelor relația :

$$\Delta\% = \frac{t_c - t}{t}\,100, \tag{13-7}$$

în care :

- t_c este așa-numitul timp normal (calculat) pentru contorul dat, adică numărul de secunde în care discul ar trebui să execute în mod corect N rotații la sarcina dată ;
- t — indicația cronometrului.

Timpul normal se calculează cu ajutorul relației :

$$t_c = \frac{CN}{P}, \tag{13-8}$$

în care :

P este sarcina contorului în wați ;
C — constanta contorului în wattsecunde pentru o rotație a discului ;
N — numărul de rotații pentru fiecare sarcină, care se alege în așa fel încît timpul corespunzător t_c să nu fie mai mic de 50 s.

Constanta contorului în wattsecunde pe rotație, se calculează pe baza constantei înscrise pe plăcuța contorului.

Verificarea prin comparație cu indicațiile unui contor etalon. Tipul și modul de conectare al contorului etalon trebuie să corespundă tipului și modului de conectare al contorului de verificat.

Contoarele etalon trebuie folosite numai la acei curenți și tensiuni pentru care se garantează funcționarea lor corectă. Pentru extinderea limitelor lor de măsurare, contoarele etalon pot fi conectate prin transformatoare de măsurare.

Contorul etalon este pus în funcțiune în momentul cînd se începe numărarea rotațiilor discului contorului de verificat și se deconectează în momentul încetării numărării. Indicațiile contorului etalon se înregistrează cu o precizie mergînd pînă la 0,01 rotații.

Pînă la începerea numărării rotațiilor la discul contorului de verificat, contorul etalon trebuie să se găsească sub sarcină de cel puțin 15 min.

Timpul de numărare a rotațiilor la contorul de verificat se alege în așa fel încît, în acest interval, discul contorului etalon să execute cel puțin 5 rotații în cazul contoarelor de verificare de clasa 2 și cel puțin 8 pentru contoare de clase superioare de precizie.

Pentru fiecare valoare a sarcinii este necesar să se efectueze cel puțin 2 citiri la contorul etalon, urmînd ca pentru calculul erorii să se ia media aritmetică a tuturor citirilor, cu excepția acelor care prezintă abateri importante de la valoarea medie.

La verificarea prin comparație cu indicațiile unui contor etalon, eroarea contorului de verificat se calculează cu relația :

$$\Delta\% = \frac{N_2K_1 - N_1K_2}{N_1K_2} 100, \tag{13-9}$$

unde :

N_1 este numărul de rotații ale contorului etalon ;
N_2 — numărul de rotații ale contorului de verificat ;
K_1 — constanta contorului etalon exprimată în rot/kWh ;
K_2 — constanta contorului de verificare exprimată în rot/kWh.

În cazul în care conectarea contorului etalon se face prin intermediul unor transformatoare de măsurare, relația pentru calculul erorii contorului de verificat devine :

$$\Delta\% = \frac{N_2K_3 - N_1K_2}{N_1K_2} 100, \tag{13-10}$$

unde :

$$K_3 = \frac{I_s}{I_p} \cdot \frac{U_s}{U_p} \cdot K_1 \qquad (13\text{-}11)$$

$\frac{I_p}{I_s}$ reprezintă raportul de transformare al transformatorului de măsurare de curent ;

$\frac{U_p}{U_s}$ reprezintă raportul de transformare al transformatorului de măsurare de tensiune.

În afară de cele arătate mai sus privind verificarea indicației (erorii) contoarelor, se mai efectuează și următoarele încercări :

— deconectînd circuitul bobinelor de curent și aplicînd succesiv tensiuni egale cu 80% ... 110% din tensiunea nominală, sistemul mobil trebuie să rămînă nemișcat ;

— la un curent de cel mult 5% din curentul nominal discul trebuie să înceapă a se roti.

Pentru cunoașterea condițiilor de verificare a altor tipuri de instrumente și aparate electrice, se recomandă consultarea instrucțiunilor elaborate în acest sens de Institutul de Metrologie.

BIBLIOGRAFIE

1. Andronescu Pl. *Bazele electrotehnicii.* Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică 1972.
2. Răduleţ R. *Bazele teoretice ale electrotehnicii.* Bucureşti, Litografia învăţămîntului, 1955—1956.
3. Nicolau E., Beliş M. *Măsurări electrice şi electronice.* Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1972.
4. Bogoevici N., Heler A. *Electrotehnică şi maşini electrice.* Institutul Politehnic Timişoara, 1969.
5. Crişan S., Stoica V. *Măsuri electrice* (curs pentru subingineri). Institutul Politehnic „Traian Vuia" Timişoara, 1972.
6. Daba D., Constantin E. *Electrotehnică.* Institutul Politehnic „Traian Vuia" Timişoara, 1973.
7. Dîmboiu E., Saal C., Szabo W. *Electrotehnică şi maşini electrice.* Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1973.
8. Ilioniu N., Ivanovici Gh. *Memorator de metrologie.* Bucureşti, Editura tehnică, 1966.
9. Pop E., Chivu M. *Măsuri electrice şi magnetice.* Institutul Politehnic Timişoara, 1969.
10. Pop E. *Metode şi aparate de măsură numerice.* Institutul politehnic „Traian Vuia" Timişoara, 1972.
11. Preda M., Hortopan V. *Electrotehnică şi măsuri electrice.* Bucureşti. Editura didactică şi pedagogică, 1967.
12. Preda M., Sonea P., Manea Fl., Cristea P., Spinei F., Gavrilă H., Petru V. *Electrotehnică.* Bucureşti, Editura didactică şi pedagogică, 1974.
13. Şora C., De Sabata I., Constantin E., Lăpuşan V., Dobre S., Daba D., Grün U. *Bazele electrotehnicii. Probleme.* Institutul politehnic „Traian Vuia" Timişoara, 1971.
14. * * * Lexiconul Tehnic Român.
15. Ciorăscu F., Spinulescu I. *Măsurări electrice şi electronice.* Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1973.
16. Clyde N. Herrich. *Instruments ans Measurements for Electronics.* Mc Graw-Hill Book Company, 1972.

SISTEMUL DE UNITĂŢI MKSA

În Republica Socialistă România este legiferată obligativitatea folosirii sistemului de unităţi internaţional (SI) care, pentru domeniul electromagnetismului, are denumirea de sistemul MKSA (raţionalizat).

Tabela I-1

Denumirile şi modul de definire a unor unităţi MKSA

Denumirea şi simbolul mărimii	Unitatea de măsură	Definirea unităţii de măsură
1	2	3
Lungimea (*l*, *d*)	Metrul [m] Unitate fundamentală	STAS 737-49
Masa (*m*)	Kilogramul [kg] Unitate fundamentală	STAS 737-49
Timpul (*t*)	Secunda [s] Unitate fundamentală	STAS 737-49
Curentul electric (*i*, *I*)	Amperul [A] Unitate fundamentală	Curentul constant care, menţinut în două conductoare, paralele, rectilinii, de lungime practic infinită şi de secţiune circulară neglijabilă, aşezate în vid la o distanţă de 1 m unul de altul, produce între aceşti conductori o forţă de $2 \cdot 10^{-7}$ newtoni pe metru de lungime
Forţa (*F*)	Newton [N]	Forţa ce imprimă masei de 1 kg o acceleraţie de 1 m/s^2
Energia (*W*)	Joule [J]	Lucrul mecanic efectuat de o forţă de 1 N al cărui punct de aplicaţie se deplasează cu 1 m în direcţia şi sensul forţei
Puterea (*P*)	Watt [W]	Energia de 1 J dezvoltată uniform timp de 1 s
Sarcina electrică (*Q*, *q*)	Coulomb [C]	Cantitatea de sarcină electrică transportată de un curent constant de 1 A timp de 1 s
Potenţialul electric şi tensiunea electrică (*V*, *U*)	Volt [V]	Tensiunea electrică între două puncte ale unui conductor prin care trece un curent constant de 1 A, cînd puterea disipată între aceste două puncte este de 1 W

1	2	3
Intensitatea cîmpului electric (*E*)	Volt pe metru [V/m]	Intensitatea cîmpului electric care determină o forță de 1 N asupra unei sarcini electrice punctiforme de 1 C
Capacitatea electrică (*C*)	Farad [F]	Capacitatea unui condensator electric care fiind încărcat cu sarcina electrică de 1 C determină o tensiune de 1 V între armăturile lui
Rezistență electrică (*R*)	Ohm [Ω]	Rezistența electrică între două puncte ale unui conductor, cînd o tensiune constantă de 1 V aplicată între aceste două puncte, produce în conductor un curent de 1 A, conductorul nefiind sediul altor tensiuni electromotoare.
Fluxul magnetic (Φ)	Weber [Wb]	Fluxul inducției magnetice care, străbătînd aria unei spire, produce în acea spiră o tensiune electromotoare de 1 V, cînd fluxul scade liniar la zero în timp de 1 s
Inducția magnetică (*B*)	Tesla [T] Weber pe metru patrat [Wb/m²]	Inducția magnetică a unui cîmp magnetic uniform care produce un flux magnetic de 1 Wb printr-o suprafață normală de 1 m²
Intensitatea cîmpului magnetic (*H*)	Amper-spiră pe metru [AS/m]	Intensitatea cîmpului magnetic în centrul unei spire circulare avînd diametrul de 1 m și fiind străbătută de curentul de 1 A
Tensiune magnetomotoare (U_m)	Amper-spiră [AS]	Tensiunea magnetomotoare produsă de o spiră parcursă de curentul de 1 A
Inductanța (*L*)	Henry [H]	Inductanța unei spire parcursă de curentul de 1 A care produce prin aria spirei un flux magnetic de 1 Wb
Permitivitatea vidului (ε_0)	Farad pe metru [F/m]	Constantă universală $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi 9\cdot 10^9}$ [F/m]
Permeabilitatea vidului (μ_0)	Henry pe metru [H/m]	Constantă universală $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ [H/m]

Pe lîngă unitățile specifice sistemului MKSA, este tolerată folosirea în practică și a altor unități, multipli sau submultipli ai unităților de bază, sau alte unități necoerente. De exemplu, densitatea curentului electric să măsoară, obișnuit, în A/mm², în practica curentă energia activă se măsoară cu unitatea necoerentă kilowatt-ora (1 kWh $=10^3$. 3 600 J)

INSTRUMENTE ELECTRICE DE MĂSURARE FABRICATE ÎN R.S.R.

Industria electrotehnică în plină dezvoltare din Republica Socialistă România realizează utilaje şi instalaţii de mare complexitate şi cu performanţe superioare, necesare în numeroase sectoare ale economiei. Acestei industrii îi revine şi rolul de a produce instrumente şi aparate electrice de măsurare atît pentru echiparea unor maşini şi instalaţii, cît şi pentru măsurări de precizie tot mai ridicată în laboratoare şi în procesul de producţie. În acest sens, au fost înfiinţate şi au intrat în funcţiune unităţi specializate pentru producerea de aparate de măsurare şi control ca : I.A.E.M.I. Bucureşti, I.A.E.M. Timişoara, I.R.M.E. Bucureşti etc.

Tabela II-1

Denumirile şi caracteristicile unor instrumente şi aparate electrice de măsurare fabricate în ţară

Nr. de ord.	Denumirea	Caracteristici	Clasa de precizie
1	2	3	4
1	Instrumente magnetoelectrice de tablou, tip M.	Ampermetre, minim 1 mA. Voltmetre, maxim 1 000 V.	1,5 ; 2,5
2	Instrumente electromagnetice de tablou, tip E.	Ampermetre, minim 600 mA Voltmetre, maxim 600 V.	1,5 ; 2,5
3	Instrumente de măsurare portabile electromagnetice, tip AP, VP, VAP.	Ampermetre : 0,2 ; 1 ; 5 ; 6 ; 20 ; 30 A. Voltmetre : 30 ; 75 ; 150 ; 250 ; 300 ; 500 ; 600 V.	1
4	Megohmmetre tranzistorizate, MT.	0...100 MΩ ; 500 V ; 1 000 V. 0...1 000 MΩ ; 2 500 V.	2,5
5	Aparat pentru măsurarea rezistenţei prizelor de pămînt, tip APP-2.	1...1 000 Ω	5
6	Wattmetru ferodinamic, tip D 4.	0...3 kW	2,5
7	Trusă de curent, TC-12.	100...1 200 A ; 1 000 VA ; 50 Hz. 5...440 A ; 100 VA ; 50 Hz	2,5
8	Trusă pentru încercarea izolaţiei, TCS-2.	0...2 kV ; 100 mA ; 50 Hz	
9	Cleşte ampermetric de joasă şi de înaltă tensiune (CAJT, CAIT).	0...600 A ; 50 Hz. 0...1 000 A ; 10 kV ; 50 Hz.	5

Tabela II-1 (continuare)

1	2	3	4
10	Voltmetre electronice, tip E-0402, E-0401.	10 μV...100 V (c.c.); 100 mV...1 000 V (c.c); 100 mV...300 V (c.a).	2,5
11	Multimetre numerice, tip E-0302.	Tensiuni continui 0,2...100 V; Tensiuni alternative 0,2...350 V; Curenţi 0,2...100 mA; Rezistenţe 0,2...200 kΩ.	
12	Frecvenţmetru electronic tip E-0203.	10 Hz...20 MHz.	
13	Numărător universal tip E-0202.	10^7 impulsuri; 0...20 MHz.	
14	Punte RLC, tip E-0704.	0,5...105 MΩ; 1 pF...1 050 μF; 50 μH...105 H.	
15	Punţi Wheatstone de precizie.	$10^{-2}...10^7$ Ω.	0,05 0,1
16	Punte Schering cu braţe cuplate inductiv, PSBI	0,01...1,11 pF; $\text{tg}\,\delta=10^{-5}...1$.	
17	Teslametru cu sondă Hall, TSH.	0,1...1,2 T.	2,5
18	Galvanometru cu ac indicator.	$(1...3)\cdot10^{-7}$ A/div.	
19	Contoare electrice monofazate şi trifazate (CAM, CA)	240 V; 2,5...15 A. 3×380/220 V; 5; 10; 20 A.	2

Tiraj: 11 400+S.P. 80 exemplare legate. Coli de tipar: 26,25. Hîrtia: Scris I-A. Format: 70×100-44,1. Bun de tipar: 21.XI.1978. Nr. plan 5748. Ediţia 1979.

Întreprinderea Poligrafică „Banat" Timişoara, Calea Aradului nr. 1. Republica Socialistă România.

Comanda nr. 147.



Lei 17,10